Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (6) 1983, S. 553–561

Zur Existenz einer Lösung für ein bestimmtes parabolisches Randsteuerproblem

W. SPERBER

Im vorliegenden Artikel wird die Existenz einer optimalen Steuerung für ein Kontrollproblem mit einer parabolischen Zustandsgleichung untersucht. Die Zustandsgleichung des behandelten Randsteuerproblems ist eine schwach nichtlineare parabolische Anfangsrandwertaufgabe. Für die Anfangsrandwertaufgabe dritter Art wird über die Integralgleichungsmethode eine verallgemeinerte Lösung definiert, deren Existenz mittels einer Approximation der Lösungen bestimmter klassisch lösbarer Probleme gezeigt werden kann. Um die Existenz einer optimalen Steuerung nachzuweisen, wird eine Verallgemeinerung des Satzes von Weierstrass auf schwach unterhalbstetige Funktionale in reflexiven Banach-Räumen benutzt.

В настоящей работе исследован вопрос о существовании оптимального управления для задачи с параболическим уравнением состояния. Уравнение состояния рассматриваемой задачи управления краевыми условиями является слабо-нелинейной краевой задачей с начальными условиями. Для этой задачи определено обобщённое решение методом интегральных уравнений, существование которого можно доказать при помощи приближения решений таких задач, которые имеют классическое решение. Чтобы показать существование оптимального управления, используется обощение теоремы Вейерштрасса на слабо непрерывные снизу функционалы в рефлексивных банаховых пространствах.

This paper investigates the existence of an optimal control for a control problem with a parabolic state equation. The state equation of the boundary control problem is a weakly nonlinear parabolic third initial boundary value problem. For this problem a generalized solution is defined by means of the integral equation method. The existence of a solution is proved by an approximation using solutions of classically solvable problems. To show the existence of an optimal control a generalization of the theorem of Weierstrass to lower semi-continuous functionals on reflexive Banach spaces is used.

1. Problemstellung

Gegeben sei die parabolische Anfangsrandwertaufgabe

$$(Lw)(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } D, \tag{1}$$

$$w(x, 0) = e(x) \quad \text{auf } \overline{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) = u(x, t)\, g(x, t, w) + h(x, t, w) \quad \text{auf } S, \tag{3}$$

wobei B ein beschränktes Gebiet des n-dimensionalen EUKLIDischen Raumes $\mathbf{R}^n$ ($n \geqq 2$) mit dem Rand ∂B, $\overline{B}$ den Abschluß von B, $D = B \times (0, T]$, und S die Seitenfläche des Zylinders D, $S = \partial B \times (0, T]$, bezeichnen.

L ist das Symbol für den linearen parabolischen Differentialoperator

$$(Lw)(x,t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$+ c(x,t)\, w(x,t) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu(\xi,t)} := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi,t) \cos(N_\xi, x_j) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)$$

stellt die Richtungsableitung von w in der inneren Konormalenrichtung im Punkt $(\xi, t) \in \partial B$ dar (N_ξ ist das Symbol der inneren Normalen im Punkt $\xi \in \partial B$).

Die Steuerfunktion u wird als eine beschränkte, meßbare Funktion angenommen, die der Bedingung

$$u \in U := \{u \in L_\infty(S) \mid a \leqq u(x,t) \leqq b \text{ fast überall, } a, b - \text{const}\} \tag{4}$$

genügt. Die Steuerfunktion u soll so bestimmt werden, daß das Funktional (5) minimiert wird:

$$J(u) := \int_0^T\int_B F_1(x,t,w(x,t))\,dx\,dt + \int_B F_2(x, w(x,T))\,dx$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial B} F_3(x,t,w(x,t))\,dB_x\,dt \to \inf_{u\in U}. \tag{5}$$

Bemerkung: Eine Anwendung der erhaltenen Existenzresultate ist etwa bei Identifikationsproblemen möglich, wo z. B. u den zu bestimmenden Koeffizienten bei Strahlungsprozessen, die nach dem STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz beschrieben werden, bedeutet. Ein Existenzsatz für eine ähnliche Steueraufgabe mit einer nichtlinearen NEUMANNschen Randbedingung anderer Art wurde vom Autor in [9] und [10] hergeleitet. Bei Zugrundelegung schwacher Lösungen wurden solche speziellen Steueraufgaben schon früher von J.-P. YVON [13] und S. T. CHIN [1] behandelt. Schließlich sei erwähnt, daß analoge Existenzaussagen für optimale Steuerungen bei mehrdimensionalen STEFAN-Problemen mit Randbedingungen der Form (3) kürzlich von M. NIEZGODKA und I. PAWLOW [5] sowie von I. PAWLOW [6] bewiesen worden sind, wobei sie ebenfalls einen schwachen Lösungsbegriff für das STEFAN-Problem verwendeten.

2. Die Existenz einer Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1)—(3)

Die in die Randbedingung (3) eingehende Steuerfunktion u erfüllt die Stetigkeitsvoraussetzungen nicht mehr, die eine klassische Lösung der Anfangsrandwertaufgabe sichern. Deswegen wird auf der Basis des Integralgleichungssystems, das der entsprechenden Anfangsrandwertaufgabe mit glatten Vorgaben entspricht, der Begriff einer verallgemeinerten Lösung der Anfangsrandwertaufgabe definiert.

Bemerkung: Im folgenden wird die gleiche Terminologie und Symbolik wie in [10] angewendet.

Definition: Jede Funktion $w \in C(\overline{D})$ heißt *verallgemeinerte Lösung* der Anfangsrandwertaufgabe

$$(Lw)(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } D, \tag{6}$$

$$w(x, 0) = e(x) \quad \text{auf } \overline{B}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) = g\big(x, t, w(x, t), u(x, t)\big) \quad \text{auf } S, \tag{8}$$

falls die Funktion w durch den Integralausdruck (9) gegeben ist:

$$\begin{aligned} w(x, t) = {} & -\int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi \\ & + \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g\big(\xi, \tau, w_1(\xi, \tau), u(\xi, \tau)\big)\, dB_\xi\, d\tau \quad \text{in } D, \end{aligned} \tag{9}$$

und $w_1 \in C(\overline{S})$ Lösung der Integralgleichung (10) ist:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) = {} & -\int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi \\ & + \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g\big(\xi, \tau, w_1(\xi, \tau), u(\xi, \tau)\big)\, dB_\xi\, d\tau \quad \text{in } S. \end{aligned} \tag{10}$$

Satz 1: *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

(1) $\partial B \in C^{(1,\lambda)}$, $0 < \lambda < 1$.

(2) $a_{11}(x, t) \geqq K_1$, $b_1(x, t) \geqq -K_2 \;\forall\; (x, t) \in \overline{D}$ (K_1, K_2 — *positive Konstanten, L — parabolisch in $\overline{D}$*).

(3) a_{ij}, b_i, c *sind stetig in $\overline{D}$ und erfüllen Hölder-Bedingungen:*

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x_0, t_0)| < A(|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2}),$$

$$|b_i(x, t) - b_i(x_0, t)| < A\, |x - x_0|^\alpha,$$

$$|c(x, t) - c(x_0, t)| < A\, |x - x_0|^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

(4) $c(x, t) \leqq 0$ in D.

(5) $g \in C(\overline{S} \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$, *streng monoton wachsend bez. des dritten Arguments w und streng monoton fallend bez. des vierten Arguments u.*

(6) *f ist Hölder-stetig in D und genügt einer gleichmäßigen Hölder-Bedingung in beschränkten Teilmengen von D, e ist stetig in $\overline{B}$ mit kompaktem Träger in B.*

Dann existiert für beliebiges $u \in U$ eine verallgemeinerte Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (6)—(8).

Dem Beweis des Satzes wird ein Lemma vorangestellt.

Lemma: *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

(1) $\partial B \in C^{(1,\lambda)}$, $0 < \lambda < 1$.

(2) *L ist parabolisch in $\overline{D}$, a_{ij}, b_i, c sind stetig in $\overline{D}$ und $c(x, t) \leqq 0$ in D.*

(3) *g ist streng monoton wachsend bez. des dritten Arguments und streng monoton fallend bez. des vierten Arguments.*

Aus $u_1(x, t) \leqq u_2(x, t) \ \forall\ (x, t) \in \bar{S}$ *und* $u_i \in C(\bar{S})$ *folgt dann für die Lösungen (im klassischen Sinn, falls sie existieren)* $w[u_1]$ *und* $w[u_2]$ *der Probleme* (6)—(8) *die Ungleichung* $w[u_1]\,(x, t) \leqq w[u_2]\,(x, t)\ \forall\ (x, t) \in D$.

Beweis: Angenommen, es sei $w[u_1]\,(x, t) > w[u_2]\,(x, t)$ in mindestens einem Punkt von $\bar{D}$. Es wird die Funktion $w := w[u_1] - w[u_2]$ betrachtet. Sie genügt der Gleichung $(Lw)\,(x, t) = 0$ in D. Aus dem Maximumprinzip folgt dann, daß w das positive Maximum in einem Punkt des Randes $\bar{B} \cup S$ annimmt. Da $w(x, t) = 0$ auf $\bar{B}$ ist, nimmt w sein positives Maximum in einem Punkt $P = (x_0, t_0) \in S$ an. Folglich muß $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) \leqq 0$ in P sein. Nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes gilt aber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) &= g\big(x, t, w[u_1]\,(x, t), u_1(x, t)\big) - g\big(x, t, w[u_2]\,(x, t), u_2(x, t)\big)\\ &\geqq g\big(x, t, w[u_1]\,(x, t), u_2(x, t)\big) - g\big(x, t, w[u_2]\,(x, t), u_2(x, t)\big) > 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Bemerkung: Dieses Lemma wurde vom Autor bereits in [10] hergeleitet und ist dort identisch mit dem Lemma zum Satz 2 in Abschnitt (1.5).

Folgerung: *Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt:*

$$|w_1[u]\,(x, t)| \leqq \text{const. auf } S, \qquad u \in U \cap C(\bar{S}).$$

Denn es ist $w_1[a]\,(x, t) \leqq w_1[u]\,(x, t) \leqq w_1[b]\,(x, t)$ mit $w_1[u] := w[u]$ auf S und damit $w_1[u]\,(x, t) \leqq \max\{|w_1[a]\,(x, t)|, |w_1[b]\,(x, t)|\}$. Da $|w_1[a]|$ und $|w_1[b]|$ aus $C(\bar{S})$ sind und deshalb durch zwei Konstanten H_0, H_1 beschränkt sind, gilt $|w_1[u]\,(x, t)| \leqq H$, wobei H etwa gleich dem Maximum von H_0 und H_1 gewählt wird $\blacksquare$

Beweis des Satzes 1: Es wird für $u \in U$ eine f. ü. gegen u konvergente Folge $\{u^{(n)}\}$ gewählt mit $u^{(n)} \in C(\bar{S})$. Die Existenz einer solchen Folge ist nach [3: IV.4] und [4: 2.1] gewährleistet. Die zugehörige Folge $\{w_1[u^{(n)}]\}$ der Lösungen der Anfangsrandwertaufgabe (6)—(8) mit $u = u^{(n)}$ ist dann nach der Folgerung aus dem Lemma beschränkt, d. h. $|w_1[u^{(n)}]\,(x, t)| \leqq \text{const}\ \forall\ n, (x, t) \in D$. Der Operator $G: C(\bar{S}) \to C(\bar{D})$,

$$(Gu)\,(x, t) := g\big(x, t, w_1[u]\,(x, t), u(x, t)\big),$$

führt wegen der Stetigkeit von g die Folge $\{u^{(n)}\}$ in die gleichmäßig beschränkte Folge $\{Gu^{(n)}\}$ über. Da der Integraloperator K:

$$(Kg)\,(x, t) := \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g(\xi, \tau)\, dB_\xi\, d\tau \tag{11}$$

nach [10] ein linearer vollstetiger Operator aus $L_p(S)$ (mit $p = \frac{p'}{p' - 1}$, $p < \min\left(\frac{1}{\mu}, \frac{n-1}{n-2\mu}\right)$, μ fest, $\frac{1}{2} < \mu < 1$) in $C(\bar{S})$ ist, so läßt sich eine in $C(\bar{S})$ normkonvergente Teilfolge $\{K(Gu^{(n')})\}$ mit $K(Gu^{(n')}) \to v$ finden.
Aus der Identität

$$\begin{aligned}w_1[u^{(n')}]\,(x, t) = &- \int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi\\ &+ \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g\big(\xi, \tau, w_1[u^{(n')}]\,(\xi, \tau), u^{(n')}(\xi, \tau)\big)\, dB_\xi\, d\tau\end{aligned} \tag{12}$$

folgt $w_1[u^{(n')}] \xrightarrow{\|\cdot\|} \overline{w}_1$ in $C(\bar{S})$ mit

$$\begin{aligned}\overline{w}_1(x, t) &= \lim_{n'\to\infty} w_1[u^{(n')}](x, t)\\ &= v(x, t) - \int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\\ &\quad + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi.\end{aligned} \tag{13}$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\overline{w}_1(x, t) &= \lim_{n\to\infty} w_1[u^{(n')}](x, t)\\ &= \lim_{n'\to\infty}\Bigg(-\int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi\\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g\big(\xi, \tau, w_1[u^{(n')}](\xi, \tau), u^{(n')}(\xi, \tau)\big)\, dB_\xi\, d\tau\Bigg)\\ &= -\int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi\\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g(\xi, \tau, \overline{w}_1(\xi, \tau), u(\xi, \tau)\, dB_\xi\, d\tau\end{aligned}$$

nach dem Satz von LEBESGUE, vgl. [7]. Die Gültigkeit der Voraussetzungen dieses Satzes kann leicht verifiziert werden. Die Existenz einer verallgemeinerten Lösung der Anfangsrandwertaufgaben (6)—(8) für $u \in U$ folgt aus der Untersuchung des Integralausdrucks (9). Die Funktionen, die durch die Integrale

$$\int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi$$

definiert sind, gehören nach [10] zu $C(\overline{D})$, die Funktion, die durch

$$\int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g\big(\xi, \tau, w_1(\xi, \tau), u(\xi, \tau)\big)\, dB_\xi\, d\tau$$

definiert ist, gehört wegen der Abbildungseigenschaften des Operators $\mathfrak{K}$:

$$(Kg)(x, t) := \int_0^t \int_{\partial B} G(x, t, \xi, \tau)\, g(\xi, \tau)\, dB_\xi\, d\tau \quad \text{in } D \tag{14}$$

(siehe [10]), der Stetigkeit von g, w_1 und der Meßbarkeit und Beschränktheit von u zu $C(\overline{D})$. Damit ist die Existenz einer verallgemeinerten Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (6)—(8) und im speziellen der Anfangsrandwertaufgabe (1)—(3) nachgewiesen ∎

Bemerkung 1: Die so konstruierte verallgemeinerte Lösung von (6)—(8) ist darüber hinaus eindeutig bestimmt.

Bemerkung 2: Die behaupteten Eigenschaften der Integraloperatoren sind in [10] unter Zugrundelegung allgemeiner Sätze über Integraloperatoren aus [12] nachgewiesen worden.

3. Zur Existenz einer Lösung des optimalen Steuerproblems

Satz 2: *Folgende Bedingungen mögen gelten:*

(1) *Es seien die Voraussetzungen* (1)—(5) *des Satzes* 1 *erfüllt.*

(2) F_1, F_2 *und* F_3 *genügen der Bedingung von* Caratheodory, *für alle* $\lambda > 0$, $|v| \leqq \lambda$ *gilt:*

$$F_1(x, t, v) \geqq A_\lambda(x, t) \quad \text{für f. a. } (x, t) \in D \quad \big(A_\lambda(x, t) \in L_1(D)\big),$$
$$F_2(x, v) \geqq B_\lambda(x) \quad \text{für f. a. } x \in B \quad \big(B_\lambda(x) \in L_1(B)\big),$$
$$F_3(x, t, v) \geqq C_\lambda(x, t) \quad \text{für f. a. } (x, t) \in S \quad \big(C_\lambda(x, t) \in L_1(S)\big).$$

Dann existiert eine Lösung des Steuerproblems (1)—(5).

Beweis: Wie vereinbaren, mit $w[u]$ die in $C(\bar{D})$ liegende verallgemeinerte Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1)—(3) für $u \in U$ zu bezeichnen, die gemäß dem im Beweis des Satzes 1 benutzten Grenzwertprozeß konstruiert wird.

Es wird nun eine Minimalfolge $\{u_n\} \in U$ betrachtet, d. h. eine Folge mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Bigg(&\int_0^T \int_B F_1\big(x, t, w[u_n](x, t)\big)\, dx\, dt + \int_B F_2\big(x, w[u_n](x, T)\big)\, dx \\ &+ \int_0^T \int_{\partial B} F_3\big(x, t, w[u_n](x, t)\big)\, dB_x\, dt\Bigg) \\ = \inf_{u\in U} \Bigg(&\int_0^T \int_B F_1\big(x, t, w[u](x, t)\big)\, dx\, dt + \int_B F_2\big(x, w[u](x, T)\big)\, dx \\ &+ \int_0^T \int_{\partial B} F_3\big(x, t, w[u](x, t)\big)\, dB_x\, dt\Bigg).\end{aligned} \tag{15}$$

Für die Minimalfolge $\{w_1[u_n]\}$ wird die Folge der zugehörigen Integralgleichungen (10) betrachtet, die gemäß der in Abschnitt 2 benutzten Operatordefinition (11) wie folgt beschrieben werden kann:

$$w_1[u_n](x, t) = K\big[g\big(x, t, w_1[u_n](x, t)\big)\, u_n(t)\big] + F(x, t) \quad \text{auf } S \tag{16}$$

mit

$$F(x, t) := -\int_0^t \int_B G(x, t, \xi, \tau)\, f(\xi; \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_B G(x, t, \xi, 0)\, e(\xi)\, d\xi.$$

Da $\{u_n\}$ eine Folge aus U ist und U konvex, beschränkt und abgeschlossen in $L_p(0, T)$ $(1 < p < \infty)$ ist, läßt sich eine in L_p $(p < \infty)$ und wegen der Abbildungseigenschaft von K:

$$p = \frac{p'}{p' - 1} \quad \text{mit} \quad p < \min\left(\frac{1}{\mu}, \frac{n-1}{n-2\mu}\right), \frac{1}{2} < \mu < 1, \text{ fest}), \tag{17}$$

schwach konvergente Teilfolge finden, die gegen ein Element $\tilde{u} \in U$ konvergiert: $u_{n'} \rightharpoonup \tilde{u}$ in $L_p(0, T)$. $\{w_1[u_{n'}]\}$ ist nach Satz 1 und unter Benutzung der Folgerung aus dem Lemma eine gleichmäßig beschränkte Folge $\forall\, u \in U$.

Wegen der Voraussetzung (1) ist der Operator $\tilde{G}$: $C(\bar{S}) \to L_\infty(S)$, mit $(\tilde{G}v)(x, t)$ $:= g\big(x, t, v(x, t)\big)$, stetig und beschränkt. Er überführt demnach die Folge $\{w_1[u_{n'}]\}$

mit $w_1[u_{n'}] \in C(\bar{S})$ in die gleichmäßig beschränkte Folge $\{\tilde{G}w_1[u_{n'}]\}$ mit $(\tilde{G}w_1[u_{n'}]) \in L_\infty(S)$. Da K ein linearer, vollstetiger Operator aus $L_p(S)$ (p wie in (17)) in $C(\bar{S})$ ist, enthält $\{K((\tilde{G}w_1[u_{n'}])\, u_{n'})$ eine konvergente Teilfolge:

$$K((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}) \xrightarrow{\|\cdot\|} v \quad \text{in } C(\bar{S}). \tag{18}$$

Damit hat die rechte Seite der Identität (16) das Konvergenzverhalten:

$$K((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}) + F \xrightarrow{\|\cdot\|} v + F \quad \text{in } C(\bar{S}). \tag{19}$$

Nach Ausführung des Grenzüberganges geht (16) über in

$$\tilde{w}_1 := \lim_{n'' \to \infty} w_1[u_{n''}] = v + F \quad \text{in } C(\bar{S}). \tag{20}$$

Hieraus folgt wegen der Stetigkeit der Funktion g bez. ihrer Argumente

$$\tilde{G}w_1[u_{n''}] \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{G}\tilde{w}_1 \quad \text{in } C(\bar{S}) \tag{21}$$

sowie wegen der schwachen Konvergenz von $\{u_{n''}\}$ gegen $\bar{u}$ in $L_p(0, T)$ (p genüge der Relation (17))

$$(\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''} \rightharpoonup (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u} \quad \text{in } L_p(S). \tag{22}$$

Es gilt nämlich für jedes beschränkte Funktional $f \in L_p^*(S)$ unter Verwendung der in [11] benutzten Symbolik $(\langle f, x\rangle := f(x), x \in L_p, f \in L_p^* = L_q)$:

$$\begin{aligned}
&|\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u} - (\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\rangle| \\
&= |\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u} - (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, u_{n''} + (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, u_{n''} - (\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\rangle| \\
&\leqq |\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u} - (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, u_{n''}\rangle| + |\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, u_{n''} - (\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\rangle| \\
&\leqq |\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, (\bar{u} - u_{n''})\rangle| + |\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1 - \tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\rangle| \\
&\leqq |\langle f, (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, (\bar{u} - u_{n''})\rangle| + \max_{(x,t)\in\bar{S}} |\tilde{G}\tilde{w}_1 - \tilde{G}w_1[u_{n''}]|\, \|f\|_{L_q}\, \|u_{n''}\|_{L_p},
\end{aligned} \tag{23}$$

wobei der erste Ausdruck wegen $u_{n''} \rightharpoonup \bar{u}$ und nach Anwendung von Satz 6 in [4: IV] gegen Null konvergiert. Für die Behandluung des zweiten Ausdrucks in (23) wird zunächst verwendet, daß $\{u_{n''}\}$ wegen der schwachen Konvergenz auch beschränkt ist und daß $(\tilde{G}\tilde{w}_1 - \tilde{G}w_1[u_{n''}])$ wegen der Konvergenz in $C(\bar{S})$ durch $\max_{(x,t)\in\bar{S}} |\tilde{G}\tilde{w}_1 - \tilde{G}w_1[u_{n''}]|$ abgeschätzt werden kann. Damit konvergiert auch der zweite Ausdruck in (23) gegen Null. Die behauptete schwache Konvergenz in (22) ist somit nachgewiesen. Wegen der verstärkten Stetigkeit von K gilt:

$K((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}) \xrightarrow{\|\cdot\|} K((\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u})$ in $C(\bar{S})$. Das bedeutet zusammen mit (18) $v = K((\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u})$ und nach (20)

$$\tilde{w}_1 = K((\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u}) + F \quad \text{mit} \quad \tilde{w}_1 = \lim_{n'' \to \infty} w_1[u_{n''}]. \tag{24}$$

Es ist noch die Folge der Integralgleichungen (9) zu untersuchen, die in Operatorschreibweise die Form

$$w[u_n''] = \mathfrak{K}((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}) + F \tag{25}$$

annimmt. Die Untersuchung von (25) verläuft ähnlich der Untersuchung von (16). Zunächst folgt aus $u_{n''} \rightharpoonup \bar{u}$ in $L_p(0, T)$ (p erfülle (17)), aus den Abbildungseigenschaften von $\tilde{G}$ sowie wegen $w_1[u_{n''}] \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{w}_1$ in $C(\bar{S})$, daß $(\tilde{G}w_1[u_{n''}]\, u_{n''}) \rightharpoonup (\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \bar{u}$ in $L_p(S)$, p wie in (17). Wegen der Linearität und Vollstetigkeit des Operators $\mathfrak{K}$, der aus $L_p(S)$ in $C(\overline{D})$ wirkt, wird die schwach konvergente Folge $\{(\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\}$ in die normkonvergente Folge $\left\{\mathfrak{K}\big((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\big)\right\}$ abgebildet:

$$\mathfrak{K}\big((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\big) \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathfrak{K}\big((\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \tilde{u}\big) \quad \text{in } C(\overline{D}). \tag{26}$$

Die Integralbeziehung (26) bedeutet zusammen mit (25):

$$\tilde{w} := \lim_{n''\to\infty} w[u_{n''}] = \lim_{n''\to\infty} \mathfrak{K}\big((\tilde{G}w_1[u_{n''}])\, u_{n''}\big) + F = \mathfrak{K}\big((\tilde{G}\tilde{w}_1)\, \tilde{u}\big) + F \tag{27}$$

in $C(\overline{D})$. Also stellt nach (27) und (24) $\tilde{w}$ die zu $\tilde{u}$ gehörige verallgemeinerte Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1)—(3) dar, d. h. $\tilde{w} = w[\tilde{u}]$.

Auf Grund der Voraussetzungen an F_1 folgt (siehe [7])

$$\lim_{n''\to\infty} \Phi_1\big(w[u_{n''}] > \Phi_1(w[\tilde{u}])\big) \tag{28}$$

mit

$$\Phi_1(w[u]) := \int_0^T \int_B F_1\big(x, t, w[u]\,(x, t)\big)\, dx\, dt.$$

Wegen $w[u_{n''}] \xrightarrow{\|\cdot\|} w[\tilde{u}]$ in $C(\overline{D})$ gilt weiter $w[u_{n''}] \to w[\tilde{u}]$ in $C(\overline{B})$. Auf Grund der Voraussetzungen an F_2 bez. w folgt (siehe [7])

$$\varliminf_{n''\to\infty} \Phi_2(w[u_{n''}]) \geqq \Phi_2(w[\tilde{u}]) \tag{29}$$

mit

$$\Phi_2(w[u]) := \int_B F_2\big(x, w[u]\,(x, T)\big)\, dx.$$

Schließlich folgt aus $w[u_{n''}] \xrightarrow{\|\cdot\|} w_1[\tilde{u}]$ in $C(\overline{S})$ und der Voraussetzung an F_3 (siehe wiederum [7])

$$\varliminf_{n''\to\infty} \Phi_3(w[u_{n''}]) \geqq \Phi_3(w[\tilde{u}]) \tag{30}$$

mit

$$\Phi_3(w[u]) := \int_0^T \int_{\partial B} F_3\big(x, t, w[u]\,(x, t)\big)\, dB_x\, dt.$$

Die Beziehungen (28)—(30) bedeuten zusammen:

$$\begin{aligned}
&\{\Phi_1(w[\tilde{u}]) + \Phi_2(w[\tilde{u}]) + \Phi_3(w[\tilde{u}])\} \\
&\leqq \varliminf_{n''\to\infty} \{\Phi_1(w[u_{n''}]) + \Phi_2(w[u_{n''}]) + \Phi_3(w[u_{n''}])\} \\
&\leqq \lim_{n''\to\infty} \{\Phi_1(w[u_{n''}]) + \Phi_2(w[u_{n''}]) + \Phi_2(w[u_{n''}])\} \\
&= \inf_{u\in U} \{\Phi_1(w[u]) + \Phi_2(w[u]) + \Phi_3(w[u])\},
\end{aligned}$$

also

$$\inf_{u\in U} \{\Phi_1(w[u]) + \Phi_2(w[u]) + \Phi_3(w[u])\} = \Phi_1(w[\tilde{u}]) + \Phi_2(w[\tilde{u}]) + \Phi_3(w[\tilde{u}]),$$

d. h., $(w[\tilde{u}], \tilde{u})$ charakterisiert einen optimalen Prozeß ∎

LITERATUR

[1] Chin, S. T.: Optimal control for linear parabolic equations with nonlinear boundary condition. Tankang J. Math. 5 (1975), 31—51.
[2] Friedman, A.: Differential equations of parabolic type. Prentice Hall 1964.
[3] Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1969.
[4] Kufner, A., John, O., and S. Fucik: Function spaces. Prague 1977.
[5] Niezgodka, M., and I. Pawłow: Optimal control for parabolic systems with free boundary existence of optimal controls, approximation results. In: Proceedings of the 9th IFIP Conference on Optimization Techniques, Warszawa 1979 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 23), Part 2, p. 412—421.
[6] Pawłow, I.: Parabolic problems with free boundaries, existence and properties of solutions, optimal control problems. In: Nonlinear Analysis Theory and Applications (Proceedings of the seventh international summer school). Berlin 1982, p. 221—232.
[7] Поляк, Б. Т.: Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум. Математический сборник 78 (120), 1 (1969), 65—84.
[8] Riesz, Sz., und B. Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin 1982.
[9] Sperber, W.: Some remarks to existence problems of optimal control for parabolic equations. In: Nonlinear Analysis Theory and Applications, Berlin 1982 (Proceedings of the seventh International summer school), p. 407—413.
[10] Sperber, W.: Zur Existenz optimaler Steuerungen bei Kontrollproblemen mit parabolischen Zustandsgleichungen. Dissertation A: Freiberg 1981.
[11] Ljusternik, L. A., und W. I. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis. Berlin 1968.
[12] Забрейко, П. П., Кошелев, А. И., Красносельский, М. А., Михлин, С. Г., Раковщик, Л. С., и В. Я. Стеценко: Интегральные уравнения. Москва 1968.
[13] Yvon, J. P.: Etude de quelques problemes de control pour les systemes distribues. These Universite Paris VI (1973).
[14] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis, Bd. 1, Leipzig 1977.

Manuskripteingang: 12. 02. 1982; in revidierter Fassung: 04. 05. 1982

VERFASSER:

Dr. Wolfram Sperber
Abt. Math.-Naturw. der Ingenieurhochschule
DDR - 7500 Cottbus, Karl-Marx-Str. 17