Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (6) 1983, S. 523–551

Первая краевая задача для классических уравнений математической физики в областях с кусочно-гладкими границами II

В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский

Dieser Artikel ist eine Fortsetzung der in der ZAA 4 (1983) erschienenen Arbeit der Verfasser, die dem Dirichletschen Problem für das lineare Stokessche System in einem stückweise glatten Gebiet des $\mathbf{R}^3$ gewidmet war. Hier erhalten die Autoren Abschätzungen für den Greenschen Tensor sowie das Maximumprinzip von Miranda und Agmon. Analoge Resultate ergeben sich für die Laméschen Gleichungen. Es wird die Existenz einer starken Lösung der Dirichletschen Aufgabe für das Navier-Stokessche System bewiesen, und Abschätzungen für diese Lösungen werden angegeben.

Эта статья является продолжением работы авторов в ZAA 4 (1983), посвященной задаче Дирихле для линейной системы Стокса в кусочно-гладкой области в $\mathbf{R}^3$. Здесь получены оценки для тензора Грина, а также принцип Максимума Миранда-Агмона. Аналогичные результаты получены для уравнений Ламе. Установлено существование сильного решения задачи Дирихле для системы Навье-Стокса и получены оценки для этого решения.

This is a continuation of the author's paper in ZAA 4 (1983) devoted to the Dirichlet problem for the linear Stokes system in a piece-wise smooth domain in $\mathbf{R}^3$. Here the estimates for the Green tensor and Miranda-Agmon maximum principle are proved. Similar results are obtained for Lamé's equations. The existence of a strong solution of the Dirichlet problem for the Navier-Stokes equations is proved along with some estimates for this solution.

§ 7. Оценки матрицы Грина

Здесь и в следующем параграфе выводятся оценки элементов матрицы Грина и их производных, зависящие от расположения точек x и ξ. В этом параграфе рассматривается случай, когда одна из точек находится существенно ближе к вершине q, чем другая.

Приведем сначала некоторые общие сведения о матрице Грина. Пусть Ω — ограниченная область класса Λ^m, $m \geqq 1$, и A_0 — оператор первой краевой задачи для системы Стокса в Ω с однородными краевыми условиями.

Матрицей Грина системы Стокса в Ω назовем матрицу-функцию $(x, \xi) \to \|G_j^k(x, \xi)\|_{j,k=1}^4$, элементы которой удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{aligned}
&-\nu \Delta_x G_j^k(x, \xi) + \frac{\partial G_4^k}{\partial x_j}(x, \xi) = \delta_{j,k}\delta(x - \xi), \qquad j = 1, 2, 3, \\
&\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial G_l^k}{\partial x_l}(x, \xi) = 0, \qquad (x, \xi) \in \Omega \times \Omega, \qquad\qquad (7.1) \\
&G_j^k(x, \xi) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega \setminus S, \qquad \xi \in \Omega; \qquad j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

если $k = 1, 2, 3$; кроме того, вектор $(G_1^4, \ldots, G_4^4)$ есть решение задачи

$$
\begin{gathered}
-\nu\Delta_x G_j^4(x, \xi) + \frac{\partial G_4^4}{\partial x_j}(x, \xi) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \\
\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial G_l^4}{\partial x_l}(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (x, \xi) \in \Omega \times \Omega, \\
G_j^4(x, \xi) = 0 \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus S, \quad \xi \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3.
\end{gathered} \tag{7.2}
$$

Говоря о решениях этих задач, мы имеем в виду вектор-функцию из класса $W_2^1(\Omega \setminus \overline{U}) \times L^2(\Omega \setminus U)$, где U — произвольная окрестность точки $\xi \in \Omega$, $\overline{U} \subset \Omega$. Существование и единственность матрицы Грина, столбцы которой принадлежат указанному классу, вытекают из результатов книги [1].

Из определения матрицы Грина следует, что ее элементы как функции точки ξ удовлетворяют краевой задаче

$$
\begin{gathered}
-\nu\Delta_\xi G_j^k(x, \xi) - \frac{\partial G_j^4}{\partial \xi_k}(x, \xi) = \delta_{j,k}\delta(x - \xi), \quad k = 1, 2, 3, \\
-\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial G_j^l}{\delta \xi_l}(x, \xi) = 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \Omega, \\
G_j^k(x, \xi) = 0 \text{ при } \xi \in \partial\Omega \setminus S, \quad k = 1, 2, 3,
\end{gathered} \tag{7.3}
$$

если $j = 1, 2, 3$; кроме того, вектор $(G_4^1, \ldots, G_4^4)$ является решением задачи

$$
\begin{gathered}
-\nu\Delta_\xi G_4^k(x, \xi) - \frac{\partial G_4^4}{\partial \xi_k}(x, \xi) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \\
-\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial G_4^l}{\partial \xi_l}(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (x, \xi) \in \Omega \times \Omega, \\
G_4^l(x, \xi) = 0 \text{ при } \xi \in \partial\Omega \setminus S.
\end{gathered} \tag{7.4}
$$

Из соотношений (7.3), (7.4) получается представление решения $(\vec{v}, p)$ задачи (6.1) при $\vec{\varphi} = 0$:

$$
\begin{gathered}
v_j(x) = \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega G_j^k(x, \xi) f_k(\xi)\, d\xi + \int_\Omega G_j^4(x, \xi) h(\xi)\, d\xi, \quad j = 1, 2, 3, \\
p(x) = \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega G_4^k(x, \xi) f_k(\xi)\, d\xi + \int_\Omega G_4^4(x, \xi) h(\xi)\, d\xi
\end{gathered} \tag{7.5}
$$

для всех $f_k, h \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$.

В силу теоремы 6.1, столбцы матрицы Грина принадлежат классу $V_{\vec{\beta},\vec{\delta}}^{m,s}(\Omega \setminus U) \times V_{\vec{\beta},\vec{\delta}}^{m-1,s}(\Omega \setminus U)$, где показатели $m, s, \vec{\beta}, \vec{\delta}$ подчинены неравенствам (6.2), (6.3). Если $\Omega \in \Lambda^{m,\alpha}$, то по теореме 6.2 столбцы матрицы Грина принадлежат произведению $N_{\vec{\beta},\vec{\delta}}^{m,\alpha}(\Omega \setminus \overline{U}) \times N_{\vec{\beta},\vec{\delta}}^{m-1,\alpha}(\Omega \setminus \overline{U})$ (показатели $m, \alpha, \vec{\beta}, \vec{\delta}$ подчинены условиям (6.4), (6.5)).

Пусть U — окрестность точки $q \in \mathscr{P}$, причем замыкание $\overline{U}$ не содержит других вершин. Обозначим через λ_q собственное число оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$ (построенного для точки q) с наименьшей по абсолютной величине отрицательной мнимой частью. Пусть еще ε — сколь угодно малое положительное число и $\nu_\varepsilon = \inf_{\zeta \in e} \sigma_\varepsilon(\zeta)$, $\mu_q = \min\{|\operatorname{Im} \lambda_q|, 1\}$, как в § 6.

ЛЕММА 7.1: *Если Ω — область класса Λ^1 и $(x, \xi) \in U \times U$, то при $2\varrho_q(x) < \varrho_q(\xi)$*

$$|G_j{}^k(x, \xi)| \leqq c \frac{\varrho_q(x)^{\mu_q - \varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{1+\mu_q-\varepsilon}} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e - \varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}, \tag{7.6}$$

где $k, j = 1, 2, 3$.

При $2\varrho_q(\xi) < \varrho_q(x)$ в правой части неравенства (7.6) следует поменять местами точки x и ξ.

Доказательство: Пусть $(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ — решение задачи (6.1) с правой частью $(\vec{f}, h)$ и однородным краевым условием, где показатели $\vec{\beta}$ и $\vec{\delta}$ подчинены неравенствам

$$|\delta_e - 1 + 2/s| < \nu_e \qquad \text{для всех } e \in \xi, \tag{7.7}$$

$$1 + \mu_t > \beta_t + \sum_{\{e:t\in\bar{e}\}} \delta_e - 1 + 3/s > -\mu_t \qquad \text{для всех } t \in \mathscr{P} \tag{7.8}$$

и $(\vec{f}, h)$ вектор-функция с носителем в $\{y \in \Omega: \varrho_q(\xi)/2 < \varrho_q(y) < 2\varrho_q(\xi)\}$. По теореме 6.1 справедлива оценка

$$\|(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c\, \|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c \left(\|r\vec{f}\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} + \|h\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}\right). \tag{7.9}$$

Обозначим через $\Omega(x)$ пересечение шара с центром в точке x и радиусом $r(x)/2$ с областью Ω. В силу теоремы вложения С. Л. Соболева при $s > 3$

$$|v(x)| \leqq cr(x)^{1-3/s} (\|\nabla v\|_{L^s(\Omega(x))} + r(x)^{-1} \|v\|_{L^s(\Omega(x))}).$$

Умножая это неравенство на $\varrho_q(x)^{\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e(x)^{\delta_e}$, получим

$$\varrho_q(x)^{\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e(x)^{\delta_e} |\vec{v}(x)| \leqq cr(x)^{1-3/s} \|\vec{v}\|_{V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}. \tag{7.10}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{3} \left| \int_\Omega G_j{}^k(x, y)\, f_k(y)\, dy \right| + \left| \int_\Omega G_j{}^4(x, y)\, h(y)\, dy \right|$$
$$\leqq cr(x)^{1-3/s} \varrho_q(x)^{-\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e(x)^{-\delta_e} \left(\|r\vec{f}\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} + \|h\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}\right). \tag{7.11}$$

Пусть $\eta, \zeta \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\eta\zeta = \eta$, причем

$$\operatorname{supp} \zeta \subset \{y \in \Omega: \varrho_q(\xi) < \varrho_q(y) < 2q(\xi)\},$$

$$\varrho_q{}^{|\gamma|}(|D\eta^\varkappa| + |D\zeta^\varkappa|) \leqq c_\varkappa = \text{const}.$$

В силу произвольности $\vec{f}, h$ из (7.11) вытекает, что при $j = 1, 2, 3$

$$\sum_{k=1}^{3} \left\|\zeta G_j{}^k(x, \cdot)\, r^{-1} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e{}^{-\delta_e} \varrho_q{}^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}$$
$$+ \left\|\zeta G_j{}^4(x, \cdot) \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e{}^{-\delta_e} \varrho_q{}^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)} \leqq cr(x)^{1-3/s} \varrho_q(x)^{-\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e(x)^{-\delta_e}. \tag{7.12}$$

Воспользуемся локальной оценкой (см. лемму 4.5) при $j, k = 1, 2, 3$

$$\|\eta G_j^k(x,\cdot)\|_{V^{1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)} \leqq c\varrho_q(\xi)^{2\beta_q+2\Sigma\delta_e+3/s-2/s'} \times\left(\sum_{l=1}^{3}\Big\|\zeta G_j^l(x,\cdot)\, r^{-1}\prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\Big\|_{L^{s'}(\Omega)} + \Big\|\zeta G_j^4(x,\cdot)\prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\Big\|_{L^{s'}(\Omega)}\right). \tag{7.13}$$

Отсюда и из (7.12) получаем

$$\|\eta G_j^k(x,\cdot)\|_{V^{1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)} \leqq c\varrho_q(\xi)^{2\beta_q+2\Sigma\delta_e+3/s-3/s'} \times r(x)^{1-3/s}\varrho_q(x)^{-\beta_q}\prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e(x)^{-\delta_e}. \tag{7.14}$$

Применяя оценку (7.10), получим при $j, k = 1, 2, 3$

$$\varrho_q(\xi)^{\beta_q+\Sigma\delta_e}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\delta_e}|G_j^k(x,\xi)| \leqq cr(\xi)^{1-3/s}\|\eta G_j^k(x,\cdot)\|_{V^{1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)},$$

что вместе с (7.14) дает

$$|G_j^k(x,\xi)| \leqq c\varrho_q(\xi)^{-1}\left(\frac{\varrho_q(x)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e+1-3/s}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e+1-3/s} \times\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\delta_e+1-3/s}. \tag{7.15}$$

Так как число s можно считать сколь угодно большим, то (7.6) следует из (7.15).

Доказательство соответствующей оценки в зоне $2\varrho_q(\xi) < \varrho_q(x)$ можно получить либо переходом к сопряженной задаче, либо повторяя с очевидными изменениями предыдущие рассуждения ∎

ЛЕММА 7.2: *Если Ω— область класса $\Lambda^{1,\alpha}$ и $(x,\xi)\in U\times U$, то при $2\varrho_q(x) < \varrho_q(\xi)$*

$$|G_4^k(x,\xi)| \leqq c\,\frac{\varrho_q(x)^{\mu_q-1-\varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{1+\mu_q-\varepsilon}}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}, \tag{7.16}$$

где $k = 1, 2, 3$;

$$|G_j^4(x,\xi)| \leqq c\,\frac{\varrho_q(x)^{\mu_q-\varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{2+\mu_q-\varepsilon}}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon}, \tag{7.17}$$

где $j = 1, 2, 3$;

$$|G_4^4(x,\xi)| \leqq c\,\frac{\varrho_q(x)^{\mu_q-1-\varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{2+\mu_q-\varepsilon}}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon}\prod_{\{e:q\in\bar e\}}\left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon}. \tag{7.18}$$

При $2\varrho_q(\xi) < \varrho_q(x)$ в правых частях неравенств (7.16)—(7.18) *следует поменять местами точки x и ξ, а в левых верхний и нижний индексы.*

Доказательство: Ограничимся выводом оценки (7.16), так как остальные неравенства доказываются аналогично. Будем использовать обозначения, введенные в доказательстве леммы 7.1.

Воспользуемся локальной оценкой из леммы 4.5. Тогда

$$|p(x)| \leqq c\varrho_q(x)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e-3/s} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e-3/s} \|(\boldsymbol{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}}.$$

Отсюда и из (7.9) получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{3} \int_\Omega G_4^k(x, y)\, f_k(y)\, dy + \int_\Omega G_4^4(x, y)\, h(y)\, dy\right|$$
$$\leqq c\varrho_q(x)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e-3/s} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e-3/s} \left(\|r\vec{f}\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} + \|h\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}\right)$$

и, благодаря произвольности вектор-функции $(\vec{f}, h)$,

$$\sum_{k=1}^{3} \left\|\zeta G_4^k(x, \cdot)\, r^{-1} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)} + \left\|\zeta G_4^4(x, \cdot) \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}$$
$$\leqq c\varrho_q(x)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e-3/s} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e-3/s}. \tag{7.19}$$

В силу локальной оценки

$$|G_4^k(x, \xi)| \leqq c\varrho_q(\xi)^{\beta_q+\Sigma\delta_e+3/s-2} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{1-\delta_e-3/s}$$
$$\times \left(\sum_{l=1}^{3} \left\|\zeta G_4^l(x, \cdot)\, r^{-1} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)} + \left\|\zeta G_4^4(x, \cdot) \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right)$$

(см. (7.10) и лемму 4.5). Отсюда и из (7.12) вытекает, что

$$|G_4^k(x, \xi)| \leqq \frac{c}{\varrho_q(\xi)^2} \left(\frac{\varrho_q(x)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\beta_q-3/s-\Sigma\delta_e} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e-3/s} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{1-\delta_e-3/s}.$$

Выбирая s достаточно большим и используя условия (7.7), (7.8), приходим к 7.6). Лемма доказана ∎

ТЕОРЕМА 7.3: 1. *Если область Ω принадлежит классу Λ^m и $(x, \xi) \in U \times U$, то при $2\varrho_q(x) < \varrho_q(\xi)$*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_j^k(x, \xi)|$$
$$\leqq c\, \frac{\varrho_q(x)^{\mu_q-|\sigma|-\varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{1+\mu_q+|\tau|-\varepsilon}} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-|\tau|-\varepsilon}, \tag{7.20}$$

где $k, j = 1, 2, 3$; σ и τ — мультииндексы, $|\sigma|, |\tau| \leqq m-1$.

При $2\varrho_q(\xi) < \varrho_q(x)$ в правой части неравенства (7.20) следует поменять местами точки x и ξ.

2. *Если область Ω принадлежит классу $\Lambda^{m,\alpha}$, $(x, \xi) \in U \times U$, то при $2\varrho_q(x) < \varrho_q(\xi)$*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_4^k(x, \xi)| \leqq c\, \frac{\varrho_q(x)^{\mu_q-|\sigma|-1-\varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{1+\mu_q+|\tau|-\varepsilon}}$$
$$\times \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-1-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-|\tau|-\varepsilon}, \tag{7.21}$$

где $k = 1, 2, 3$, $|\sigma|, |\tau| \leqq m$;

$$|D_x{}^\sigma D_\xi{}^\tau G_j{}^4(x, \xi)| \leqq c \frac{\varrho_q(x)^{\mu_q - |\sigma| - \varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{2+\mu_q+|\tau|-\varepsilon}} \times \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e - |\sigma| - \varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e - |\tau| - 1 - \varepsilon}, \tag{7.22}$$

где $j = 1, 2, 3$; $|\sigma|, |\tau| \leqq m$;

$$|D_x{}^\sigma D_\xi{}^\tau G_4{}^4(x, \xi)| \leqq c \frac{\varrho_q(x)^{\mu_q - |\sigma| - 1 - \varepsilon}}{\varrho_q(\xi)^{2+\mu_q+|\tau|-\varepsilon}} \times \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e - |\sigma| - 1 - \varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e - |\tau| - 1 - \varepsilon}. \tag{7.23}$$

При $2\varrho_q(\xi) < \varrho_q(x)$ *в правых частях неравенств* (7.21)—(7.23) *следует поменять местами точки* x *и* ξ, *в левых-верхний и нижний индексы.*

Доказательство: Так как вектор-функция $\zeta \to \big(G_l{}^1(x, \zeta), \ldots, G_l{}^4(x, \zeta)\big)$ удовлетворяет однородной краевой задаче, сопряженной с (6.1) в $\Omega(\xi)$ (обозначение введено в доказательстве леммы 7.1), то имеет место локальная оценка

$$|D_\xi{}^\tau G_l{}^k(x, \xi)| \leqq c r(\xi)^{-|\tau|} \left(\sum_{m=1}^{3} \|G_l{}^m(x, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega(\xi))} + r(\xi)\, \|G_l{}^4(x, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega(\xi))}\right).$$

Поскольку вектор-функция $\eta \to \big(D_\xi{}^\tau G_1{}^k(\eta, \xi), \ldots, D_\xi{}^\tau G_4{}^k(\eta, \xi)\big)$ является решением однородной задачи (6.1) в $\Omega(x)$, то

$$\begin{aligned} |D_x{}^\sigma D_\xi{}^\tau G_j{}^k(x, \xi)| &\leqq c r(x)^{-|\sigma|} \left(\sum_{l=1}^{3} \|D_\xi{}^\tau G_l{}^k(\cdot, \xi)\|_{L^\infty(\Omega(x))} + r(x)\, \|D_\xi{}^\tau G_4{}^k(\cdot, \xi)\|_{L^\infty(\Omega(x))}\right) \\ &\leqq c r(x)^{-|\sigma|}\, r(\xi)^{-|\tau|} \Bigg(\sum_{m,l=1}^{3} \|G_l{}^m\|_{L^\infty(\Omega(x)\times\Omega(\xi))} \\ &\quad + r(x) \sum_{m=1}^{3} \|G_4{}^m\|_{L^\infty(\Omega(x)\times\Omega(\xi))} \\ &\quad + r(\xi) \sum_{l=1}^{3} \|G_l{}^4\|_{L^\infty(\Omega(x)\times\Omega(\xi))} \\ &\quad + r(x)\, r(\xi)\, \|G_4{}^4\|_{L^\infty(\Omega(x)\times(\xi))}\Bigg). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$r(x) \sim \varrho_q(x) \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)},$$

и воспользоваться леммами 7.1, 7.2. Теорема доказана ∎

§ 8. Оценки функции Грина (продолжение)

Перейдем теперь к оценкам тензора Грина в случае, когда расстояния от точек x и ξ до вершины q сравнимы и одна из этих точек ближе к ребру, чем к другой точке.

ЛЕММА 8.1: *Если Ω — область класса Λ^1, то при*

$$\varrho_q(x)/2 < \varrho_q(\xi) < 2\varrho_q(x), \qquad |x - \xi| > \min\{r(x), r(\xi)\}$$

справедливо неравенство

$$|G_j^k(x, \xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-\varepsilon}, \qquad j, k = 1, 2, 3, \tag{8.1}$$

где $e(x)$ и $e(\xi)$ — ближайшее ребро к точке x и ξ, соответственно, а величина ν_e определена перед леммой 7.1.

Доказательство: Пусть показатели $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ удовлетворяют неравенствам (7.7), (7.8) и $(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ — решение краевой задачи (6.1) с правой частью $(\vec{f}, 0)$. Допустим, что $\operatorname{supp} \vec{f} \subset \{y \in \Omega: 2|y-\xi| < |x-\xi|\}$. Обозначим через η, ζ функции из $C^\infty(\Omega)$ такие, что $\eta\zeta = \eta$, $\operatorname{supp}\zeta \subset \{y \in \Omega: 2|y-\xi| < |x-\xi|\}$ и

$$|x-\xi|^{|\gamma|}(|D^\gamma\eta| + |D^\gamma\zeta|) \leq c_\gamma.$$

Рассуждая дословно так же, как в доказательстве леммы 7.1, приходим к оценке (7.12) (с новой функцией ζ).

Воспользуемся локальной оценкой (см. лемму 4.5)

$$\begin{aligned}
&\|\eta G_j^k(x, \cdot)\|_{V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \\
&\leq c\varrho_q(\xi)^{2\beta_q+2\sum_{e\neq e(\xi)}\delta_e}|x-\xi|^{2\delta_{e(\xi)}+3/s-3/s'} \\
&\quad\times\left(\sum_{l=1}^{3}\left\|\zeta G_j^l(x,\cdot)\, r^{-1}\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right. \\
&\quad\left.+\left\|\zeta G_j^4(x,\cdot)\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Отсюда и из (7.10) получаем

$$\begin{aligned}
&|G_j^k(x, \xi)| \\
&\leq c\varrho_q(\xi)^{\beta_q+\sum_{e\neq e(\xi)}\delta_e}\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e(\xi)^{-\delta_e}|x-\xi|^{2\delta_{e(\xi)}+3/s-3/s'} \\
&\quad\times r(\xi)^{1-3/s}\left(\sum_{l=1}^{3}\left\|\zeta G_j^l(x,\cdot)\, r^{-1}\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right. \\
&\quad\left.+\left\|\zeta G_j^4(x,\cdot)\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\delta_e}\varrho_q^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Оценим правую часть при помощи неравенства (7.12). Имеем

$$\begin{aligned}
|G_j^k(x, \xi)| &\leq c\varrho_q(x)^{-\beta_q-\sum_{e\neq e(x)}\delta_e} r(x)^{1-\delta_{e(x)}-3/s} \\
&\quad\times\varrho_q(\xi)^{\beta_q+\sum_{e\neq e(\xi)}\delta_e} r(\xi)^{1-\delta_{e(\xi)}-3/s}|x-\xi|^{2\delta_e(\xi)+3/s-3/s'}
\end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$|G_j{}^k(x,\xi)| \leqq c\left(\frac{\varrho_q(x)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e}\left(\frac{|x-\xi|}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_{e(x)}}\left(\frac{|x-\xi|}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\delta_e(\xi)}$$
$$\times |x-\xi|^{-1}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{1-\delta_e(x)-3/s}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{1-\delta_e(\xi)-3/s}. \tag{8.3}$$

Если $e(x) = e(\xi)$, то произведение первых трех множеств равно

$$\left(\frac{\varrho_q(x)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\beta_q-\sum\limits_{e\neq e(x)}\delta_e},$$

и так как $\varrho_q(x)/2 \leqq \varrho_q(\xi) \leqq 2\varrho_q(x)$, то это произведение не превосходит постоянной. Если же $e(x) \neq e(\xi)$, то $|x-\xi| \sim \varrho_q(x) \sim \varrho_q(\xi)$, и снова то же произведение оценивается постоянной. Выбирая число s достаточно большим, заканчиваем доказательство ▮

ЛЕММА 8.2: *Если Ω — область класса $\Lambda^{1,\alpha}$, то при $\varrho_q(x)/2 < \varrho_q(\xi) < 2\varrho_q(x)$, $|x-\xi| > \min\{r(x), r(\xi)\}$ справедливы неравенства*

$$|G_4{}^k(x,\xi)| \leqq \frac{c}{|x-\xi|^2}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-1-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-\varepsilon}, \tag{8.4}$$

где $k = 1, 2, 3$;

$$|G_j{}^4(x,\xi)| \leqq \frac{c}{|x-\xi|^2}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-1-\varepsilon}, \tag{8.5}$$

где $j = 1, 2, 3$;

$$|G_4{}^4(x,\xi)| \leqq \frac{c}{|x-\xi|^3}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-1-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-1-\varepsilon}. \tag{8.6}$$

Доказательство: Ограничимся выводом оценки (8.4), так как неравенства (8.5), (8.6) доказываются аналогично. Пусть ζ — срезающая функция, определенная в доказательстве леммы 7.4. Рассуждая так же, как в начале доказательства леммы 7.2, придем к неравенству (7.19) (с новой функцией ζ).

В силу локальной оценки

$$|G_4{}^k(x,\xi)| \leqq c\varrho_q(\xi)^{\beta_q+\Sigma\delta_e-3/s'+1}\left(\frac{r(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{1-\delta_{e(\xi)}-3/s}$$
$$\times\left(\frac{|x-\xi|}{\varrho_q(\xi)}\right)^{2\delta_{e(\xi)}+3/s-3/s'}\left(\sum_{l=1}^{3}\left\|\zeta G_4{}^l(x,\cdot)\, r^{-1}\prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e{}^{-\delta_e}\varrho_q{}^{-\beta_e}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right.$$
$$\left.+\left\|\zeta G_4{}^4(x,\cdot)\prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e{}^{-\delta_e}\varrho_q{}^{-\beta_q}\right\|_{L^{s'}(\Omega)}\right)$$

и неравенства (7.9), получаем

$$|G_4{}^k(x,\xi)| \leqq c\left(\frac{\varrho_q(x)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e-3/s}\varrho_q(\xi)^{-2}\left(\frac{r(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_{e(x)}-3/s}$$
$$\times\left(\frac{r(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{1-\delta_{e(\xi)}-3/s}\left(\frac{|x-\xi|}{\varrho_q(\xi)}\right)^{2\delta_{e(\xi)}+3/s-3/s'}.$$

Так как $\varrho_q(x) \sim \varrho_q(\xi)$, то эту оценку можно переписать в виде

$$|G_4^k(x, \xi)| \leq c\varrho_q(\xi)^{-2}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{-\delta_{e(x)}-3/8}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{1-\delta_{e(\xi)}-3/8}\left(\frac{|x-\xi|}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\delta_{e(\xi)}-\delta_{e(x)}-2}.$$

Если $e(x) = e(\xi)$, то последнее неравенство совпадает с (8.4); в случае $e(x) \neq e(\xi)$ следует заметить, что $|x - \xi| \sim \varrho_q(\xi)$. Лемма доказана ∎

ТЕОРЕМА 8.3: 1. *Если Ω — область класса Λ^m и $(x, \xi) \in U \times U$, то при $\varrho_q(x)/2 < \varrho_q(\xi) < 2\varrho_q(x)$, $|x - \xi| > \min\{r(x), r(\xi)\}$ справедливо неравенство*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_j^k(x, \xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|^{1+|\sigma|+|\tau|}}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-|\sigma|-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-|\tau|-\varepsilon}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{8.7}$$

где $e(x)$ и $e(\xi)$ — ближайшее ребро к точке x и ξ, соответственно, величина ν_e определена перед леммой 7.1 и $|\sigma|, |\tau| \leq m - 1$.

2. *Если Ω — область класса $\Lambda^{m,\alpha}$, $|\sigma|, |\tau| \leq m$ и $(x, \xi) \in U \times U$, то при $\varrho_q(x)/2 < \varrho_q(\xi) < 2\varrho_q(x)$, $|x - \xi| > \min\{r(x), r(\xi)\}$ справедливы неравенства*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_4^k(x, \xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|^{2+|\sigma|+|\tau|}}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-|\sigma|-1-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-|\tau|-\varepsilon},$$

где $k = 1, 2, 3$;

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_j^4(x, \xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|^{2+|\sigma|+|\tau|}}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-|\sigma|-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-1-|\tau|-\varepsilon},$$

где $j = 1, 2, 3$;

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_4^4(x, \xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|^{3+|\sigma|+|\tau|}}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-|\sigma|-1-\varepsilon}\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-|\tau|-1-\varepsilon}.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 7.3. Во всех рассмотренных ситуациях расстояние от одной из точек x или ξ до множества S особенностей границы меньше, чем расстояние до другой точки. Если же $|x - \xi| \leq \min\{r(x), r(\xi)\}$, то оценки матрицы Грина по существу те же, что и в случае области с гладкой границей (см. [2, 3]). Ограничимся выводом этих оценок только для элементов G_j^k $(j, k = 1, 2, 3)$, так как только они потребуются в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 8.4: 1. *Если $\Omega \in \Lambda^m$, $|x - \xi| \leq \min\{r(x), r(\xi)\}$, то*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_j^k(x, \xi)| \leq c\,|x - \xi|^{1-|\sigma|-|\tau|} \tag{8.8}$$

для всех мультииндексов σ, τ таких, что $|\sigma|, |\tau| \leq m - 1$.

2. *Если $\Omega \in \Lambda^{m,\alpha}$, то оценка* (8.8) *верна и при $|\sigma|, |\tau| \leq m$.*

Доказательство: Ограничимся проверкой первого утверждения, так как второе получается аналогично. Обозначим через B_δ любой открытый шар радиуса δ такой, что $\operatorname{dist}(B_\delta, S) = \delta$. Положим $\Omega_\delta = \Omega \cap B_\delta$, $\Gamma_\delta = \partial\Omega \cap B_\delta$. После растяжения в δ^{-1} раз поверхность Γ_δ перейдет в поверхность $\delta^{-1}\Gamma_\delta$ класса C^m, причем функции, локально задающие $\delta^{-1}\Gamma_\delta$, ограничены вместе с производными до порядка m равномерно относительно δ. Из результатов работы [2] вытекает, что существует тензор Грина $\{g_j^k\}_{j,k=1}^4$ системы Стокса в области $\delta^{-1}\Omega_\delta$ (с краевым условием Дирихле на $\delta^{-1}\Gamma_\delta$), такой, что

$$|D_X^\sigma D_\Xi^\tau g_j^k| \leqq c\,|X - \Xi|^{-1-|\sigma|-|\tau|}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{8.9}$$

$$|D_X^\sigma D_\Xi^\tau g_4^k| \leqq c\,|X - \Xi|^{-2-|\sigma|-|\tau|}. \tag{8.10}$$

Вектор-функция $\{\tilde G_j^k(x, \xi)\}_{j=1}^4$ ($k = 1, 2, 3$), определенная при $x \in \Omega_\delta$, $\xi \in \Omega_\delta$ равенствами

$$\tilde G_j^k(x, \xi) = \delta^{-1} g_j^k\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\xi}{\delta}\right), \quad \tilde G_4^k(x, \xi) = \delta^{-2} g_4^k\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\xi}{\delta}\right),$$

удовлетворяет системе (7.1) в области Ω_δ и однородному краевому условию Дирихле на Γ_δ.

Из (8.9), (8.10) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &|D_x^\sigma D_\xi^\tau \tilde G_j^k(x, \xi)| \leqq c\,|x - \xi|^{-1-|\sigma|-|\tau|}, && j, k = 1, 2, 3,\\ &|D_x^\sigma D_\xi^\tau \tilde G_4^k(x, \xi)| \leqq c\,|x - \xi|^{-2-|\sigma|-|\tau|}, && k = 1, 2, 3, \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

где $|\sigma|, |\tau| \leqq m - 1$.

Обозначим через η функцию из $C_0^\infty(B_\delta)$, равную единице в концентрическом с B_δ шаре $B_{\delta/2}$. Пусть $\{G_j^k\}$ — тензор Грина системы Стокса в области Ω. Положим $H_j^k(x, \xi) = G_j^k(x, \xi) - \eta(x)\,\tilde G_j^k(x, \xi)$. Очевидно, вектор-функция $x \to \{H_j^k(x, \xi)\}_{j=1}^4$ ($k = 1, 2, 3$) удовлетворяет задаче (6.1), где $\vec\varphi = 0$ и

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau \vec f(x, \xi)| \leqq c\delta^{-3-|\sigma|-|\tau|},$$

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau h(x, \xi)| \leqq c\delta^{-2-|\sigma|-|\tau|},$$

$|\sigma| \leqq m - 2$, $|\tau| \leqq m - 1$. Кроме того, $\vec f(x, \xi) = 0$, $h(x, \xi) = 0$ при $x \notin B_\delta$. Применяя следствие 6.4, получим оценку

$$\|D_\xi^\tau H_j^k(\cdot, \xi)\|_{\mathscr{V}_\beta^{m,s}(\Omega)} \leqq c\left(\|D_\xi^\tau f(\cdot, \xi)\|_{\mathscr{V}_\beta^{m-2,s}(\Omega)} + \|D_\xi^\tau h(\cdot, \xi)\|_{\mathscr{V}_\beta^{m-1,s}(\Omega)}\right). \tag{8.12}$$

Очевидно, правая часть (8.12) есть $O(\delta^{\beta+3/s-m-1-|\tau|})$ и левая часть мажорирует норму

$$\sum_{l=0}^{m} \delta^{\beta-m+l}\,\|\nabla_l D_\xi^\tau H_j^k(\cdot, \xi)\|_{L^s(\Omega_\delta)}.$$

Отсюда и из теоремы С. Л. Соболева о вложении W_s^m в W_∞^{m-1} при $s > 3$ получаем, что левая часть (8.12) не меньше, чем

$$c\sum_{l=0}^{m-1} \delta^{\beta-m+l+3/s}\,\|\nabla_l D_\xi^\tau H_j^k(\cdot, \xi)\|_{L^\infty(\Omega_\delta)}.$$

Следовательно, при $x, \xi \in \Omega_\delta$

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau H_j^k(x, \xi)| \leqq c\delta^{-1-|\tau|-|\sigma|}, \tag{8.13}$$

где $j, k = 1, 2, 3$, $|\sigma|, |\tau| \leqq m - 1$. Так как $|x - \xi| \leqq \delta$, то (8.8) следует непосредственно из (8.11) и (8.13). Теорема доказана ∎

Мы не изучали случаи, когда точки x, ξ расположены далеко друг от друга — например, когда они близки к разным вершинам или ребрам, исходящим из разных вершин и т. п. Эти ситуации рассматриваются при помощи аналогичных приемов и разве лишь проще. Ограничимся формулировкой оценок тензора Грина в случае, когда точки x и ξ близки к разным вершинам.

ТЕОРЕМА 8.5: 1. *Если область Ω принадлежит классу Λ^m, $U(p)$, $U(q)$ — малые окрестности вершин p и q, $x \in U(p)$, $\xi \in U(q)$, то*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_j^k(x, \xi)| \leqq c(p, q)\, \varrho_p(x)^{\mu_p-|\sigma|-\varepsilon}\, \varrho_q(\xi)^{\mu_q-|\tau|-\varepsilon}$$

$$\times \prod_{\{e:p\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_p(x)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-|\tau|-\varepsilon},$$

где $k, j = 1, 2, 3$, σ и τ — мультииндексы, $|\sigma|, |\tau| \leqq m-1$.

2. *Если область Ω принадлежит классу $\Lambda^{m,\alpha}$, $x \in U(p)$, $\xi \in U(q)$, то*

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_4^k(x, \xi)| \leqq c(p, q)\, \varrho_p(x)^{\mu_p-|\sigma|-1-\varepsilon}\, \varrho_q(\xi)^{\mu_q-|\tau|-\varepsilon}$$

$$\times \prod_{\{e:p\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_p(x)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-1-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-|\tau|-\varepsilon},$$

где $k = 1, 2, 3$, $|\sigma|, |\tau| \leqq m$;

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_j^4(x, \xi)| \leqq c(p, q)\, \varrho_p(x)^{\mu_p-|\sigma|-\varepsilon}\, \varrho_q(\xi)^{\mu_q-|\tau|-1-\varepsilon}$$

$$\times \prod_{\{e:p\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_p(x)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-|\tau|-1-\varepsilon},$$

где $j = 1, 2, 3$, $|\sigma|, |\tau| \leqq m$;

$$|D_x^\sigma D_\xi^\tau G_4^4(x, \xi)| \leqq c(p, q)\, \varrho_p(x)^{\mu_p-|\sigma|-1-\varepsilon}\, \varrho_q(\xi)^{\mu_q-|\tau|-1-\varepsilon}$$

$$\times \prod_{\{e:p\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_p(x)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-1-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-|\sigma|-1-\varepsilon}.$$

§ 9. Принцип максимума для системы Стокса

Пусть Ω — ограниченная область класса $\Lambda^{1,\alpha}$. Рассмотрим краевую задачу

$$-\nu\Delta\vec{v} + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{9.1}$$

$$\vec{v}_{\partial\Omega\setminus S} = \varphi. \tag{9.2}$$

Обозначим через $C_0^\alpha(\partial\Omega\setminus S)$ пространство функций на $\partial\Omega$ с компактными носителями на $\partial\Omega\setminus S$, удовлетворяющих условию Гельдера порядка α. Пусть еще $L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ множество функций на Ω таких, что

$$\Big\|\prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q^{\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{\delta_e} u\Big\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Аналогично определяется пространство $L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$.

Последовательность функций $\{\psi^{(m)}\}$ из класса $C_0^\alpha(\partial\Omega\setminus S)$ назовем *аппроксимирующей функцию* ψ из $L^\infty_{\beta,\delta}(\partial\Omega)$, если $\{\psi^{(m)}\}$ сходится почти везде на $\partial\Omega$ к функции ψ и

$$\|\psi^{(m)}\|_{L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)} \leqq \text{const}.$$

Пусть $\{\vec{v}^{(m)}, p^{(m)}\}$ — последовательность решений задачи (9.1), (9.2) из пространства $W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ с данными Дирихле $\vec{\varphi}^{(m)} \in C_0^\alpha(\partial\Omega \setminus S)$. Ясно, что

$$\vec{v}^{(m)}(x) = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x, \xi)\, \varphi_k^{(m)}(\xi)\, ds_\xi ,$$

$$p^{(m)}(x) = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_4^k}{\partial N_\xi}(x, \xi)\, \varphi_k^{(m)}(\xi)\, ds_\xi , \qquad x \in \Omega.$$

Согласно теоремам 7.3, 7.6 для любой фиксированной точки $x \in \Omega$ имеем

$$\left| \frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x, \xi) \right| \leqq c(x) \prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q(\xi)^{\mu_q-1-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)} \right)^{\nu_e-1-\varepsilon}, \tag{9.3}$$

где $1 \leqq k \leqq 3$, $1 \leqq j \leqq 4$.

Предположим, что вектор-функция $\vec{\varphi}$ принадлежит пространству $L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$, где $\delta_e < \nu_e$ и $\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \delta_e < 1 + \mu_q$. Если $\{\vec{\varphi}^{(m)}\}$ — аппроксимирующая последовательность, то, в силу (9.3), последовательность $\{\vec{v}^{(m)}, p^{(m)}\}$ сходится в каждой точке Ω и для предела $\{\vec{v}, p\}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \vec{v}(x) &= \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x, \xi)\, \vec{\varphi}_k(\xi)\, ds_\xi , \\ p(x) &= \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_4^k}{\partial N_\xi}(x, \xi)\, \vec{\varphi}_k(\xi)\, ds_\xi , \qquad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Предел $(\vec{v}, p)$ будем называть решением задачи (9.1), (9.2) с данными Дирихле из $L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$. Очевидно, $(\vec{v}, p)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.

ТЕОРЕМА 9.1: *Пусть $\Omega \in \Lambda^{1,\alpha}$ и $\vec{\varphi} \in L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$, где*

$$|\delta_e| < \nu_e , \qquad \left| \beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \delta_e - 1/2 \right| < 1/2 + \mu_q \tag{9.5}$$

для всех $e \in \mathscr{E}$ и $q \in \mathscr{P}$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\vec{v}\|_{L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)} \leqq c\, \|\vec{\varphi}\|_{L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)} . \tag{9.6}$$

Доказательство основано на непосредственной оценке интеграла (9.4) при помощи неравенств, выведенных в §§ 7, 8 для производных элементов G_j^k матрицы Грина. Очевидно, что достаточно провести доказательство в предположении, что носитель вектор-функции $\vec{\varphi}$ имеет малый диаметр. Ограничимся наиболее трудным случаем, когда носитель $\vec{\varphi}$ содержится в окрестности U вершины q и точка x принадлежит той же окрестности.

Выпишем используемые далее оценки функции $\partial G_j^k(x,\xi)/\partial N_\xi$, $j, k = 1, 2, 3$, вытекающие из §§ 7, 8. Если $\xi \in E_1$, где $E_1 = \{\xi : \xi \in U \cap (\partial\Omega \setminus S),\ 2\varrho_q(x) < \varrho_q(\xi)\}$, то

$$\left| \frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x, \xi) \right| \leqq c\, \frac{\varrho_q(x)^{\mu_q-1}}{\varrho_q(\xi)^{2+\mu_q-\varepsilon}} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)} \right)^{\nu_e-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(x)} \right)^{\nu_e-1-\varepsilon} . \tag{9.7}$$

Если $\xi \in E_2$, где $E_2 = \{\xi : \xi \in U \cap (\partial\Omega \setminus S), 2\varrho_q(\xi) < \varrho_q(x)\}$, то

$$\left|\frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x,\xi)\right| \leqq c\,\frac{\varrho_q(\xi)^{\mu_q-1-\varepsilon}}{\varrho_q(x)^{1+\mu_q-\varepsilon}} \prod_{\{e:q\in\bar e\}}{}' \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}. \tag{9.8}$$

Если $\xi \in E_3$, где $E_3 = \{\xi : \xi \in U \cap (\partial\Omega \setminus S), \varrho_q(x)/2 < \varrho_q(\xi) < 2\varrho_q(x), |x-\xi| > \min \times (r(x), r(\xi))\}$, то

$$\left|\frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x,\xi)\right| \leqq \frac{c}{|x-\xi|^2} \left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_e(x)-\varepsilon} \left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_e(\xi)-1-\varepsilon}. \tag{9.9}$$

Пусть теперь $\xi \in E_4$, где $E_4 = \{\xi : \xi \in U \cap (\partial\Omega\setminus S), |x-\xi| \leqq \min(r(x), r(\xi))\}$. Так как функция $x \to \partial G_j^k(x,\xi)/\partial N_\xi$ обращается в нуль на $\partial\Omega \setminus S$ и по теореме 7.7 $|\nabla G_j^k(x,\xi)| \leqq c\,|x-\xi|^{-2}$, то

$$\left|\frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x,\xi)\right| \leqq \frac{c\,d(x)}{|x-\xi|^3}, \qquad d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega). \tag{9.10}$$

Представим интеграл

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_j^k}{\partial N_\xi}(x,\xi)\,\varphi_k(\xi)\,ds_\xi$$

в виде суммы интегралов I_l по множествам E_l, $l = 1, \ldots, 4$. Вид оценок (9.7) до (9.10) позволяет считать, без ограничения общности, что $\Omega \cap U = K \cap U$, где K — конус с ребрами.

Имеем в силу (9.7)

$$|I_1| \leqq c\varrho_q(x)^{\mu_q-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}$$
$$\times \int_{E_1} \varrho_q(\xi)^{-2-\mu_q+\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon} |\vec\varphi(\xi)|\,ds_\xi.$$

Последний интеграл мажорируется величиной

$$c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)} \int_{E_1} \varrho_q(\xi)^{-\beta_q-2-\mu_q+\varepsilon-\Sigma\delta_e} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\delta_e-\varepsilon} ds_\xi. \tag{9.11}$$

Так как, согласно (9.5), $\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar e\}} \delta_e + 2 + \mu_q > 2$, то (9.11) не превосходит

$$c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)}\, \varrho_q(x)^{-\beta_q-\mu_q-\Sigma\delta_e+\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$|I_1| \leqq c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)}\, \varrho_q(x)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}. \tag{9.12}$$

Поскольку $|\delta_e| < \nu_e$, то, выбирая ε достаточно малым, можно заменить в (9.12) показатель $\nu_e - \varepsilon$ на δ_e. Следовательно,

$$\|I_1\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega\cap U)} \leqq c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)}. \tag{9.13}$$

В силу (9.8)

$$|I_2| \leqq c\varrho_q(x)^{-1-\mu_q+\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}$$

$$\times \int_{E_2} \varrho_q(\xi)^{\mu_q-1-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\varepsilon} |\vec\varphi|\, ds_\xi .$$

Интеграл в правой части не превосходит величины

$$c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)} \int_{E_2} \varrho_q(\xi)^{\mu_q-\beta_q-1-\Sigma\delta_e-\varepsilon} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{\nu_e-1-\delta_e-\varepsilon} ds_\xi .$$

Согласно (9.5), $\mu_q-\beta_q-1-\sum\delta_e>-2$, поэтому последний интеграл не больше, чем $c\varrho_q(x)^{\mu_q-\beta_q+1-\Sigma\delta_e-\varepsilon}$. Итак,

$$|I_2| \leqq c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)}\, \varrho_q(x)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{\nu_e-\varepsilon}$$

и, значит,

$$\|I_2\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega\cap U)} \leqq c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)}. \tag{9.14}$$

В силу (9.9)

$$|I_3| \leqq cr(x)^{\nu_{e(x)}-\varepsilon} \int_{E_3} \frac{r(\xi)^{\nu_{e(\xi)}-1-\varepsilon}}{|x-\xi|^{1+\nu_{e(x)}+\nu_{e(\xi)}-2\varepsilon}}\, |\vec\varphi(\xi)|\, ds_\xi$$

$$\leqq c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)}\, r(x)^{\nu_{e(x)}-\varepsilon} \int_{E_3} \frac{r(\xi)^{\nu_{e(\xi)}-1-\varepsilon}\,\varrho_q(\xi)^{-\beta_q}}{|x-\xi|^{1+\nu_{e(x)}+\nu_{e(\xi)}-2\varepsilon}} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e(\xi)^{-\delta_e}\, ds_\xi .$$

Отсюда

$$|I_3| \leqq c\,\|\vec\varphi\|_{L^\infty_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)}\, r(x)^{\nu_{e(x)}-\varepsilon}\, \varrho_q(x)^{-\beta_q-\Sigma\delta_e}$$

$$\times \int_{E_3} \frac{r(\xi)^{\nu_{e(\xi)}-1-\varepsilon}}{|x-\xi|^{1+\nu_{e(x)}+\nu_{e(\xi)}-2\varepsilon}} \left(\frac{r(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\delta_{e(\xi)}} ds_\xi . \tag{9.15}$$

Пусть V_e — окрестность в $\partial\Omega$ ребра e, в которой $e(\xi)=e$. Интеграл из (9.15) оценивается суммой выражений вида

$$c\varrho_q(x)^{\delta_e} \int_{V_e} \frac{r(\xi)^{\nu_e-1-\varepsilon-\delta_e}}{|x-\xi|^{1+\nu_{e(x)}+\nu_{e(\xi)}-2\varepsilon}}\, ds_\xi , \tag{9.16}$$

где e — любое ребро, исходящее из вершины q. Если $e(x)\neq e$, то $|x-\xi|\sim\varrho_q(x)$ и поэтому выражение (9.16) не превосходит

$$c\varrho_q(x)^{\delta_e-1-2\nu_e+2\varepsilon} \int_V r(\xi)^{\nu_e-1-\varepsilon-\delta_e}\, ds_\xi \leqq c\varrho_q(x)^{-\nu_e+\varepsilon}.$$

Пусть $e(x) = e$. Тогда $|x - \xi| \geqq c(r(x) + r(\xi) - |x' - \xi'|)$, где x', ξ' — ближайшие к x, ξ точки ребра e. Отсюда следует, что (9.16) не больше, чем

$$c\varrho_q(x)^{\delta_e} \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{R_1} \frac{r^{\nu_e - 1 - \delta_e - \varepsilon}\, dz}{(r + r(x) + |z|)^{1 + 2\nu_e - 2\varepsilon}}$$

$$\leqq c\varrho_q(x)^{\delta_e} \int\limits_0^\infty \frac{r^{\nu_e - 1 - \delta_e - \varepsilon}\, dr}{(r + r(x))^{2\nu_e - 2\varepsilon}} = c\varrho_q(x)^{\delta_e}\, r(x)^{-\nu_e - \delta_e + \varepsilon}.$$

Поскольку $\nu_e > |\delta_e|$, то окончательно получаем, что (9.16) есть $O\big(\varrho_q(x)^{\delta_{e(x)}} \times r(x)^{-\nu_{e(x)} - \delta_{e(x)} + \varepsilon}\big)$. Значит,

$$|I_3| \leqq c\, \|\vec{\varphi}\|_{L^\infty_{\vec{\beta}, \vec{\delta}}(\partial\Omega)}\, \varrho_q(x)^{-\beta_q - \Sigma\delta_e} \left(\frac{r(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_{e(x)}}$$

$$\leqq c\, \|\vec{\varphi}\|_{L^\infty_{\vec{\beta}, \vec{\delta}}(\partial\Omega)}\, \varrho_q(x)^{-\beta_q - \Sigma\delta_e} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e}.$$

Таким образом,

$$\|I_3\|_{L^\infty_{\vec{\beta}, \vec{\delta}}(\Omega \cap U)} \leqq c\, \|\vec{\varphi}\|_{L^\infty_{\vec{\beta}, \vec{\delta}}(\partial\Omega)}. \tag{9.17}$$

Остается оценить интеграл I_4. Имеем в силу (9.10)

$$|I_4| \leqq c\, \|\vec{\varphi}\|_{L^\infty_{\vec{\beta}, \vec{\delta}}(\partial\Omega)}\, d(x) \int\limits_{E_4} |x - \xi|^{-3}\, \varrho_q(\xi)^{-\beta_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e(\xi)^{-\delta_e}\, ds_\xi. \tag{9.18}$$

Достаточно рассмотреть интеграл вида

$$\int\limits_{V_e \cap E_4} |x - \xi|^{-3}\, \varrho_q(\xi)^{-\beta_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e(\xi)^{-\delta_e}\, ds_\xi, \tag{9.19}$$

где e — любое ребро, исходящее из вершины q. Так как $\varrho_q(x) \sim \varrho_q(\xi)$, то (9.19) не превосходит

$$c\varrho_q(x)^{-\beta_q - \Sigma\delta_e} \int\limits_{V_e \cap E_4} |x - \xi|^{-3} \left(\frac{r(\xi)}{\varrho_q(\xi)}\right)^{-\delta_e} ds_\xi. \tag{9.20}$$

Очевидно, $\operatorname{diam}(V_e \cap E_4) \leqq c\varrho_q(x)$. Кроме того $|x - \xi| \sim \varrho_q(x)$ в случае $e(x) \neq e$, и поскольку $|\delta_e| < \nu_e < 1$, то выражение (9.20) не больше, чем $c\varrho_q(x)^{-\beta_q - \Sigma\delta_e - 1}$. Если же $e(x) = e$, то $2^{-1} r(\xi) \leqq r(x) \leqq 2r(\xi)$ и выражение (9.20) мажорируется величиной

$$c\varrho_q(x)^{-\beta_q - \Sigma\delta_e} \left(\frac{r(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e} \int\limits_{E_4} \frac{ds_\xi}{|x - \xi|^3}$$

$$\leqq c\varrho_q(x)^{-\beta_q - \Sigma\delta_e} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} \left(\frac{r_e(x)}{\varrho_q(x)}\right)^{-\delta_e} d(x)^{-1}.$$

Значит, (9.19) не превосходит

$$c\varrho_q(x)^{-\beta_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e(x)^{-\delta_e}\, d(x)^{-1}.$$

Отсюда и из (9.18) находим, что

$$\|I_4\|_{L^{\infty}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega\cap U)} \leqq c\,\|\varphi\|_{L^{\infty}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)}. \tag{9.21}$$

Складывая оценки (9.13), (9.14), (9.17) и (9.21), заканчиваем доказательство ∎

Частным случаем доказанной теоремы ($\beta_q = 0$, $\delta_e = 0$) является принцип максимума Миранда-Агмона для системы Стокса в области класса $\Lambda^{1,\alpha}$.

СЛЕДСТВИЕ 9.2: *Если $\vec{\varphi} \in L^\infty(\partial\Omega)$, то имеет место оценка*

$$\|\vec{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq c\,\|\vec{\varphi}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \tag{9.22}$$

Кроме того, если $\vec{\varphi} \in C(\partial\Omega)$, то $\vec{v} \in C(\bar{\Omega})$.

Последнее утверждение вытекает из (9.2) и непрерывности в $\bar{\Omega}$ вектора скорости $\boldsymbol{v}$, отвечающего гладким данным Дирихле (см. следствие 6.6).

§ 10. Система Навье-Стокса в ограниченной области

Следующее утверждение по существу известно (см. [1: гл. 5, § 5]).

ЛЕММА 10.1: *Пусть $(\vec{v}, p) \in W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — решение задачи*

$$-\nu\Delta\vec{v} + \nabla p + v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k} = \vec{f}, \tag{10.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = h \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{10.2}$$

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi}. \tag{10.3}$$

1. *Если Ω — область класса $\Lambda^m (m = 1, 2, \ldots)$ и*

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in W^{m-2}_{s,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}\setminus S) \times W^{m-1}_{s,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}\setminus S) \times W^{m-1/s}_{s,\mathrm{loc}}(\partial\Omega\setminus S),$$

$(1 < s < +\infty)$, *то* $(\vec{v}, p) \in W^m_{s,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \times W^{m-1}_{s,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}\setminus S)$.

2. *Если Ω — область класса $\Lambda^{m,\alpha} (m = 1, 2, \ldots; 0 < \alpha < 1)$ и*

$$(\boldsymbol{f}, h, \varphi) \in C^{m-2,\alpha}(\bar{\Omega}\setminus S) \times C^{m-1,\alpha}(\bar{\Omega}\setminus S) \times C^{m,\alpha}(\partial\Omega\setminus S),$$

то

$$(\boldsymbol{v}, p) \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}\setminus S) \times C^{m-1,\alpha}(\bar{\Omega}\setminus S).$$

Приведем несколько теорем о зависимости свойств обобщенного решения задачи (10.1)—(10.3) от свойств границы и функций $\vec{f}$; h, $\vec{\varphi}$.

ТЕОРЕМА 10.2: *Пусть $(\vec{v}, p) \in W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — решение задачи* (10.1)—(10.3). *Если Ω — областъ класса Λ^1 и*

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1-1/s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega),$$

где показатели s, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ подчинены неравенствам

$$|\delta_e - 1 + 2/s| < \inf_{\zeta\in e}\sigma_e(\zeta), \tag{10.4}$$

$$-\min\{|\operatorname{Im}\lambda_q|, 1\} < \beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}}\delta_e - 1 + 3/s < 1, \tag{10.5}$$

то

$$(\vec{v}, p) \in V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega).$$

Доказательство: 1. *Случай* $s < 6$. Пусть η, ζ — гладкие функции в $\bar{\Omega}$, равные единице вблизи множества S и нулю вне малой окрестности S, $\eta\zeta = \eta$. Имеем

$$-\nu\Delta(\eta\vec{v}) + \nabla(\eta p) + \eta\frac{\partial(v_k, \vec{v})}{\partial x_k} - h\eta v = \vec{f}_1, \tag{10.6}$$

$$\operatorname{div}(\eta\vec{v}) = h_1 \quad \text{в } \Omega, \tag{10.7}$$

$$\eta\vec{v}|_{\partial\Omega} = \varphi_1. \tag{10.8}$$

Здесь новая правая часть $(\vec{f}_1, h_1, \vec{\varphi}_1)$ принадлежит тому же классу, что и $(\vec{f}, h, \vec{\varphi})$ (по лемме 9.1). Заметим, что

$$\eta\frac{\partial(v_k\vec{v})}{\partial x_k} - \frac{\partial(v_k\eta\vec{v})}{\partial x_k} = -v_k\vec{v}\frac{\partial\eta}{\partial x_k} \in L^3(\Omega),$$

и так как $L^3(\Omega) \subset W_s^{-1}(\Omega)$ при любом $s < \infty$, то равенство (10.6) переписывается в виде

$$-\nu\Delta(\eta\vec{v}) + \nabla(\eta p) + \frac{\partial}{\partial x_k}(a_k\eta\vec{v}) - h\eta\vec{v} = \vec{f}_2, \tag{10.9}$$

где вектор-функция $\vec{f}_2$ принадлежит классу $V^{-1,s}_{\beta,\delta}(\Omega)$, а коэффициенты $a_k = \zeta v_k$ — пространству $W_2^1(\Omega)$. Таким образом, вектор-функция $(\vec{u}, q) = (\eta\vec{v}, \eta p)$ удовлетворяет линейной краевой задаче

$$A(\vec{u}, q) + B(\vec{u}, q) + C(\vec{u}, q) = (\vec{f}_2, h_1, \vec{\varphi}_1), \tag{10.10}$$

где A — оператор задачи Стокса,

$$B(\vec{u}, q) = \left\{\frac{\partial(a_k\vec{u})}{\partial x_k}, 0, 0\right\}, \quad C(\vec{u}, q) = \{-h\vec{u}, 0, 0\}.$$

Так как $s < 6$, то

$$\left\|\frac{\partial(a_k\vec{u})}{\partial x_k}\right\|_{V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leq c\sum_{k=1}^{3}\|a_k\vec{u}\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} = c\sum_{k=1}^{3}\|a_k\vec{u}w\|_{L^s(\Omega)}, \tag{10.11}$$

где w — весовая функция, эквивалентная $\prod_{q\in\mathcal{P}}\varrho^{\beta_q}\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}}r_e^{\delta_e}$ вблизи множества S особенностей границы. Следовательно,

$$\left\|\frac{\partial(a_k\vec{u})}{\partial x_k}\right\|_{V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leq c\sum_{k=1}^{3}\|a_k\|_{L^6(\Omega)}\|\vec{u}w\|_{L^{\frac{6s}{6-s}}(\Omega)}. \tag{10.12}$$

Согласно теореме С. Л. Соболева, $W_s^1(\Omega) \subset L^t(\Omega)$, где $t = 3s/(3-s)$ при $s < 3$, $t = \infty$ при $s > 3$ и t — любое число из $(1, \infty)$ при $s = 3$. Поэтому правая часть неравенства (10.12) не превосходит

$$c\sum_{k=1}^{3}\|a_k\|_{L^6(\Omega)}\|\vec{u}\|_{V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}.$$

Рассмотрим оператор C. Имеем при $s < 6$

$$\|h\vec{u}\|_{V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c\,\|h\vec{u}\|_{V^{0,\tau}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq \|h\|^{L^3(\Omega)}\,\|\vec{u}\|_{L^{0,\frac{6s}{6-s}}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)},$$

где $\tau = 3s/(3+s)$. Следовательно,

$$\|h\vec{u}\|_{V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c\,\|h\|_{L^3(\Omega)}\,\|\vec{u}\|_{V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}.$$

Итак, при $s < 6$ операторы

$$B, C\colon V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \to V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$$

непрерывны и, вследствие малости носителей функций a_k и h, имеют малые нормы. В частности, то же верно и при $s = 2$, $\vec{\beta} = 0$, $\vec{\delta} = 0$. Согласно теореме 6.1, операторы задачи Стокса, определенные на $W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и на $V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$, имеют непрерывные обратные, которые совпадают на пересечении своих областей определения

$$V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega) \text{ и } W_2^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega).$$

Поэтому из (10.10) и малости норм операторов B и C следует утверждение теоремы при $s < 6$.

2. *Случай* $s \geqq 6$. При помощи неравенства Гельдера проверяется, что

$$V^{k,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \subset V^{k,6-\varepsilon}_{\vec{\beta}-\vec{\mu},\vec{\delta}-\vec{\nu}}(\Omega),$$

где ε — малое положительное число, а компоненты векторов $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ подчинены неравенствам

$$\nu_e < (s-6)/3s, \qquad \mu_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \nu_e < (s-6)/2s. \tag{10.13}$$

Будем считать, что левые части неравенств близки к своим верхним границам. При этом условии показатели $m = 1$, $s = 6 - \varepsilon$, $\vec{\beta} - \vec{\mu}$, $\vec{\delta} - \vec{\nu}$ удовлетворяют неравенствам (10.4), (10.5). Согласно п. 1 доказательства, решение $(\vec{v}, q)$ принадлежит пространству

$$V^{1,6-\varepsilon}_{\vec{\beta}-\vec{\mu},\,\vec{\delta}-\vec{\nu}}(\Omega) \times V^{0,6-\varepsilon}_{\vec{\beta}-\vec{\mu},\,\vec{\delta}-\vec{\nu}}(\Omega).$$

В силу неравенства Гельдера

$$\|\vec{u}\|_{V^{1,3+\varepsilon_0}_{\vec{\sigma},\vec{\tau}}(\Omega)} \leqq \|\vec{u}\|^{\varkappa}_{V^{1,2}_{\vec{0},\vec{0}}}\,\|\vec{u}\|^{1-\varkappa}_{V^{1,6-\varepsilon}_{\vec{\beta}-\vec{\mu},\,\vec{\delta}-\vec{\nu}}(\Omega)},$$

где $0 < \varepsilon_0 < 3 - \varepsilon$, $\varkappa = 2(3 - \varepsilon_0 - \varepsilon)/(4 - \varepsilon)(3 + \varepsilon_0)$, $\tau_e = (6 - \varepsilon)(\delta_e - \nu_e) \times (1 + \varepsilon_0)/(3 + \varepsilon_0)(4 - \varepsilon)$ и

$$\sigma_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \tau_e = (6-\varepsilon)\Big(\beta_q - \mu_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} (\delta_e - \nu_e)\Big)\Big/(3+\varepsilon_0)(4-\varepsilon).$$

По теореме С. Л. Соболева, функции a_k, введенные в 1.1, принадлежат пространству $V^{0,\infty}_{\vec{\sigma},\vec{\tau}}(\Omega)$.

Заметим теперь, что вектор-функция $(\vec{u}, g)$ удовлетворяет линейной краевой задаче

$$A(\vec{u}, q) + D(\vec{u}, q) = (\vec{f}_3, h_1, \vec{\varphi}_1), \tag{10.14}$$

где $D(\vec{u}, q) = \left\{a_k \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x_k}, 0, 0\right\}$, а $\vec{f}_3 \in V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ (ср. с п. 1 доказательства). Оценим норму оператора

$$D\colon V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \to V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega).$$

Имеем

$$\left\| a_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \right\|_{V^{-1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c \left\| r a_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \right\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}$$

$$\leqq c \sum_{k=1}^{3} \|r a_k\|_{L^\infty(\Omega)} \|\vec{u}\|_{V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}. \tag{10.15}$$

Очевидно,

$$|a_k r| \leqq c\, |a_k| \prod_{q \in \mathscr{P}} \varrho_q^{\sigma_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{\tau_e} \prod_{q \in \mathscr{P}} \varrho_q^{-\sigma_q + 1} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{-\tau_e} \frac{r_e}{\varrho_q}. \tag{10.16}$$

Учитывая ограничения (10.4), (10.5), которым подчинены показатели $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$, а также требования к показателям μ_q и ν_e, получаем неравенства

$$-\sigma_q + 1 - \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \tau_e > 0, \qquad -\tau_e + 1 > 0.$$

Так как носители функций a_k расположены вблизи множества S и $a_k \in V^{0,\infty}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$, то из (10.15) и (10.16) вытекает малость нормы оператора D. Теперь, как и в п. 1, при помощи теоремы 6.1 получаем утверждение теоремы при $s \geqq 6$ ∎

ТЕОРЕМА 10.3: *Пусть* $(\vec{v}, p) \in W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — *решение задачи* (9.1)—(9.3). *Если* Ω — *область класса* Λ^2 *и*

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{2-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega),$$

где показатели s, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ *подчинены неравенствам*

$$|\delta_e - 2 + 2/s| < \inf_{\zeta \in e} \sigma_e(\zeta), \tag{10.17}$$

$$\left|\beta_q + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \delta_e - 2 + 3/s\right| < 1/2 + \min\{|\mathrm{Im}\, \lambda_q|, 1\}, \tag{10.18}$$

то

$$(\vec{v}, p) \in V^{2,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega).$$

Доказательство: 1. *Случай* $s < 3$. Заметим прежде всего, что вектор-функция $(\vec{u}, q)$ удовлетворяет краевой задаче (10.14), где

$$\vec{f}_3 \in V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega), \qquad h_1 \in V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega), \qquad \vec{\varphi}_1 \in V^{2-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega). \tag{10.19}$$

Достаточно, как и в п. 2 доказательства теоремы 10.2, убедиться в малости нормы оператора

$$D\colon V^{2,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \to V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{1,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times V^{2-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega).$$

В силу неравенства Гельдера

$$\left\| a_k \frac{\partial \vec{w}}{\partial x_k} \right\|_{V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq \sum_{k=1}^{3} \|a_k\|_{L^6(\Omega)} \|\vec{w}\|_{V^{1,6s/(6-s)}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}.$$

Так как $3s/(3-s) > 6s/(6-s)$, то последняя норма не превосходит $c\,\|\vec{w}\|_{V^{1,3s/(3-s)}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}$. Применяя теорему С. Л. Соболева о вложении W_s^2 в $W^1_{3s/(3-s)}$, получаем неравенство

$$\|\vec{w}\|_{V^{1,3s/(3-s)}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c\,\|\vec{w}\|_{V^{2,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}.$$

Следовательно, норма оператора D не превосходит $c\sum_{k=1}^{3}\|a_k\|_{L^s(\Omega)}$, и она мала в силу того, что функции a_k сосредоточены вблизи множества S.

2. *Случай* $s \geqq 3$. Из неравенства Гельдера вытекает, что

$$V^{0,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \subset V^{0,3-\varepsilon}_{\overrightarrow{\beta-\mu},\overrightarrow{\delta-\nu}}(\Omega),$$

где показатели подчинены неравенствам

$$\nu_e < 2(s-3)/3s, \qquad \mu_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}}\nu_e < (s-3)/s. \tag{10.20}$$

Будем считать, что левые части этих неравенств близки к своим верхним границам. Показатели $m=2$, $s=3-\varepsilon$, $\overrightarrow{\beta-\mu}$, $\overrightarrow{\delta-\nu}$ удовлетворяют условиям (10.17), (10.18). Согласно п. 1 доказательства, вектор-функция $(\vec{u}, q)$, определенная в доказательстве теоремы 10.2, принадлежит пространству $V^{2,3-\varepsilon}_{\overrightarrow{\beta-\mu},\overrightarrow{\delta-\nu}}(\Omega)\times V^{1,3-\varepsilon}_{\overrightarrow{\beta-\mu},\overrightarrow{\delta-\nu}}(\Omega)$. По теореме С. Л. Соболева $\vec{u} \in V^{1,3(3-\varepsilon)/\varepsilon}_{\overrightarrow{\beta-\mu},\overrightarrow{\delta-\nu}}(\Omega)$. В силу неравенства Гельдера для любых показателей $\vec{\chi}$, $\vec{\tau}$ имеем

$$\|\vec{u}\|_{V^{1,3+3\varepsilon}_{\vec{\chi},\vec{\tau}}(\Omega)} \leqq \|\vec{u}\|^{\alpha}_{V^{1,3(3-\varepsilon)/\varepsilon}_{\overrightarrow{\beta-\mu},\overrightarrow{\delta-\nu}}(\Omega)}\,\|\vec{u}\|^{1-\alpha}_{V^{1,2}_{\vec{\xi},\vec{\eta}}(\Omega)},$$

где $\vec{\xi} = [\vec{\chi} - \alpha(\overrightarrow{\beta-\mu})]/(1-\alpha)$, $\vec{\eta} = [\vec{\tau} - \alpha(\vec{\delta}-\vec{\nu})]/(1-\alpha)$,

$$\alpha = \frac{(3-\varepsilon)(1+3\varepsilon)}{(9-5\varepsilon)(1+\varepsilon)}, \qquad 1-\alpha = \frac{2(1-\varepsilon)(3+\varepsilon)}{(9-5\varepsilon)(1+\varepsilon)}.$$

Положим $\vec{\xi} = \alpha(\overrightarrow{\beta-\mu})$, $\vec{\tau} = \alpha(\overrightarrow{\delta-\nu})$. Тогда правая часть неравенства (10.19) конечна и, по теореме С. Л. Соболева,

$$\prod_{q\in\mathscr{P}}\varrho^{\chi_q}\prod_{\{e:q\in\bar{e}\}}r_e^{\tau_e}u \in L^\infty(\Omega).$$

Заметим, что согласно ограничениям (10.17), (10.18), (10.20) справедливы неравенства

$$\chi_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}}\tau_e = \alpha[\beta_q + \sum\delta_e - \mu_q - \sum\nu_e] < 1;$$

$$\tau_e = \alpha(\delta_e - \nu_e) < 1.$$

Следовательно, нормы $\|ra_k\|_{L^\infty(\Omega)}$ $(k=1,2,3)$ можно считать достаточно малыми. Поэтому норма оператора (10.19) также является малой. Теорема доказана ∎

ТЕОРЕМА 10.4: *Пусть* Ω — *область класса* $\Lambda^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$, *и* $(\vec{v}, p) \in W_2^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ — *решение задачи* (10.1)—(10.3). *Если*

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in N^{-1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)\times N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)\times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega),$$

где показатели α, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ подчинены неравенствам

$$|\delta_e - 1 - \alpha| < \inf_{\zeta\in e} \sigma_e(\zeta), \tag{10.21}$$

$$-\min\{|\operatorname{Im}\lambda_q|, 1\} < \beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \delta_e - 1 - \alpha < 1, \tag{10.22}$$

то $(\vec{v}, p) \in N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$.

Доказательство: Ясно, что при всех $s \in (1, \infty)$

$$(\vec{f}, h,)\vec{\varphi} \in V^{-1,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}),\overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1})}(\Omega) \times V^{1-1/s,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}),\overrightarrow{\delta-\alpha}}(\partial\Omega),$$

где $\overrightarrow{T-1}$ — вектор с компонентами $\{T_q - 1\}_{q\in\mathscr{P}}$, T_q — число ребер, сходящихся в вершине q, а $\overrightarrow{\delta-\alpha}$ — вектор с компонентами $\{\delta_e - \alpha\}$. Из (10.21), (10.22) следует, что при больших s выполняются условия (10.4), (10.5), в которых показатели $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ следует заменить на $\vec{\beta} + \alpha(\overrightarrow{T-1})$, $\overrightarrow{\delta-\alpha}$. Значит, по теореме 10.2

$$(\vec{v}, p) \in V^{1,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}),\overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega) \times V^{0,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}),\overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega).$$

Так как $W_s^1(\Omega) \subset C^{0,1-3/s}(\bar{\Omega})$ (при больших s), то

$$V^{1,s}_{\vec{0},\vec{0}}(\Omega) \subset N^{0,1-3/s}_{\vec{0},\vec{0}}(\Omega) \subset N^{0,\alpha}_{\vec{\xi},\vec{\eta}}(\Omega),$$

где $\vec{\xi} = \overrightarrow{(1-T)}(\alpha - 1 + 3/s)$, $\vec{\eta} = \overrightarrow{\alpha - 1 + 3/s}$. Поэтому

$$\vec{v} \in N^{0,\alpha}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1})+\vec{\xi},\overrightarrow{\delta-\alpha}+\vec{\eta}}(\Omega) = N^{0,\alpha}_{\vec{\beta}+(\overrightarrow{T-1})(1-3/s),\overrightarrow{\delta-1+3/s}}(\Omega).$$

Заметим теперь, что элементы последнего пространства получаются в результате умножения элементов пространства $N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec{\alpha}}(\Omega)$ на функцию $\prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q^{-\zeta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\tau_e}$, где $\tau_e = \delta_e - 1 - \alpha + 3/s$, $\zeta_q = \beta_q + (T_q - 1)(\alpha + 1 - 3/s)$.

Рассмотрим оператор D, определенный в доказательстве теоремы 10.3. Требуется доказать, что норма отображения

$$D: N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \to N^{-1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$$

мала (ср. с доказательством теоремы 10.3). Имеем

$$a_k \left\| \frac{\partial\vec{w}}{\partial x_k} \right\|_{N^{-1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leqq c \left\| r a_k \frac{\partial\vec{w}}{\partial x_k} \right\|_{N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}. \tag{10.23}$$

Примем во внимание, что $a_k = \zeta v_k$, где ζ — функция, отличная от нуля лишь вблизи множества S. Так как $N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec{\alpha}}(\Omega)$ — пространство мультипликаторов для шкалы $N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ (ср. [4]), то правая часть (10.23) не превосходит

$$c \left\| \zeta r \prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q^{-\zeta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{-\tau_e} \right\|_{N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec{\alpha}}(\Omega)}$$

$$\times \left\| \vec{v} \prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q^{\zeta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{\tau_e} \right\|_{N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec{\alpha}}(\Omega)} \|\vec{w}\|_{N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)}$$

Средная норма конечна в силу выбора показателей ζ_q и τ_e. Малость первой нормы вытекает из неравенств $1 - \tau_e > 0$, $1 - \zeta_q - \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \tau_e > 0$, которые, в свою очередь, следуют из условий (10.21), (10.22). Теорема доказана ∎

ТЕОРЕМА 10.5: *Пусть Ω — область класса $\Lambda^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и $(\vec{v}, p) \in W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — решение задачи* (10.1)—(10.3). *Если*

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{2,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega),$$

где показатели α, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ подчинены неравенствам

$$|\delta_e - 2 - \alpha| < \inf_{\zeta \in e} \sigma(\zeta), \tag{10.24}$$

$$\Big|\beta_q + \sum_{e: q \in \bar{e}} \delta_e - 2 - \alpha\Big| < 1/2 + \min\{|\mathrm{Im}\,\lambda_q|, 1\}, \tag{10.25}$$

то $(\vec{v}, p) \in N^{2,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$.

Доказательство: При всех $s \in (1, \infty)$

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in V^{0,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}), \overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega) \times V^{1,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}), \overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega) \times V^{2-1/s,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}), \overrightarrow{\delta-\alpha}}(\partial\Omega),$$

где использованы те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 10.4. Из (10.24), (10.25) следует, что при больших s выполняются условия (10.17), (10.18), в которых показатели $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ заменены показателями $\vec{\beta} + \alpha(\overrightarrow{T-1})$, $\overrightarrow{\delta - \alpha}$. По теореме 10.3

$$(\vec{v}, p) \in V^{2,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}), \overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega) \times V^{1,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}), \overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega),$$

и то же верно для вектор-функции $(\vec{u}, q)$, определенной в доказательстве теоремы 10.2.

Пусть $x \in \Omega$ и, как и в § 7, $\Omega(x)$ — пересечение области Ω и шара с центром в точке x и радиусом $r(x)/2$. Частным случаем интерполяционных неравенств Гальярдо-Ниренберга [5, 6] является оценка

$$\|\Phi\|_{L^\infty(G)} \leqq c\, \|\Phi\|^{\sigma}_{W_s^1(G)} \|\Phi\|^{1-\sigma}_{L^2(G)},$$

где $s > 3$, $\sigma = s/3(s-2)$, а G — ограниченная область с липшицевой границей. Поэтому

$$\|\Phi\|_{L^\infty(\Omega(x))} \leqq c(\|\nabla\Phi\|_{L^s(\Omega(x))} + \|r^{-1}\Phi\|_{L^s(\Omega(x))})^{\sigma}\, \|\Phi\|^{1-\sigma}_{L^2(\Omega(x))}.$$

Отсюда получаем

$$\Big\|\prod_{q \in \mathscr{P}} \varrho_q^{\mu_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{\nu_e} \Phi\Big\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq c\, \|\Phi\|^{\sigma}_{V^{1,s}_{\vec{\beta}+\alpha(\overrightarrow{T-1}), \overrightarrow{\delta-\alpha}}(\Omega)} \|\Phi\|^{1-\sigma}_{L^2(\Omega)},$$

где

$$\mu_q = [\beta_q + \alpha(T-1)]\, s/3(s-2), \qquad \nu_e = (\delta_e - \alpha)\, s/3(s-2). \tag{10.26}$$

Полагая здесь $\Phi = \partial v_k/\partial x_j$ или $\Phi = v_k/r$, получим

$$\Big\|\prod_{q \in \mathscr{P}} \varrho_q^{\mu_q} \prod_{\{e: q \in \bar{e}\}} r_e^{\nu_e} (|\nabla v| + |v|\, r^{-1})\Big\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Следовательно, $\vec{v} \in N^{0,\alpha}_{\vec{\mu}+(\alpha-1)(\overrightarrow{1-T}), \vec{\nu}+\overrightarrow{\alpha-1}}(\Omega)$.

Аналогично доказательствам теорем 10.3, 10.4, требуется показать, что норма отображения

$$D: N^{2,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \to N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{2,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$$

мала. Имеем

$$\left\| a_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \right\|_{N^{0,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)} \leqq c \, \|ra_k\|_{N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec\alpha}(\Omega)} \left\| r \frac{\partial w}{\partial x_k} \right\|_{N^{0,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)}$$

$$\leqq c \, \|ra_k\|_{N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec\alpha}(\Omega)} \|w\|_{N^{2,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)}$$

При этом

$$\|ra_k\|_{N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec\alpha}(\Omega)}$$

$$\leqq c \left\| r\zeta \prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q^{(1-T)\alpha} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e^{\alpha} \times \prod_{q\in\mathscr{P}}' \varrho_q^{-\mu_q-(\alpha-1)(1-T)} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e^{-\nu_e-\alpha+1} v \right\|_{N^{0,\alpha}_{\vec\mu+(\alpha-1)\overrightarrow{(1-T)},\vec\nu+\overrightarrow{\alpha-1}}(\Omega)}$$

$$\leqq c \left\| \zeta r^2 \prod_{q\in\mathscr{P}} \varrho_q^{-\mu_q} \prod_{\{e:q\in\bar e\}} r_e^{-\nu_e} \right\|_{N^{0,\alpha}_{\overrightarrow{(1-T)\alpha},\vec\alpha}(\Omega)} \|v\|_{N^{0,\alpha}_{\vec\mu+(\alpha-1)\overrightarrow{(1-T)},\vec\nu+\overrightarrow{\alpha-1}}(\Omega)}.$$

Последняя норма, как уже отмечалось, конечна; она умножается на норму, которая мала вследствие неравенств $2 - \mu_q - \sum\limits_{\{e:q\in\bar e\}} \nu_e > 0$, $2 - \nu_e > 0$ (см. (10.24) до (10.26)). Теорема доказана ∎

ЗАМЕЧАНИЕ 10.6: В силу теоремы 2.3 утверждения теорем 10.2—10.5 останутся справедливыми, если в формулировках заменить $\min\{|\mathrm{Im}\,\lambda_q|, 1\}$ на $\Lambda_q(\Lambda_q + 9)^{-1}$, где Λ_q — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами в области G_q (ср. со следствием 6.3).

Из теорем 10.2—10.5 и 2.3 можно получить проще формулируемые свойства решений нелинейной задачи (9.1)—(9.3). Например, имеет место аналогичное следствию 6.6

СЛЕДСТВИЕ 10.7: *Если $\Omega \in \Lambda^{1,\alpha}$ и $\vec f, h, \vec\varphi$ — гладкие функции в $\bar\Omega$, то вектор скорости принадлежит пространству $C^\alpha(\bar\Omega)$; здесь показатель α подчинен неравенству* (6.10). *Кроме того*, $\mathrm{grad}\,\vec v = O(r^{\alpha-1})$, $p = O(r^{\alpha-1})$.

Если $\Omega \in \Lambda^{2,\alpha}$, то $\mathrm{grad}_2\, \vec v = O(r^{\alpha-2})$, $\mathrm{grad}\, p = O(r^{\alpha-2})$.

В заключение параграфа докажем теорему о непрерывности вектора скорости в $\bar\Omega$.

ТЕОРЕМА 10.8: *Пусть $\Omega \in \Lambda^{1,\alpha}$ и $(\vec v, p) \in W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — решение задачи*

$$-\nu\Delta\vec v + \nabla p + v_k \frac{\partial \vec v}{\partial x_k} = 0, \tag{10.27}$$

$$\operatorname{div} \vec v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{10.28}$$

$$\vec v|_{\partial\Omega} = \vec\varphi. \tag{10.29}$$

Если $\vec\varphi \in C(\partial\Omega)$, то $\vec v \in C(\bar\Omega)$.

Доказательство: Представим решение $(\vec v, p)$ в виде суммы $(\vec v^{(0)}, p^{(0)}) + (\vec v^{(1)}, p^{(1)})$ где $(v^{(0)}, p^{(0)})$ — решение линейной задачи (6.1) при $\vec f = 0$, $\vec h = 0$, а $(\vec v^{(1)}, p^{(1)})$ — решение той же задачи при $\vec f = -\partial(v_k\vec v)/\partial x_k$, $\vec h = 0$, $\vec\varphi = 0$.

В силу следствия 10.2, $\vec v^{(0)} \in C(\bar\Omega)$. Так как $v_k\vec v \in L^3(\Omega)$, то, по теореме 6.1, $\vec v^{(1)} \in V^{1,3}_{\vec\sigma,\vec\tau}(\Omega)$ при $\tau_e = 3^{-1} - \nu_e + \varepsilon$, $\sigma_q + \sum\limits_{\{e:q\in\bar e\}} \tau_e = -\mu_q + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. По теореме С. Л. Соболева $\vec v^{(1)} \in V^{0,t}_{\vec\sigma,\vec\tau}(\Omega)$ при любом

$t < \infty$. Поэтому $\vec{v} = \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)} \in V^{0,t}_{0,0}(\Omega)$ и значит $v_k\vec{v} \in V^{0,t}_{0,0}(\Omega)$ при любом $t < \infty$. Отсюда находим, что $v_k\vec{v} \in V^{0,3+\varepsilon}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$, где $\delta_e > -2/3$, $\beta_q + \sum \delta_e > -1$. Если числа δ_e и β_q отрицательны и достаточно малы по абсолютной величине, то выполнены условия (6.2) и (6.3) при $m = 1$, $s = 3 + \varepsilon$. Применяя теорему 6.1 к краевой задаче для $(\vec{v}^{(1)}, p^{(1)})$, получаем, что $\vec{v}^{(1)} \in V^{1,3+\varepsilon}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$. Так как $W^1_{3+\varepsilon}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ то $\vec{v}^{(1)} \in C(\bar{\Omega})$. Остается вспомнить, что и $\vec{v}^{(0)} \in C(\bar{\Omega})$. Теорема доказана ∎

§ 11. Первая краевая задача для уравнений Ламе

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta\vec{v} + \gamma \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = \vec{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11.1}$$

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi}, \tag{11.2}$$

где $\vec{v}$ — вектор упругих смещений, $\gamma = (2\sigma - 1)^{-1}$, σ — постоянная Пуассона упругой среды, $\vec{f}$ — вектор объемных сил. Известно (см. [7]), что при $\gamma < 1$ система (11.1) является сильно эллиптической и задача (11.1), (11.2) имеет единственное решение $\vec{v} \in W_2{}^1(\Omega)$ для любых $\vec{f} \in [\mathring{W}_2{}^1(\Omega)]^*$, $\vec{\varphi} \in W_2{}^{1/2}(\partial\Omega)$. При локальном улучшении свойств границы и вектор-функций $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$ соответственно улучшаются локальные свойства решений (см. например, [7]). Все результаты для системы Стокса и доказательства, приведенные в предыдущих параграфах, переносятся с очевидными изменениями и на систему (11.1). Поэтому здесь мы ограничимся конспективным изложением.

1. Система Ламе в конусе с ребрами (ср. с § 2). Пусть K — конус класса Λ^1, вершина которого совпадает с началом координат O, $K = \mathbf{R}_+{}^1 \times G$, $G \subset S^2$. Рассмотрим задачу

$$-\Delta\vec{v} + \gamma \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = \vec{f} \quad \text{в} \quad K, \qquad \vec{v}|_{\partial K} = 0. \tag{11.3}$$

Перепишем систему Ламе в виде

$$-\left(\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)^2 + \varrho\frac{\partial}{\partial\varrho} + \delta\right)\vec{v} + \gamma\left(\vec{\omega}\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho} - \vec{\omega} + \vec{\sigma}\right)\left(\vec{\omega}\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho} + \vec{\sigma}\right)\vec{v} = \varrho^2\vec{f} \quad \text{в} \quad K.$$

После применения преобразования Меллина, получаем краевую задачу с параметром λ

$$-(i\lambda - \lambda^2 + \delta)\,\tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot) + \gamma(\vec{\omega}i\lambda - \vec{\omega} + \vec{\sigma})\,(\vec{\omega}i\lambda + \vec{\sigma})\,\tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot)$$
$$= \tilde{\vec{f}}(\lambda + 2i, \cdot) \quad \text{в} \quad G, \qquad \tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot)|_{\partial G} = 0, \tag{11.4}$$

которая играет ту же роль, что и задача (2.3) в случае системы Стокса. Дословно повторяя соответствующее рассуждение из § 2, получаем, что однозначная разрешимость задачи (11.1), (11.2) в пространстве $\mathring{V}^{1,2}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(K)$ вытекает из существования единственного решения задачи (11.4) при $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum_{e\in\mathscr{E}} \delta_e + 1/2$, допускающего оценку

$$\|\tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot)\|_{V^1_{2,\vec{\delta}}(G)} \leq c\,\|\tilde{\vec{f}}(\lambda + 2i, \cdot)\|_{V^{-1}_{2,\vec{\delta}}(G)}.$$

Вместо неравенства (2.4), которое было введено в § 2, здесь следует потребовать, чтобы числа δ_e удовлетворяли неравенству

$$|\delta_e| < \sigma_e(\theta_e, \gamma), \tag{11.5}$$

где $\sigma_e(\theta_e, \gamma)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(\theta_e\sigma_e) + \sigma_e |\gamma(\gamma - 2)^{-1}| \sin\theta_e = 0.$$

Можно показать (ср. [8]), что $\sigma_e(\gamma, \theta)$ убывает от 1 до 1/2 на интеграле $\alpha \leqq \theta \leqq 2\pi$ и от $+\infty$ до 1 на $(0, \pi]$, $\lim\limits_{\theta\to 0} \theta\sigma_e(\theta, \gamma) = c(\gamma)$, где $c(\gamma)$ — корень уравнения $\sin c + c|\gamma(\gamma - 2)^{-1}| = 0$, $c \in (0, \pi)$. При $\theta \in (0, 2\pi)$ функция $\gamma \to \sigma_e(\theta, \gamma)$ убывает с ростом $|\gamma|$.

Условие (11.5) необходимо и достаточно для того чтобы оператор $\mathfrak{A}(\lambda)$ задачи (11.4) имел непрерывный обратный $V^{-1}_{2,\vec{\delta}}(G) \to V^1_{2,\vec{\delta}}(G)$.

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2.1.

ТЕОРЕМА 11.1: *Пусть K — конус из класса Λ^1, вектор $\vec{\delta}$ подчинен условию (11.5) и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$ нет полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Тогда справедливы следующие урверждения:*

1. *Оператор краевой задачи* (11.3) *осуществляет изоморфизм*

$$\mathring{V}^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \to V^{-1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K);$$

2. *Пусть правая часть задачи* (11.3) *принадлежит пересечению $V^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \cap V^{-1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$, где β' и $\vec{\delta}'$ — число и вектор, удовлетворяющие таким же условиям, что β и $\vec{\delta}$, а полоса между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e' + 1/2$ свободна от полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Тогда решение $\vec{v} \in \mathring{V}^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ принадлежит пространству $\mathring{V}^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$.*

Лемма 2.2 остается в силе и для оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$ задачи (11.4).

В работе [9] доказана

ТЕОРЕМА 11.2 (ср. с теоремой 2.3): *Пусть $M(M + 1)$ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами $-\delta$ в области $G \subset S^2$, $M > 0$. В полосе*

$$|\operatorname{Im}\lambda - 1/2| \leqq 1/2 + \mu, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{(2 + \gamma)M}{2 + \gamma(M + 4)},$$

нет полюсов оператор-функции $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

Все сказанное в § 3 о задаче Стокса в двугранном угле с очевидными изменениями можно отнести и к системе Ламе.

Аналогом теоремы 4.4 является

ТЕОРЕМА 11.3: *Пусть K — конус класса Λ^m, $s \in (1, \infty)$, вектор $\vec{\varphi}$ подчинен условию $|\delta_e - m + 2/s| < \sigma_e(\gamma)$ для всех $e \in \mathscr{E}$ и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$ нет полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор краевой задачи*

$$-\Delta\vec{v} + \gamma \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} = \vec{f} \ \text{ в } K, \qquad \vec{v}|_{\partial K} = \vec{\varphi}, \tag{11.6}$$

осуществляет изоморфизм

$$V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \to V^{m-2,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{m-1/s,s}_{\beta,\vec{\delta}}(\partial K).$$

2. *Пусть K — конус класса $\Lambda^{\max(m,m')}$,*

$$\vec f \in V^{m'-2,s'}_{\beta',\vec\delta'}(K) \cap V^{m-2,s}_{\beta,\vec\delta}(K),$$

$$\vec\varphi \in V^{m'-1/s',s'}_{\beta',\vec\delta'}(\partial K) \cap V^{m-1/s,s}_{\beta,\vec\delta}(\partial K),$$

где m', s', β', $\vec\delta'$ удовлетворяют таким же условиям, что и m, s, β, $\vec\delta$, а замкнутая полоса между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e' - m' + 3/s'$ свободна от полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Тогда решение $\vec v \in V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$ принадлежит и пространству $V^{m',s'}_{\beta',\vec\delta'}(K)$.

Формулировка соответствующей теоремы о задаче (11.3) в весовых классах Гельдера получается из формулировки теоремы 5.1 заменой σ_e на $\sigma_e(\gamma)$, $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec\delta}(K)$ на $N^{m,\alpha}_{\beta,\vec\delta}(K)$ и $\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec\delta}(K)$ на $N^{m-2,\alpha}_{\beta,\vec\delta}(K) \times N^{m,\alpha}_{\beta,\vec\delta}(\partial K)$.

2. Система Ламе в ограниченной области. Пусть Ω — ограниченная область класса Λ^1, $\sigma_e(\zeta,\gamma)$ — тот из корней уравнения

$$\sin\big(\sigma_e(\zeta,\gamma)\,\theta_e(\zeta)\big) + |\gamma(\gamma-2)^{-1}|\,\sigma_e(\zeta,\gamma)\sin\theta_e(\zeta) = 0,$$

который имеет наименьшую положительную вещественную часть (здесь ζ — произвольная точка ребра e). Обозначим через $\mathfrak{A}_q(\lambda)$ оператор краевой задачи (11.4), отвечающей конической точке q и через λ_q — собственное число оператор-функции $\mathfrak{A}_q(\lambda)$ с наименьшей по абсолютной величине отрицательной мнимой частью.

Следующие утверждения аналогичны теоремам 6.1 и 6.2.

ТЕОРЕМА 11.4: *Пусть Ω — ограниченная область класса Λ^m ($m = 1, 2, \ldots$, $1 < s < \infty$) и числа β_q, δ_e подчинены неравенствам*

$$|\delta_e - m + 2/s| < \nu_e(\gamma), \tag{11.7}$$

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar e\}} \delta_e - m + 3/s - 1/2\Big| < 1/2 + \mu_q(\gamma), \tag{11.8}$$

где

$$\nu_e(\gamma) = \inf_{\zeta\in e} \operatorname{Re}\sigma_e(\zeta,\gamma), \qquad \mu_q(\gamma) = |\operatorname{Im}\lambda_q|. \tag{11.9}$$

Тогда:

1. *Задача* (11.1), (11.2) *однозначно разрешима в пространстве $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$ при всех $\vec f \in V^{m-2,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$, $\vec\varphi \in V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$.*

2. *Если $\vec v \in W_2^1(\Omega$ — решение задачи* (11.1), (11.2) *и $\vec f \in V^{m-2,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$, $\vec\varphi \in V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$, то $\vec v \in V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.*

ТЕОРЕМА 11.5: *Пусть Ω — ограниченная область класса $\Lambda^{m,\alpha}$ ($m = 1, 2, \ldots$; $0 < \alpha < 1$) и числа β_q, δ_e подчинены неравенствам*

$$|\delta_e - m - \alpha| < \nu_e(\gamma), \tag{11.10}$$

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar e\}} \delta_e - m - \alpha - 1/2\Big| < 1/2 + \mu_q(\gamma). \tag{11.11}$$

Тогда:

1. *Задача* (11.1), (11.2) *однозначно разрешима в пространстве $N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$ при всех $\vec f \in N^{m-2,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$, $\vec\varphi \in N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$.*

2. *Если $\vec v \in W_2^1(\Omega)$ — решение задачи* (11.1), (11.2) *и $\vec f \in N^{m-2,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$, $\vec\varphi \in N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$, то $\vec v \in N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.*

В силу теоремы 11.2 утверждения теорем 11.4, 11.5 останутся верными, если в (11.8) и (11.11) заменить $\mu_q(\gamma)$ на $(2+\gamma)\,M_q/\bigl(2+\gamma(M_q+4)\bigr)$, где $M_q(M_q+1)$ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора $-\delta$ в области G_q, которую вырезает на S^2 касательный к $\partial\Omega$ конус с вершимой q.

Точно так же, как следствия 6.4, 6.5, получается

СЛЕДСТВИЕ 11.6: *Заключения теорем* 11.4, 11.5 *останутся справедливыми, если в их формулировках пространства* $V^{l,s}_{\vec\beta,\vec\delta}$ *и* $N^{l,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}$ *заменить на* $\mathscr{V}^{l,s}_{\beta}$, $\mathscr{N}^{l,\alpha}_{\beta}$, *а условия* (11.7), (11.8) *и* (11.10), (11.11) — *неравенствами*

$$\max\{-\mu_q(\gamma)-s^{-1},\ -\nu_e(\gamma)\}<\beta-m+2s^{-1}<\min\{1+\mu_q(\gamma)-s^{-1},\ \nu_e(\gamma)\},$$
$$\max\{-\mu_q(\gamma)-s^{-1},\ -\nu_e(\gamma)\}<\beta-m-\alpha<\min\{1+\mu_q(\gamma),\ \nu_e(\gamma)\}, \tag{11.12}$$

соответственно.

Так как $\nu_e(\gamma)>1$ при $\theta_e(\zeta,\gamma)\in(0,\pi)$, то, полагая в (11.12) $\beta=0$, $m=2$, $s=2$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 11.7: *Если* $\Omega\in\Lambda^2$, *множество вершин пусто или* $|\mathrm{Im}\,\lambda_q|>1/2$ *для всех* $q\in\mathscr{P}$ *и если* $\theta_e(\zeta,\gamma)<\pi$ *при всех* $\zeta\in e$, $e\in\mathfrak{E}$, *то решение* $\vec v\in\mathring{W}_2^{\,1}(\Omega)$ *системы Ламе с правой частью* $\vec f\in L^2(\Omega)$ *принадлежит пространству* $W_2^{\,2}(\Omega)$ *и справедлива оценка*

$$\|\vec v\|_{W_2^2(\Omega)}\leqq c\,\|\vec f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Имеет место также аналог следствия 6.6.

СЛЕДСТВИЕ 11.8: *Если* $\Omega\in\Lambda^{m,\alpha}$ *и* $\vec f$, $\vec\varphi$ — *гладкие вектор-функции в* $\bar\Omega$, *то* $\vec v\in C^\alpha(\bar\Omega)$; *здесь* $\alpha<\min\left\{\min\limits_e\nu_e(\gamma),\ \min\limits_q\mu_q(\gamma),\ 1\right\}$. *Производные решения допускают оценку*

$$\mathrm{grad}_k\,\vec v=0(r^{\alpha-k}),\qquad k=1,2,\ldots,m,$$

(r — расстояние до особых точек границы).

3. Оценки тензора Грина для системы Ламе. Матрицей Грина системы Ламе в Ω называется матрица-функция $(x,\xi)\to\|G_j^k(x,\xi)\|_{j,k=1}^3$, элементы которой удовлетворяют краевой задаче

$$-\Delta_x G_j^k(x,\xi)+\gamma\,\frac{\partial^1}{\partial x_j\,\partial x_l}\,G_l^k(x,\xi)=\delta_{jk}\delta(x-\xi),\qquad (x,\xi)\in\Omega\times\Omega,$$
$$G_j^k(x,\xi)=0\quad\text{при}\quad x\in\partial\Omega\setminus S,\qquad \xi\in\Omega.$$

Сказанное в §§ 7, 8 о свойствах тензора Грина системы Стокса переносится очевидным образом и на тензор Грина системы Ламе. Например, дословно так же, как первые части теорем 7.3, 8.3 и теорема 8.4 доказывается

ТЕОРЕМА 11.9: *Пусть область* Ω *принадлежит классу* Λ^m *и* $(x,\xi)\in U\times U$.

1. *Если* $2\varrho_q(x)<\varrho_q(\xi)$, *то имеет место оценка* (7.16), *в которой числа* μ_q *и* ν_e *заменены на* $\mu_q(\gamma)$ *и* $\nu_e(\gamma)$. *При* $2\varrho_q(\xi)<\varrho_q(x)$ *в правой части неравенства* (7.16) *следует поменять местами точки* x *и* ξ.

2. *Если* $\varrho_q(x)/2<\varrho_q(\xi)<2\varrho_q(x)$, $|x-\xi|>\min\{r(x),r(\xi)\}$, *то справедлива оценка* (8.1), *где* $\nu_{e(x)}$, $\nu_{e(\xi)}$ *заменены на* $\nu_{e(x)}(\gamma)$, $\nu_{e(\xi)}(\gamma)$.

3. *Если* $|x-\xi|<\min\{r(x),r(\xi)\}$, *то выполняется неравенство* (8.7)

ЗАМЕЧАНИЕ 11.10: При $\gamma = 0$ система Ламе распадается. Поэтому все предыдущие результаты этого параграфа в указанном случае относятся к задаче Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta v = f \text{ в } \Omega, \qquad v|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

При этом формулировки становятся разве лишь конкретнее, так как $\sigma_e(\zeta, \gamma) = \pi/\theta_e(\zeta)$ и $\lambda_q = M_q(M_q + 1)$.

4. Принцип максимума для системы Ламе. Пусть Ω — ограниченная область класса $\Lambda^{1,\alpha}$. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta\vec{v} + \gamma \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{11.13}$$

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi}. \tag{11.14}$$

Решение $\vec{v}$ этой задачи с данными Дирихле из класса $L^{\infty}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$ определяется так же, как аналогичное решение задачи (9.1), (9.2).

Повторяя без изменений доказательство теоремы 9.1, приходим к следующему ее аналогу.

ТЕОРЕМА 11.11: *Если* $\vec{\varphi} \in L^{\infty}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$, *где*

$$|\delta_e| < \nu_e(\gamma), \qquad \Big|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \delta_e - 1/2\Big| < 1/2 + \mu_q(\gamma)$$

для всех $e \in \mathscr{E}$ *и* $q \in \mathscr{P}$, *то имеет место неравенство* (9.6).

Следствие 9.2 справедливо и для системы Ламе. (В доказательстве вместо теоремы 2.3 используется теорема 11.2.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ладыженская, О. А.: Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд-во Наука: Москва 1970.
[2] Солонников, В. А.: Об оценках тензоров Грина для некторых граничных задач. ДАН СССР **130**, № **5** (1960), 988—991.
[3] Солонников, В. А.: О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. **I**: Труды Мат. института АН СССР **110** (1970), 107—145. **II**: Труды Мат. института АН СССР **116** (1971), 181—216.
[4] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с рёбрами на границе. В: Дифф. уравнения с частными производными. Труды семин. С. Л. Соболева **2** (1978), 69—102.
[5] Gagliardo, E.: Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili, Ric. Mat. **8** (1959), 24—51.
[6] Nirenberg, L.: On elliptic partial differential equations (Lecture II). Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (s. III) **13** (1959), 115—162.
[7] Фикера, Г.: Теоремы существования в теории упругости. Изд-во Мир: Москва 1974.

[8] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О принципе максимума для бигармонического уравнения в области с коническими точками. Математика/Изв. вузов 2 (1981), 52—59.
[9] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О свойствах решений трёхмерных задач теории упругости и гидродинамики в областях с изолированными особыми точками. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 50 (1981), с. 99—121. Новосибирск.

Manuskripteingang: 18. 12. 1981

VERFASSER:

Проф. д-р Владимир Гилелевич Мазья
Научно-исследовательский институт математики и механики Ленинградского Государственного Университета им. Жданова
СССР 198904 Ленинград-Петродворец, Библиот. пл. 2

Проф. д-р Борис Алексеевич Пламеневский
Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича
СССР Ленинград, Мойка 61