Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (1) 1984, S. 19–31

Flächensätze für quasikonform fortsetzbare Abbildungen

E. Hoy

In dieser Arbeit wird eine Erweiterung des Flächenprinzips auf konforme Abbildungen mit einer Q_j-quasikonformen Fortsetzung in die Komponente $\mathfrak{B}_j$ des Komplements eines Gebietes $\mathfrak{G}$ gegeben. Für diese Abbildungen wird ein verallgemeinerter Flächensatz bewiesen. Die Ungleichungen sind scharf; die Extremalfunktionen sind mit der Lösung der Gleichung $w_{\bar{z}} = \mu(z)\,\overline{w_z}$ verbunden, wobei $\mu(z)$ eine stückweise konstante Funktion ist. Diese Flächensätze werden für die Abschätzungen des Wertebereiches des Koeffizienten von z^{-1} bei Laurententwicklung in der Umgebung von ∞, der Schwarzschen Ableitung und des Golusinschen Funktionals angewandt. Zuletzt wird die Möglichkeit einer Erweiterung auf konforme Abbildungen mit quasikonformer Fortsetzung gezeigt. Für Grunskysche Gebiete sind diese Ungleichungen asymptotisch scharf, wenn die Dilatationsbeschränkung gegen eine Konstante konvergiert.

В этой работе даётся расширение принципа площадей на конформные отображения с Q_j-квазиконформным продолжением в компоненту $\mathfrak{B}_j$ дополнения области $\mathfrak{G}$. Для этих отображений доказывается обобщенная теорема площадей. Неравенства точные, экстремальные функции связаны с решением уравнения $w_{\bar{z}} = \mu(z)\,\overline{w_z}$, причем $\mu(z)$ является кусочно-постоянной функцией. Эти теоремы площадей используются для оценки областей значений коэффициента при z^{-1} лорановского разложения в окрестности бесконечной точки, производной Шварца и функционала Голузина. В конце показывается возможность расширения на конформные отображения с квазиконформным продолжением. Для областей Грунского эти неравенства асимптотически точные, если ограничение отклонения сходится к постоянному числу.

In this paper an extension of the area principle to conformal mappings with a Q_j-quasiconformal continuation into the component $\mathfrak{B}_j$ of the complement of a region $\mathfrak{G}$ is given. A generalized area theorem is proved for these mappings. The inequalities are sharp; the extremal functions are connected with the solution of the equation $w_{\bar{z}} = \mu(z)\,\overline{w_z}$ with $\mu(z)$ being a piecewise constant function. These area theorems are applied to the estimations of the ranges of the coefficient for z^{-1} of the Laurent expansion in the neighbourhood of infinity, the Schwarzian derivative and Golusin's functional. Finally the possibility of an extension to conformal mappings with a quasiconformal continuation is shown. For Grunsky's regions these inequalities are asymptotically sharp, if the restriction of the dilatation converges to a constant.

1. Einleitung

Die Lösung von Extremalproblemen in gewissen Klassen konformer oder quasikonformer Abbildungen spielt seit langem eine wichtige Rolle in der geometrischen Funktionentheorie. Als ein möglicher Zugang zu dieser Problematik haben sich Flächensätze erwiesen. Solche Sätze sind für gewisse Klassen von konformen Abbildungen in [3, 5, 7, 17, 19, 20, 22] erhalten worden. Für gewisse Klassen Q-quasikonform fortsetzbarer konformer Abbildungen sind in [2, 6, 9, 12, 18] Flächensätze zu finden. Im Gegensatz zu den Flächensätzen für konforme Abbildungen ist bei den zuletzt genannten Flächensätzen nicht immer klar, ob das Gleichheitszeichen in den Ungleichungen durch eine Abbildung der betreffenden Klassen realisiert werden kann. Im folgenden werden Flächensätze hergeleitet, bei denen wenigstens eine Abbildung angegeben werden kann, für die das Gleichheitszeichen in der jeweiligen Ungleichung steht. Daran anschließend werden die genauen Wertebereiche einiger Funktionale mit Hilfe der Flächensätze bestimmt. Letzteres stellt die Lösung entsprechender Extremalprobleme dar (hierzu siehe [10, 12]).

Im weiteren sei $\mathfrak{G}$ ein n-fach zusammenhängendes Gebiet, das von einfach geschlossenen analytischen Kurven berandet ist und ∞ als inneren Punkt enthält. Die Randkurven von $\mathfrak{G}$ sind in mathematisch positiver Richtung (d. h. $\mathfrak{G}$ zur Rechten) orientiert und werden mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ bezeichnet. Im folgenden sei das Innere von $\mathfrak{C}_j$ jeweils mit $\mathfrak{B}_j$ benannt, und es wird noch

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{C}_j, \qquad \mathfrak{B} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_j$$

gesetzt. Weiterhin seien Q_j und θ_j reelle Zahlen mit $Q_j \in [1, \infty)$ und $\theta_j \in [0, \pi)$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$. Für solche Zahlen wird der Abkürzung halber im weiteren $\hat{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ und $\hat{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ geschrieben. Mit $\Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ wird die Menge aller schlichten stetigen Abbildungen der Vollebene auf sich bezeichnet, die in $\mathfrak{G}$ konform sind, wobei bei $z = \infty$ die Entwicklung z+reguläre Funktion vorliegt, und die jeweils nach $\mathfrak{B}_j$ noch Q_j-quasikonform fortsetzbar sind ($j = 1, 2, \ldots, n$). $T(w)$ ist im folgenden zu vorgegebenem $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ eine im Abschluß von $f(\mathfrak{B})$ analytische Funktion, die auf keiner Komponente des Komplements von $f(\mathfrak{G})$ konstant ist. Ähnlich wie in [20: Satz 5.1 bzw. Satz 4.13] erhält man

$$\{T[f(z)]\}' = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \Phi_\nu'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \varphi_\nu'(z) \tag{1}$$

für alle $z \in \mathfrak{G}$, die hinreichend nahe bei $\mathfrak{C}$ liegen, und

$$\pi \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \right) = \iint_{\mathfrak{B}} |T'[f(z)]|^2 \, [|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2] \, dx \, dy. \tag{2}$$

Dabei stellt $\{\varphi_\nu(z), \Phi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\ldots}$ das Laurentsche Funktionensystem in [20] dar. Die Eigenschaften dieses Funktionensystems sind in [20] in der Einleitung und im Kapitel 4 zu finden.

Im weiteren spielt die Gleichung

$$W_{\bar{z}}(z) = \frac{Q_j - 1}{Q_j + 1} \cdot e^{2i\theta_j} \, \overline{W_z(z)} \tag{3}$$

für alle $z \in \mathfrak{B}_j$ mit den oben erklärten Q_j und θ_j eine zentrale Rolle ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Bevor die Herleitung eines Flächensatzes beginnen kann, werden zwei wesentliche Voraussetzungen für die folgenden Überlegungen formuliert.

A) $T(w)$ wird (in eventueller Abhängigkeit von $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$) so gewählt, daß $T(w)$ für alle $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ jeweils im Abschluß von $f(\mathfrak{B})$ analytisch ist.

B) Es existiert eine Abbildung $f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta}) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$, für die $T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]$ der Gleichung (3) genügt.

2. Herleitung eines Flächensatzes

Ist $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ fest vorgegeben, und setzt man $q_j = (Q_j - 1)/(Q_j + 1)$ für $j = 1, 2, \ldots, n$, so folgt aus (2)

$$\pi\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2\right) \geqq \sum_{j=1}^{n} (1 - q_j^2) \iint_{\mathfrak{B}_j} |\{T[f(z)]\}_z|^2 \, dx \, dy. \tag{4}$$

Wegen

$$0 \leqq |\{T[f(z)]\}_z - \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z|^2 = |\{T[f(z)]\}_z|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \overline{\{T[f(z)]\}_z} \cdot \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z \rangle + |\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z|^2$$

und wegen der Analytizität von $\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z$ im Abschluß von $\mathfrak{B}$, die aus (3) und der Fußnote in [14; S. 271] folgt, ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes aus (4):

$$\begin{aligned} &\pi\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2\right) \\ &\geqq 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (1 - q_j^2) \int_{\mathfrak{C}_j} \overline{T[f(z)]} \, \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z \, dz \right\rangle \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} (1 - q_j^2) \iint_{\mathfrak{B}_j} |\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z|^2 \, dx \, dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen steht in (5) sicherlich für $f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$ (siehe (4) und die folgende Gleichung). Mittels allgemeiner Sätze in [1, 19, 20] und aus (1) folgt dann leicht die Darstellbarkeit des Kurvenintegrals in (5) als Linearform in $\{A_\nu, \lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ und die quadratische Summierbarkeit der Beträge der Koeffizienten dieser Linearform. Damit hat man

Satz 1: *Mit den Bezeichnungen aus der Einleitung ergibt sich bei Vorgabe von $\hat{\theta}$ und unter den Voraussetzungen* A) *und* B) *für alle* $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$

$$\begin{aligned} &\pi\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu - A_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu - a_\nu|^2\right) \\ &\geqq \pi\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 - \sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu|^2\right) - \sum_{j=1}^{n} (1 - q_j^2) \iint_{\mathfrak{B}_j} |\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z|^2 \, dx \, dy \end{aligned} \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} (1 - q_j^2) \int_{\mathfrak{C}_j} \overline{\Phi_\nu(z)} \, \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z \, dz, \\ a_\nu &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} (1 - q_j^2) \int_{\mathfrak{C}_j} \overline{\varphi_\nu(z)} \, \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z \, dz \end{aligned} \tag{7}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, 9$. *Das Gleichheitszeichen steht in* (6) *für* $f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$.

Bemerkungen: a) Man erhält eine n-parametrische Schar von Flächensätzen, wobei $\hat{\theta}$ der Parameter ist.

b) Ist $\mathfrak{G}$ speziell das Äußere des Einheitskreises und $T(w) \equiv w$, so geht (6) unabhängig von θ_1 über in

$$\pi\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2\right) \geqq \pi(1 - q_1^2).$$

Diese Ungleichung wurde in [12: Satz 21] und in [18] in anderer Symbolik angegeben. Ferner ist sie auch in [9] zu finden.

c) Die Diskussion darüber, wann in (6) das Gleichheitszeichen gilt, folgt im nächsten Abschnitt.

3. Diskussion des Gleichheitsfalles

Man überblickt leicht, daß das Gleichheitszeichen in (6) für Abbildungen $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ genau dann steht, wenn

$$|f_{\bar z}(z)/f_z(z)| \equiv q_j \tag{8}$$

fast überall in $\mathfrak{B}_j$ gilt ($j = 1, 2, \ldots, n$) und

$$\{T[f(z)]\}_z = \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z \tag{9}$$

fast überall in $\mathfrak{B}$ gilt. Da der auf der rechten Seite von (9) stehende Term in $\mathfrak{B}$ analytisch ist, überlegt man sich sofort, daß $\{\overline{T[f(z)]}\}_{\bar z}$ ebenfalls diese Eigenschaft hat. Das folgt aus der Integration von (9) nach z, die für $T[f(z)]$ die Darstellung als Summe einer analytischen und antianalytischen Funktion bringt, und einer sich anschließenden Differentation nach $\bar z$. Deshalb ist (8) äquivalent mit

$$\{T[f(z)]\}_{\bar z} = q_j\, e^{2i\beta_j} \{\overline{T[f(z)]}\}_z \tag{10}$$

fast überall in $\mathfrak{B}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Dabei sind alle β_j reelle Zahlen aus $[0, \pi)$. Für $T(w) \equiv w$, $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$ und $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ werden diese Zahlen bei einfach zusammenhängenden Gebieten und bei *Grunskyschen Gebieten*[1]) (hierzu siehe [11]) bestimmt, denn die Frage, für welche β_j eine Abbildung $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ existiert, die (9) und (10) genügt, ist keineswegs trivial. Der Einfachheit halber wird statt $f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$ bzw. $\Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ in diesen Fällen $f^*(z, Q, \theta)$ bzw. $\Sigma(\mathfrak{G}, Q)$ geschrieben. Außerdem wird $q = (Q - 1)/(Q + 1)$ gesetzt. Es sei noch bemerkt, daß in diesen Fällen die Voraussetzungen A) und B) erfüllt sind und $f^*(z, Q, \theta)$ durch (3) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt wird.

1. $\mathfrak{G}$ sei einfach zusammenhängend und sonst wie im Abschnitt Einleitung erklärt. Es wird untersucht, welche Schlußfolgerungen sich aus $\beta_1 \neq \theta$ in (9) ableiten lassen. Aus (9) und (10) folgt dann, daß

$$e^{2i(\theta - \beta_1)} f(z) - f^*(z, Q, \theta)$$

in $\mathfrak{B}$ analytisch ist. Wegen $\beta_1 \neq \theta$ kann letztere Funktion durch

$$g(z)\,[e^{2i(\theta - \beta_1)} - 1]$$

ersetzt werden, wobei dann $g(z)$ in $\mathfrak{G}$ bis auf einen Pol mit der Entwicklung $z +$ reguläre Funktion bei ∞ analytisch ist. Damit ist aber $g(z) - z$ für alle $z \in \mathbf{C}$ konstant. Wegen

$$e^{2i(\theta - \beta_1)} f_z(z) - f_z^*(z, Q, \theta) = g'(z)\,[e^{2i(\theta - \beta_1)} - 1] \equiv e^{2i(\theta - \beta_1)} - 1$$

folgt aus (9) $f_z^*(z, Q, \theta) = 1$ fast überall in $\mathfrak{B}$. Daraus schließt man

$$f^*(z, Q, \theta) = z + q\, e^{2i\theta} \bar z + const \text{ in } \mathfrak{B}.$$

Damit existiert aber eine in $\mathfrak{G}$ analytische Funktion $h(z)$ mit den Randwerten $\bar z$, wie man der Normierung von $f^*(z, Q, \theta)$ entnimmt. Entwickelt man $h(z)$ außerhalb

[1]) Ein Gebiet G (wie in Abschnitt 1 erklärt) heißt *Grunskysches Gebiet* (oder vom Grunskyschen Typ), wenn die Summe aus den hydrodynamisch normierten schlichten konformen Horizontal- und Vertikalschlitzabbildungen dieses Gebietes gleich dem Zweifachen der Identität ist.

eines hinreichend großen Kreises um den Punkt $\overline{h(\infty)}$ in der z-Ebene, so folgt leicht, daß $[h(z) - h(\infty)]\,[z - \overline{h(\infty)}]$ dort und daher auch in $\mathfrak{G}$ analytisch ist. Offenbar hat diese Funktion aber reelle Randwerte und erweist sich somit in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ als konstant. Für $z \in \mathfrak{C}$ gilt $|z - \overline{h(\infty)}| = const$, d. h. $\mathfrak{C}$ ist eine Kreislinie. Mittels Satz 21 aus [12] bzw. nach [18] [siehe auch 2.b)] überlegt man sich, daß im Fall des Äußeren eines Kreises für $\mathfrak{G}$, und wegen dem eben Bewiesenen nur in diesem Fall (bei einfach zusammenhängenden Gebieten) für alle $f^*(z, Q, \sigma) + const$ mit $\sigma \in [0, \pi)$ in (6) das Gleichheitszeichen steht.

2. $\mathfrak{G}$ sei ein Grunskysches Gebiet und sonst wie im Abschnitt Einleitung erklärt, wobei noch $n \geq 2$ gelte. Offenbar genügen die in Gleichung (8) in [10] angegebenen Funktionen den Bedingungen (9) und (10) für $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$ und liegen in $\Sigma(\mathfrak{G}, Q)$, d. h. alle Funktionen $f^*(z, Q, \sigma) + const$ mit beliebigem σ aus $[0, \pi)$ haben diese Eigenschaften für $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = \sigma$. Man zeigt nun auf indirektem Wege, daß das Gleichheitszeichen in (6) nur für diese Funktionen stehen kann. Dann kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß bei einer solchen Funktion $f(z)$ in (10) $\beta_1 \neq \beta_2$ gilt. Damit ist wegen (9) und (10) $f(z) - f^*(z, Q, \beta_1)$ in $\mathfrak{B}_1$ konstant und auf $\mathfrak{C}_1$ noch regulär. Nach analytischer Fortsetzung dieser Differenz nach $\mathfrak{G}$ ist diese auf $\mathfrak{C}_2$ noch konstant, woraus sich leicht ein Widerspruch zu $\beta_1 \neq \beta_2$ ableiten läßt, indem man analoge Überlegungen für $f(z) - f^*(z, Q, \beta_2)$ anstellt und die Unabhängigkeit der Funktionen $f_z^*(z, Q, \theta)$ von θ beachtet. Zusammenfassend hat man

Satz 1': *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 *steht in* (6) *das Gleichheitszeichen nur für Abbildungen* $f(z)$ *aus* $\Sigma(\mathfrak{G}, \hat{Q})$, *für die*

$$\{T[f(z)]\}_z = \{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z$$

fast überall in $\mathfrak{B}$ *und*

$$\{T[f(z)]\}_{\bar{z}} = q_j\, e^{2i\beta_j}\overline{\{T[f(z)]\}_z}$$

fast überall in $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *gelten. Dabei sind die* β_j *reelle Zahlen aus* $[0, \pi)$. *Für* $T(w) \equiv w$, $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$ *und* $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ *sind die Voraussetzungen* A) *und* B) *erfüllt, und es ergibt sich, daß bei einfach zusammenhängenden Gebieten der betrachteten Klasse, die nicht vom Grunskyschen Typ sind, das Gleichheitszeichen in* (6) *nur für* $f^*(z, Q, \theta) + \mathrm{const}$ *steht. Bei Grunskyschen Gebieten gilt das Gleichheitszeichen in* (6) *für alle Funktionen* $f^*(z, Q, \sigma) + \mathrm{const}$ *mit* $\sigma \in [0, \pi)$ *und nur für diese.*

4. Bemerkungen und Verbindungen zu einigen bisher erschienenen Arbeiten über diese Problematik

a) Satz 1 verallgemeinert die Flächensätze für konforme Abbildungen von $\mathfrak{G}$, die bei $z = \infty$ einen Pol mit der Entwicklung $z +$ reguläre Funktion haben. Solche Sätze sind in verschiedener Symbolik in [7, 17, 19, 20] zu finden. Ersetzt man nämlich für $Q_j = \infty$ in (6) und (7)

$$(1 - q_j^2)\,\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z$$

durch Null, so erweisen sich solche Flächensätze als Spezialfälle von Satz 1.

b) Die Sätze 1 und 1' wurden im Fall des Äußeren des Einheitskreises als Gebiet $\mathfrak{G}$ in [9, 12, 18] bewiesen, wobei in den letztgenannten Arbeiten der Spezialfall $T(w) \equiv w$

betrachtet wurde. Für $T(w) \equiv w$, $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$ und $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ ergibt sich bei Grunskyschen Gebieten aus (6)

$$\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \leqq q^2 |\mathfrak{B}|,$$

wobei $|\mathfrak{B}|$ der Flächeninhalt von $\mathfrak{B}$ ist. Diese Ungleichung ist in einem Flächensatz in [2] angegeben worden. Weiterhin ergibt sie sich für Grunskysche Gebiete auch aus Folgerung 1 in [6]. Zur Diskussion des Gleichheitszeichens in den beiden Arbeiten sei bemerkt, daß Satz 1′ die Überlegungen in [2] vervollständigt, und in [6] nur bei Grunskyschen Gebieten für alle dort in (6) aufgeführten Funktionen das Gleichheitszeichen in der Ungleichung von Folgerung 1 stehen kann. Letzteres folgt ähnlich wie in 3.1. Liegt dagegen in [6] kein Grunskysches Gebiet vor, so ist nicht klar, ob die dortigen Flächensätze scharf sind. Ähnliche Flächensätze könnte man auch wie in Abschnitt 2 gewinnen, wenn statt $\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z$ eine im Abschluß von $\mathfrak{B}$ analytische, sonst beliebige Funktion (z. B. eine Konstante wie in Folgerung 1 von [6]) verwendet wird.

c) Unter den in b) genannten Voraussetzungen an $T(w)$, $\hat{Q}$ und $\hat{\theta}$ kann man einen Spezialfall von Satz 1 mittels ähnlicher Vorgehensweise wie in [2] und [18] erhalten. Jedoch wird nicht wie dort $|f_z(z) - 1|$, sondern $|f_z(z) - f_z^*(z, Q, \theta)|$ durch Null abgeschätzt. Die übrigen Überlegungen laufen analog zu Abschnitt 2. In diesem Fall kann man sogar ein beliebiges randanalytisches Orthonormalsystem im Hilbertraum aller in $\mathfrak{G}$ analytischer Funktionen, deren Ableitungen (erste komplexe Ableitung nach z) über $\mathfrak{G}$ noch betragsmäßig quadratisch integrierbar sind, anstatt des Laurentschen Funktionensystems verwenden.

d) Die Berechnung von $f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$ ist in einigen Spezialfällen mit Hilfe der Überlegungen in [15, 16] möglich.

5. Abschätzung von Funktionalen mit Hilfe der Flächensätze

Es zeigt sich im folgenden, daß für $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$ und $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ sich die genauen Wertebereiche vom Koeffizienten für z^{-1} bei Laurententwicklung im Punkt ∞, der Schwarzschen Ableitung und das Golusinschen Funktionals (z. B. in [5: (4); auf S. 115 in der deutschen Übersetzung zu finden], wobei die Abbildungen beliebig in $\Sigma(\mathfrak{G}, Q)$ variieren, mittels Satz 1 bestimmen lassen. In jedem Fall erhält man dabei eine einparametrische Schar (Parameter θ) von Punktmengen, die den gesuchten Wertebereich umfassen und mindestens einen Randpunkt mit ihm gemeinsam haben. Elementargeometrische Überlegungen liefern dann jeweils, daß die genauen Wertebereiche gerade die Durchschnitte aller Punktmengen der Schar sind.

Bevor die Beispiele abgehandelt werden, macht es sich notwendig, einige Bezeichnungen aus [20] einzuführen. Mit $j_\theta(z, \zeta)$ $\big(\zeta \in \mathfrak{G} \setminus \{\infty\}, \theta \in [0, \pi)\big)$ wird diejenige schlichte konforme Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf ein Schlitzgebiet, das von logarithmischen Spiralen mit der Neigung θ gegen Strahlen aus dem Ursprung berandet wird, bezeichnet, die bei $z = \infty$ die Entwicklung z + reguläre Funktion hat und ζ in 0 überführt. In bekannter Zweigwahl beim Logarithmus sei

$$R(z, \zeta) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{(z - \zeta)^2}{j_{\pi/2}(z, \zeta)\, j_0(z, \zeta)}\right], \quad P(z, \zeta) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{j_{\pi/2}(z, \zeta)}{j_0(z, \zeta)}\right].$$

Außerdem wird mit Hilfe des Laurentschen Funktionensystems in [20] die Kernfunktion $K_*(z, \bar{\zeta})$ durch

$$K_*(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu'(z) \overline{\varphi_\nu'(\zeta)}$$

gebildet.

5.1. Abschätzung vom Koeffizienten für z^{-1} bei Laurententwicklung im Punkt ∞

Im folgenden sei $T(w) \equiv w$, und es gelten die Voraussetzungen an $\hat{Q}$ und $\hat{\theta}$ vom Anfang des Abschnittes. Es ist dann für $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, Q)$ gemäß (1)

$$f(z) = a_{11}\Phi_1(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \varphi_\nu(z) + \text{const} \quad \text{in } \mathfrak{G}, \tag{11}$$

$$f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{z^\nu} + \text{const} \quad \text{in Umgebung von } \infty. \tag{12}$$

a_{11} hängt wegen der festen Normierung von $f(z)$ bei ∞ nicht von dem speziell gewählten $f(z)$ ab, und es gilt

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \varphi_1(z)\, dz.$$

Wie in [20] wird $\varphi_1(z)$ so gewählt, daß a_{11} positiv ist. Zwischen λ_1 und α_1 besteht die Beziehung (siehe auch [20: (5.29)])

$$\lambda_1 = (\alpha_1 - b_{11})/a_{11}. \tag{13}$$

b_{11} ist dabei eine nur von $\mathfrak{G}$ abhängige Zahl, die in (4.1) von [20] verwendet wird. Wegen $T(w) \equiv w$ ist $f^*(z, Q, \theta)$ durch (3) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, und die Koeffizienten dieser Funktion in (11) und (12) werden mit $\lambda_\nu^*(Q, \theta)$ und $\alpha_\nu^*(Q, \theta)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ bezeichnet. Dann folgt in diesem Fall für (6), da hier die Vorauussetzungen A) und B) erfüllt sind,

$$|\lambda_1 - \lambda_1^*(Q, \theta) + a_{11}q\, e^{2i\theta}|^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} |\lambda_\nu - \lambda_\nu^*(Q, \theta)|^2 \leqq a_{11}^2 q^2. \tag{14}$$

Hieraus entnimmt man für λ_1 die scharfe Abschätzung

$$|\lambda_1 - \lambda_1^*(Q, \theta) + a_{11}q\, e^{2i\theta}| \leqq a_{11}q. \tag{15}$$

Mittels (13) schließt man aus (15), daß $\alpha_1^*(Q, \theta)$ eine Lösung des Extremalproblems in $\Sigma(\mathfrak{G}, Q)$

$$\operatorname{Re}(e^{-2i\theta}\alpha_1) = \text{Max!}$$

darstellt. In völliger Analogie zum Beweis von Satz 1 in [10] ergibt sich

Folgerung 1: *Der genaue Wertebereich von α_1 [siehe (12)] für alle Abbildungen $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, Q)$ ist eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt bei*

$$[\alpha_1^*(Q, 0) + \alpha_1^*(Q, \pi/2)]/2$$

und dem Radius

$$|\alpha_1^*(Q, 0) - \alpha_1^*(Q_1\pi/2)|/2.$$

Dabei sind $\alpha_1^*(Q, 0)$ die Koeffizienten α_1 bei $f^*(z, Q, \theta)$ in (12) für $\theta \in [0, \pi)$.

5.2. Abschätzung der Schwarzschen Ableitung $\{f(z), z\}$

Im folgenden sei neben den zuvor an $\hat{Q}$ und $\hat{\theta}$ gestellten Voraussetzungen $T(w) = f'(\zeta)/[w - f(\zeta)]$, wobei $\zeta \in \mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ sein möge. Die Voraussetzung A) ist offenbar erfüllt, und da $T[f(z)] = f'(\zeta)/[f(z) - f(\zeta)]$ die Vollebene stetig und schlicht auf sich abbildet, in $\mathfrak{G}$ konform ist (wobei bei $z = \zeta$ die Entwicklung $(z - \zeta)^{-1}$ + reguläre Funktion vorliegt) und in $\mathfrak{B}$ (3) genügt, folgt leicht die Existenz von $f^*(z, Q, \theta)$, d. h. Voraussetzung B) ist ebenfalls erfüllt. Damit erhält man wie in [20: Beweis von Satz 6.2] aus Satz 1 dieser Arbeit

$$\left| \frac{1}{6} \{f(z), z\}_{z=\zeta} + R_{z\mathfrak{z}}(z, \mathfrak{z}) \bigg|_{z=\mathfrak{z}=\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\int_{\mathfrak{C}} a(z)\, \overline{\varphi_\nu(z)}\, dz \right] \varphi_\nu'(\zeta) \right|$$
$$\leqq q K_*(\zeta, \bar{\zeta}),$$

wobei $a(z) = (1 - q^2) \{T[f^*(z, Q, \theta)]\}_z$ in $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ gilt und von $\theta \in [0, \pi)$ abhängt. In (16) wird das Gleichheitszeichen jeweils für $f^*(z, Q, \theta)$ realisiert. Letztere Funktion ist durch (3) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Diese Konstante hat aber keinen Einfluß auf den Wert der Schwarzschen Ableitung. Durch elementargeometrische Überlegungen ergibt sich wieder

Folgerung 2: *Der genaue Wertebereich von* $\{f(z), z\}_{z=\zeta}$ $(\zeta \in \mathfrak{G} \setminus \{\infty\})$ *für* $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, Q)$ *ist eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt bei*

$$[\{f^*(z, Q, 0), z\}_{z=\zeta} + \{f^*(z, Q, \pi/2), z\}_{z=\zeta}]/2$$

und dem Radius

$$|\{f^*(z, Q, 0), z\}_{z=\zeta} - \{f^*(z, Q, \pi/2), z\}_{z=\zeta}|/2$$

5.3. Abschätzung des Golusinschen Funktionals

Es seien γ_l $(l = 1, 2, \ldots, m)$ nicht sämtlich verschwindende komplexe Zahlen, und neben den Bedingungen an $\hat{Q}$ und $\hat{\theta}$ sei im folgenden

$$T(w) = -\sum_{l=1}^{m} \gamma_l \log [w - f(z_l)]$$

mit $z_l \in \mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ für alle $l = 1, 2, \ldots, m$. Voraussetzung A) ist offensichtlich erfüllt, und aus Satz 1 in [12] ergibt sich, daß Voraussetzung B) ebenfalls erfüllt ist. Damit erhält man wie in [20: Beweis von Satz 6.5], daß der Wertebereich des Golusinschen Funktionals für $f(z) \in \Sigma(\mathfrak{G}, Q)$, gegeben durch

$$L(f) = \sum_{k,l=1}^{m} \gamma_k \gamma_l \log \left[\frac{z_k - z_l}{f(z_k) - f(z_l)} \right] \tag{17}$$

in einer Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt

$$\sum_{k,l=1}^{m} \gamma_k \gamma_l R(z_k, z_l) + \frac{1}{2\pi l} \sum_{l=1}^{m} \gamma_l \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\int_{\mathfrak{C}} a(z)\, \overline{\varphi_\nu(z)} dz \right] \varphi_\nu(z_l) \right\}$$

und dem Radius

$$\sum_{k,l=1}^{m} \gamma_k \bar{\gamma}_l P(z_k, \overline{z_l})$$

enthalten ist. Dabei gilt $\mathfrak{a}(z) = -(1-q^2)\{T[f^*(z, Q, \theta)]\}_z$ in $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$, und $\mathfrak{a}(z)$ hängt insbesondere von θ ab, das in Satz 1 vorgegeben wird. Die obige Kreisscheibe ist ferner abgeschlossen, und der Wert des Funktionals für $f^*(z, Q, \theta)$ liegt dabei jeweils auf dem Rand derselben. Wie im Abschnitt 5.2 ergibt sich hieraus

Folgerung 3: *Der genaue Wertebereich des Golusinschen Funktionals (siehe (17)) für alle Abbildungen $f(z)$ aus $\Sigma(\mathfrak{G}, Q)$ ist eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt*

$$\{L[f^*(z, Q, 0)] + L[f^*(z, Q, \pi/2)]\}/2$$

und dem Radius

$$|L[f^*(z, Q, 0)] - L[f^*(z, Q, \pi/2)]|/2.$$

Bemerkungen: a) Die Folgerungen 1, 2 und 3 verallgemeinern die Folgerung aus Satz 5.2 in [20] und die dortigen Sätze 6.2 und 6.5, die sämtlich den Fall von konformen Abbildungen des Gebietes $\mathfrak{G}$ behandeln. Außerdem sind solche Spezialfälle auch in (17: S. 304/2.] angegeben worden.

b) In [10] und [12] sind diese 3 Funktionale unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen abgeschätzt worden. Die Folgerungen 1, 2 und 3 stellen Spezialfälle dieser Überlegungen dar, die dort mit Hilfe von Variationsmethoden bzw. der Grötzschschen Flächenstreifenmethode zu entsprechenden Abschätzungen führten. Die Wertebereiche anderer dort betrachteter Funktionale sind durch analoge Rechnungen wie in diesem Abschnitt in hier zugrundegelegten Spezialfällen ebenfalls bestimmbar.

c) Ist $\mathfrak{G}$ das Äußere des Einheitskreises, so enthalten außerdem [2, 3, 5, 8, 9, 18, 21, 22] Spezialfälle der Folgerungen 1–3.

6. Ein Flächensatz für eine Klasse nichtschlichter Abbildungen

Es sei $N(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ die Menge aller in $\mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ analytischen Funktionen $w(z)$, die bei $z = \infty$ die Entwicklung z + reguläre Funktion haben und für die $\overline{w(z)}$ nach $\mathfrak{B}_j$ jeweils Q_j-quasikonform fortsetzbar ist ($j = 1, 2, \ldots, n$). Aus allgemeinen Sätzen in [1: Chapter V] entnimmt man, wenn $|w_{\bar z}(z)|^2$ über $\mathfrak{B}$ integrierbar ist,

$$w_z(z) - 1 = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathfrak{B}} \frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta. \tag{18}$$

Dabei ist $\zeta = \xi + i\eta$. Aus (18) entnimmt man wegen der Isometrie des T-Operators

$$\iint_{\mathfrak{B}} |w_z(z) - 1|^2\, dx\, dy + \iint_{\mathfrak{G}} |w'(z) - 1|^2\, dx\, dy = \iint_{\mathfrak{B}} |w_{\bar z}(z)|^2\, dx\, dy. \tag{19}$$

Aus (19) folgt die Endlichkeit des zweiten Integrals auf der linken Seite dieser Gleichung und damit die Darstellung in $\mathfrak{G}$

$$w(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu \varphi_\nu(z) + \text{const}. \tag{20}$$

Die Funktionen $\varphi_\nu(z)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) sind aus dem Laurentschen Funktionensystem in [20] gewählt. Um im weiteren ähnlich wie in Abschnitt 2 vorgehen zu können, benötigt man folgende *Voraussetzung:*

C) Die Gleichung

$$w_{\bar z}(z) = \frac{Q_j + 1}{Q_j - 1}\, e^{2i\theta_j}\overline{w_z(z)} \quad \text{in } \mathfrak{B}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt eine Lösung $w^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$ in $N(\mathfrak{G}, \hat{Q})$.

Durch analoge Rechnungen wie in Abschnitt 2 folgt dann

Satz 2: *Für alle Abbildungen* $w(z) \in N(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ *gilt unter Voraussetzung* C) *mit den Koeffizienten aus* (20)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\mu_\nu - b_\nu|^2 \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j + 1}{Q_j - 1}\, e^{-2i\theta_j} \int_{\mathfrak{C}_j} w^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})\, \varphi_\nu'(z)\, dz \right|^2, \tag{21}$$

wobei $\hat{\theta}$ *wie in Abschnitt* 1 *beliebig, aber dann fest vorgegeben wird. Dabei ist*

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathfrak{C}_j} \{1 + 4Q_j w_z^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})/(Q_j - 1)^2\}\, \overline{\varphi_\nu(z)}\, dz \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Für $w^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$ *steht in* (21) *das Gleichheitszeichen.*

Die Diskussion des Gleichheitsfalles wird für $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$ und $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ bei einfach zusammenhängenden Gebieten und bei Grunskyschen Gebieten durchgeführt. Dabei werden $N(\mathfrak{G}, \hat{Q})$ bzw. $w^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})$ mit $N(\mathfrak{G}, Q)$ bzw. $w^*(z, Q, \theta)$ benannt, und es wird $\mathfrak{q} = (Q + 1)/(Q - 1)$ gesetzt. Fordert man noch, daß $\mathfrak{q}$ kein Fredholmscher Eigenwert zum Neumannschen Kern (siehe [4: S. 3ff.]) von $\mathfrak{C}$ ist, so folgt aus den Überlegungen in [15], daß C) erfüllt ist und $w^*(z, Q, \theta)$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt wird. Analog wie in Abschnitt 3 ergibt sich

Satz 2′: *Unter den Voraussetzungen, daß* $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$ *und* $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ *und außerdem* $\mathfrak{q}$ *kein Fredholmscher Eigenwert zum Neumannschen Kern von* $\mathfrak{C}$ *ist, steht bei einfach zusammenhängenden Gebieten der betrachteten Klasse, die nicht vom Grunskyschen Typ sind, das Gleichheitszeichen in* (21) *nur für* $w^*(z, Q, \theta)$ + const. *Hingegen gilt unter den zuvor genannten Voraussetzungen bei Grunskyschen Gebieten für alle Abbildungen* $w^*(z, Q, \sigma)$ + const *mit* $\sigma \in [0, \pi)$ *und nur für diese in* (21) *das Gleichheitszeichen.*

Bemerkung: In [13] ist dieses Problem für das Äußere des Einheitskreises als Gebiet $\mathfrak{G}$ betrachtet worden. Die Sätze 2 und 2′ verallgemeinern die dortigen Überlegungen.

7. Flächensätze bei ortsabhängigen Dilatationsbeschränkungen

Bei Gültigkeit der Voraussetzungen A) und B) lassen sich die bisherigen Überlegungen auch für folgende Abbildungsklasse anwenden. Sei $\Sigma[\mathfrak{G}, p_0(z)]$ die Menge aller schlichten stetigen Abbildungen $f(z)$ der Vollebene auf sich, die in $\mathfrak{G}$ konform sind, wobei bei ∞ die Entwicklung z + reguläre Funktion vorliegt, und für die fast überall in $\mathfrak{B}$

$$|f_{\bar z}(z)/f_z(z)| \leqq [p_0(z) - 1]/[p_0(z) + 1] \tag{23}$$

gilt. Dabei sei $p_0(z) \geqq 1$ eine in $\mathfrak{B}$ meßbare und beschränkte Funktion. Der Term auf der rechten Seite von (23) wird im weiteren mit $q(z)$ bezeichnet. Wendet man in einer analogen Herleitung wie in Abschnitt 2 (23) zur Elimination von $f_{\bar z}(z)$ an, und ersetzt man dabei $\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z$ in (5) jeweils durch

$$\varrho_j\{T[f^*(z, \hat{Q}, \hat{\theta})]\}_z/[1 - q^2(z)]$$

in $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, so erhält man einen verallgemeinerten Flächensatz. $\hat{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ ist dabei ein n-Tupel aus komplexen Zahlen. Somit ergibt sich eine $3n$-parametrische Schar (Parameter $\hat{Q}$, $\hat{\theta}$ und $\hat{\varrho}$) von Abschätzungen. Ferner kann $\hat{\varrho}$ so gewählt werden, daß die rechte (von $f(z) \in \Sigma[\mathfrak{G}, p_0(z)]$ unabhängige) Seite der Ungleichung bei fest gewählten $\hat{Q}$ und $\hat{\theta}$ einen minimalen Wert erhält. Der Übersichtlichkeit halber wird ein einfacher Spezialfall betrachtet. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Grunskysches Gebiet, $T(w) \equiv w$, $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$, $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_n = \varrho$. Die Voraussetzungen A) und B) sind hier offenbar erfüllt, und in der angegegebenen Weise erhält man nach einiger Rechnung (einschließlich der Minimierung der rechten Seite)

Satz 3: *Ist $\mathfrak{G}$ ein Grunskysches Gebiet und gilt $T(w) \equiv w$, so ergibt sich für alle $f(z) \in \Sigma[\mathfrak{G}, p_0(z)]$ mit den Koeffizienten in* (1)

$$\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \leqq |\mathfrak{B}| - |\mathfrak{B}|^2 \cdot \left[\iint_{\mathfrak{B}} \frac{dx\,dy}{1 - q^2(z)}\right]^{-1}. \tag{24}$$

Ferner ist

$$\varrho = |\mathfrak{B}| \cdot \left[\iint_{\mathfrak{B}} \frac{dx\,dy}{1 - q^2(z)}\right]^{-1} \tag{25}$$

das Ergebnis der Minimierung der rechten Seite.

Im folgenden wird eine relativ große Funktionenklasse der $p_0(z)$ angegeben, für die in (24) das Gleichheitszeichen nicht stehen kann. Es sei $\mathfrak{D}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{B}$, wobei hier $\mathfrak{G}$ im weiteren unverändert ein Grunskysches Gebiet ist. Weiterhin habe $\mathfrak{D}$ einen positiven Inhalt. Setzt man auf $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{D}$ nun $p_0(z) \equiv 1$, so ist klar, daß jedes $f(z) \in \Sigma[\mathfrak{G}, p_0(z)]$ für alle endlichen $z \notin \mathfrak{D}$ analytisch ist und $f_z(z)$ ebenfalls diese Eigenschaft hat. Für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (24) ist notwendig, daß

$$f_z(z) = \varrho \cdot f_z^*(z, Q, \theta)/[1 - q^2(z)]$$

fast überall in $\mathfrak{B}$ gilt. In unserem Fall folgt für $z \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{D}$ $f_z(z) \equiv \varrho$. Damit gilt, da $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{D}$ eine offene Menge ist, sogar $f'(z) = \varrho$ in $\mathfrak{G}$. Wählt man in $\mathfrak{D}$ $p_0(z) > 1$, so ergibt sich aus (25) $\varrho < 1$. Offenbar widerspricht das der Normierung von $f(z)$ im Fernpunkt.

Für diejenigen $p_0(z)$ mit $p_0(z) \equiv 1$ in $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{D}$ und $p_0(z) > 1$ in $\mathfrak{D}$ kann daher in (24) das Gleichheitszeichen für eine Funktion aus $\Sigma[\mathfrak{G}, p_0(z)]$ nicht stehen, wobei $\mathfrak{D}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{B}$ ist. Jedoch steht für $p_0(z) \equiv Q$ $(Q \geqq 1)$ für $f^*(z, Q, \sigma)$ + const mit beliebigem $\sigma \in [0, \pi)$ das Gleichheitszeichen in (24), die dann einen Spezialfall von (6) darstellt, wie man 4.b) entnimmt.

Da $p_0(z)$ als beschränkt vorausgesetzt wurde, ist es interessant, die Güte der Abschätzung (24) zu untersuchen, wenn $p_0(z)$ durch das Supremum von $p_0(z)$ über $\mathfrak{B}$ (im folgenden mit sup bezeichnet) ersetzt wird. Aus (24) folgt dann

$$\pi \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \leqq [(\sup - 1)/(\sup + 1)]^2 \cdot |\mathfrak{B}|.$$

Unterscheidet sich $p_0(z)$ auf einer Menge positiven Maßes von dem erwähnten Supremum, so stellt (24) eine bessere Abschätzung dar, als es mittels Satz 1 bei Ersetzung von $p_0(z)$ durch sein Supremum über $\mathfrak{B}$ möglich wäre. Aus Satz 3 erhält man abschließend

Folgerung 4. *Ist* $\mathfrak{G}$ *das Äußere des Einheitskreises, so ergibt sich für alle* $f(z) \in \Sigma[\mathfrak{G}, p_0(z)]$ *mit den Koeffizienten aus* (12)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |\alpha_\nu|^2 \leqq 1 - \pi \left[\iint\limits_{|z|<1} \frac{dx\,dy}{1 - q^2(z)} \right]^{-1}$$

bzw.

$$|\alpha_1| \leqq \left\{ 1 - \pi \left[\iint\limits_{|z|<1} \frac{dx\,dy}{1 - q^2(z)} \right]^{-1} \right\}^{1/2}.$$

Die beiden Abschätzungen sind für in $|z| < 1$ *konstantes* $p_0(z)$ *scharf.*

Der Verfasser dankt Herrn Doz. Dr. R. Kühnau für die Unterstützung bei der Erarbeitung des Manuskripts durch zahlreiche Anregungen und Hinweise.

LITERATUR

[1] Ahlfors, L. V.: Lectures on quasiconformal mappings. Toronto—New York—London 1966. Russ. Übers.: Moskau 1969.

[2] Аленицын, Ю. Е.: Некоторые теоремы площадей для аналитических функций с квазиконформным продолжением. Мат. сборник 94 (1974), 114—125.

[3] Bieberbach, L.: Einführung in die konforme Abbildung. 6. Auflage, Berlin 1967.

[4] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1964.

[5] Golusin, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957 (Übers. a. d. Russ. (2. Auflage Moskau 1966)).

[6] Гутлянский, В. Я., и В. А. Щепетев: Обобщенная теорема площадей для одного класса q-квазиконформных отображений. Докл. Акад. Наук СССР 218 (1974), 509 bis 512. Engl. Übers.: Soviet Math. Dokl. 15 (1974), 1362—1366.

[7] Jenkins, J. A.: Some area theorems and a special coefficient theorem. Illinois J. Math. 8 (1964), 80—99.

[8] Kraus, W.: Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung. Mittl. math. Sem. Gießen 21 (1932), 1—28.

[9] Крушкаль, С. Л.: Квазиконформные отображения и Римановы поверхности. Новосибирск 1975.
Engl. Übers.: Krushkal', S. L.: Quasiconformal mappings and Riemann surfaces. Washington 1979.

[10] Kühnau, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen. Math. Nachr. 40 (1969), 1—11.

[11] Kühnau, R.: Bemerkungen zu den Grunskyschen Gebieten. Math. Nachr. 44 (1970), 285 bis 293.

[12] Kühnau, R.: Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen. Math. Nachr. 48 (1971), 77—105.

[13] Kühnau, R.: Eine Klasse von nichtschlichten konformen Abbildungen mit einer schlichten quasikonformen Fortsetzung. Math. Nachr. 59 (1974), 261—263.

[14] Kühnau, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. Ann. Polon. Math. 31 (1975/76), 269—289.

[15] Kühnau, R.: Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. Math. Nachr. 76 (1977), 139—152.

[16] Kühnau, R.: Eine Kernfunktion zur Konstruktion gewisser quasikonformer Normalabbildungen. Math. Nachr. 95 (1980), 229—235.

[17] Лебедев, Н. А.: Принцип площадей в теории однолистных функций. Москва 1975.
[18] Lehto, O.: Schlicht functions with a quasiconformal extension. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser AI, **500** (1971), 3—9.
[19] Meschkowski, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.
[20] Милин, И. М.: Однолистные функции и ортонормированные системы. Москва 1971. Engl. Übers.: Milin, I. M.: Schlicht functions and orthonormalized systems. Transl. Math. Monographs. Amer. Math. Soc.: Providence, R. I. 1977.
[21] Nehari, Z.: Some inequalities in the theory of functions. Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 256—286.
[22] Pommerenke, Ch.: Univalent functions. Göttingen 1975.

Manuskripteingang: 16. 07. 1982; in rev. Fassung: 1. 12. 1982

VERFASSER:

Erich Hoy
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4020 Halle, Universitätsplatz 8/9.