Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (1) 1984, S. 7–17

Riemannfunktionen und Differentialoperatoren

K. W. Bauer

Es wird gezeigt, daß die komplexe Riemannfunktion einer formal hyperbolischen Differentialgleichung durch einen Differentialoperator dargestellt werden kann, wenn für die Lösungen der Differentialgleichung eine eingliedrige Darstellung mit Hilfe eines Differentialoperators möglich ist. Die Anwendungsmöglichkeiten für die explizite Bestimmung von Riemannfunktionen bzw. deren Erzeugenden werden an verschiedenen Beispielen demonstriert.

Показано, что комплексная функция Римана-Грина формально гиперболического дифференциального уравнения может быть представлена дифференциальным оператором, если для решений этого дифференциального уравнения возможно представление с помощью какого — то дифференциального оператора. На нескольких примерах демонстрируется применение этого метода для определения функций Римана-Грина и их образующих.

It is shown that the complex Riemann funktion of a formally hyperbolic differential equation can be represented by a differential operator if a representation of solutions is possible by at least one differential operator. The application of this method is illustrated by several examples.

1. Einführung

In [8] hat E. Lanckau die Bedeutung und breite Anwendbarkeit der Riemannfunktionen herausgestellt und einen Überblick über die bis dahin bekannten derartigen Funktionen gegeben. Beziehungen zwischen Riemannfunktionen und Bergman-Operatoren wurden in [6, 7, 12] untersucht; in [9] wurden Relationen zwischen den Riemannfunktionen assoziierter Gleichungen herausgestellt. Außerdem wurden Riemannfunktionen selbstadjungierter Differentialgleichungen als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen [5] bzw. partieller Differentialgleichungssysteme [11] bestimmt. Da bisher — speziell bei nicht selbstadjungierten Differentialgleichungen — nur wenige Riemannfunktionen explizit bekannt sind, ist die Bestimmung weiterer Funktionen dieser Art von besonderem Interesse.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß allgemein die Riemannfunktion einer formal hyperbolischen Differentialgleichung mit Hilfe eines Differentialoperators dargestellt werden kann, wenn es zumindest eine eingliedrige Lösungsdarstellung durch einen linearen Differentialoperator der Ordnung n gibt. Die Anwendung dieses Verfahrens zur expliziten Bestimmung von Riemannfunktionen bzw. deren Erzeugenden wird an einer Reihe von charakteristischen Beispielen demonstriert.

2. Ein allgemeiner Darstellungssatz

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann eine formal hyperbolische Differentialgleichung in der Form

$$w_{z\zeta} + A(z, \zeta)\, w_\zeta + B(z, \zeta)\, w = 0 \tag{1}$$

angenommen werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Koeffizienten A und B im Zylindergebiet $G \times \overline{G}$ holomorph sind, wobei G ein Fundamentalgebiet im Sinne von I. N. VEKUA [10] bezeichnet. Für Lösungen der Differentialgleichung (1) gebe es zumindest eine eingliedrige Darstellung der Form

$$w = \sum_{k=0}^{n} a_k(z, \zeta)\, g^{(k)}(z), \qquad g(z) \text{ hol. in } G, \tag{2}$$

bzw.

$$w = \sum_{k=0}^{m} b_k(z, \zeta)\, h^{(k)}(\zeta), \qquad h(\zeta) \text{ hol. in } \overline{G},$$
$$a_k(z, \zeta), \qquad b_k(z, \zeta) \text{ hol. in } G \times \overline{G}, \qquad a_n, b_m \neq 0. \tag{3}$$

Dann gilt notwendig

$$a_n(z, \zeta) = \gamma(z) \quad \text{und} \quad b_m(z, \zeta) = \frac{\delta(\zeta)}{\alpha(z, \zeta)},$$
$$\gamma(z) \text{ hol. in } G, \qquad \delta(\zeta) \text{ hol. in } \overline{G}, \qquad \gamma\delta \neq 0, \tag{4}$$

wobei $A = (\log \alpha)_z$, $\alpha(z, \zeta)$ hol., $\alpha \neq 0$ in $G \times \overline{G}$, verwendet wird.

Satz 1: a) *Wenn zu* (1) *eine Lösungsdarstellung gemäß* (2) *existiert, so läßt sich die Riemannfunktion zu* (1) *durch*

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t, \tau)\, g_R^{(k)}(t) \tag{5}$$

mit einer eindeutig bestimmten in G holomorphen Erzeugenden $g_R(t)$ mit $g_R^{(k)}(z) = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ darstellen.

b) *Wenn zu* (1) *eine Lösungsdarstellung gemäß* (3) *existiert, so läßt sich die Riemannfunktion zu* (1) *durch*

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \sum_{k=0}^{m} b_k(t, \tau)\, h_R^{(k)}(\tau) \tag{6}$$

mit einer eindeutig bestimmten in $\overline{G}$ holomorphen Erzeugenden $h_R(\tau)$ mit $h_R^{(k)}(\zeta) = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, m-1$ darstellen.

Beweis: a) $R(z, \zeta; t, \tau)$ ist Riemannfunktion zu (1) (vgl. [10]), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) R ist bezüglich t und τ Lösung von (1).

(ii) $R(t, \zeta; t, \tau) = 1$.

(iii) $R(z, \tau; t, \tau) = \dfrac{\alpha(z, \tau)}{\alpha(t, \tau)}$.

Die Bedingung (i) ist durch den Ansatz (5) erfüllt. Zur Realisierung von (iii) setzt man $\tau = \zeta$ und erhält

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t, \zeta)\, g_R^{(k)}(t) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)}. \tag{7}$$

Damit liegt eine lineare inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung für die gesuchte Erzeugende $g_R(t)$ vor. Fordert man nun

$$g_R^{(k)}(z) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

so liegt ein Anfangswertproblem mit einer in $U_\varepsilon(z) \subset G$ eindeutig bestimmten holomorphen Lösung $g_R(t)$ vor (vgl. [4]). Diese kann ins ganze Gebiet G fortgesetzt werden und stellt dort, da G einfach zusammenhängend ist, eine eindeutige holomorphe Funktion dar. Für diese Lösung gilt wegen (7), (8) und (4) mit $t = z$ $g_R^{(n)}(z) = \dfrac{1}{\gamma(z)}$, womit wegen (5) auch die Bedingung (ii) erfüllt ist.

b) Existiert eine Lösungsdarstellung der Form (3), so setzt man R gemäß (6) an und erhält wegen (ii) mit $t = z$ für $h_R(\tau)$ die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{m} b_k(z, \tau)\, h_R^{(k)}(\tau) = 1. \tag{9}$$

Mit

$$h_R^{(k)}(\zeta) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{10}$$

liegt wieder ein eindeutig lösbares Anfangswertproblem für (9) vor. Für die Lösung gilt wegen (9), (10) und (4) mit $\tau = \zeta$ $h_R^{(m)}(\zeta) = \dfrac{\alpha(z, \zeta)}{\delta(\zeta)}$, womit wegen (6) auch die Bedingung (iii) erfüllt wird ∎

Wenn für eine Differentialgleichung (1) eine zweigliedrige Lösungsdarstellung mit Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} &w = \sum_{k=0}^{n} a_k(z, \zeta)\, g^{(k)}(z) + \sum_{k=0}^{m} b_k(z, \zeta)\, h^{(k)}(\zeta) \\ &a_k(z, \zeta),\ b_k(z, \zeta) \text{ hol. in } G \times \overline{G}, \\ &a_n = \gamma(z) \neq 0, \qquad b_m = \frac{\delta(\zeta)}{\alpha(z, \zeta)} \neq 0, \qquad A = (\log \alpha)_z, \\ &g(z) \text{ und } h(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \overline{G}, \end{aligned} \tag{11}$$

existiert, so lassen sich weitergehende Aussagen formulieren.

Bezeichnet N die Menge aller Funktionenpaare $(\varphi(z), \psi(\zeta))$, $\varphi(z)$ und $\psi(\zeta)$ hol. in G bzw. $\overline{G}$, die die Null-Lösung liefern, wenn man sie in (11) als Erzeugende verwendet, so gilt das folgende

Korollar: *Wenn für die Differentialgleichung* (1) *eine Lösungsdarstellung der Form* (11) *existiert, so läßt sich die Riemannfunktion zu* (1) *stets in der Form*

$$R(z, \zeta : t, \tau) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t, \tau)\, g_R^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k(t, \tau)\, h_R^{(k)}(\tau) \tag{12}$$

mit

$$\big(g_R(t), -h_R(\tau)\big) \in N \tag{13}$$

darstellen.

Beweis: Unter der hier gemachten Voraussetzung läßt sich die Riemannfunktion nach Satz 1 gemäß (5) und (6) darstellen ∎

3. Explizite Bestimmung von Riemannfunktionen

Die im Satz 1 und im Korollar gewonnenen Aussagen lassen sich in vielfacher Weise zur expliziten Bestimmung von Riemannfunktionen anwenden.

a) In [3] wurde gezeigt, daß die Differentialgleichung (1) im Fall $B \neq 0$ in $G \times \bar{G}$ genau dann eine Lösung der Form

$$w = g'(z) + a_0(z, \zeta)\, g(z), \qquad g(z) \text{ hol. in } G, \tag{14}$$

besitzt, wenn die Koeffizienten A und B der Relation

$$(\log B)_{z\zeta} + B + A_\zeta = 0 \tag{15}$$

genügen. Für a_0 gilt sodann

$$a_0 = A + (\log B)_z. \tag{16}$$

Mit (7) und $A = (\log \alpha)_z$ folgt sodann

$$g'(t) + [\log \alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)]_t\, g(t) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)},$$

und durch Integration bei Berücksichtigung von (8)

$$g(t) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)} \int\limits_z^t B(\xi, \zeta)\, d\xi.$$

Unter Verwendung von (5) erhält man

Satz 2: *$\alpha(z, \zeta)$ und $B(z, \zeta)$ seien in $G \times \bar{G}$ holomorph, und es gelte*

$$\alpha(z, \zeta)\, B(z, \zeta) \neq 0 \quad \text{und} \quad (\log \alpha B)_{z\zeta} + B = 0. \tag{17}$$

Dann ist

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)} + \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)} \left[\log \frac{\alpha(t, \tau)\, B(t, \tau)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)}\right]_t \int\limits_z^t B(\xi, \zeta)\, d\xi \tag{18}$$

die komplexe Riemannfunktion der Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + (\log \alpha)_z\, w_\zeta + Bw = 0. \tag{19}$$

Dieses Ergebnis ist für die Anwendungen von Interesse, wenn es gelingt, Funktionen α und B zu bestimmen, die den Bedingungen (17) genügen. Setzt man $\alpha \equiv 1$, so muß B der Differentialgleichung

$$(\log B)_{z\zeta} + B = 0 \tag{20}$$

genügen, und es folgt

$$B = -\frac{2\varphi'(z)\, \psi'(\zeta)}{(\varphi + \psi)^2}, \qquad \varphi(z) \text{ und } \psi(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \bar{G}, \quad \varphi'\psi'(\varphi + \psi) \neq 0. \tag{21}$$

Die Riemannfunktion der zugehörigen Differentialgleichung (19) ist bekannt.

Falls $\alpha \not\equiv 1$ ist, lassen sich in verschiedener Weise Funktionen α und B bestimmen, die (17) genügen.[1])

(i) Geht man von der Potentialgleichung $U_{z\zeta} = 0$ aus, sind $\varphi(z)$ und $\psi(\zeta)$ in G bzw. $\bar{G}$ holomorph mit $\varphi + \psi \neq 0$, so erhält man mit $U = (\varphi + \psi)\, V$ die Differentialgleichung

$$V_{z\zeta} + [\log(\varphi + \psi)]_\zeta\, V_z + [\log(\varphi + \psi)]_z\, V_\zeta = 0.$$

Verwendet man die partikuläre Lösung

$$p = \frac{\gamma(z) + \delta(\zeta)}{\varphi + \psi}, \quad \gamma(z), \quad \delta(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \bar{G}, \quad p_z p_\zeta \neq 0 \text{ in } G \times \bar{G},$$

so folgt (vgl. [1]), daß mit $W = p_\zeta V_z - p_z V_\zeta$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$W_{z\zeta} + \left[\log \frac{\varphi + \psi}{p_\zeta}\right]_\zeta W_z + \left[\log \frac{\varphi + \psi}{p_z}\right]_z W_\zeta + EW = 0,$$

$$E = \frac{p_{zz} p_{\zeta\zeta}}{p_z p_\zeta} - \frac{\psi' p_{zz}}{p_z(\varphi + \psi)} - \frac{\varphi' p_{\zeta\zeta}}{p_\zeta(\varphi + \psi)} + 2\,[\log(\varphi + \psi)]_{z\zeta},$$

vorliegt. Transformiert man noch gemäß $W = p_\zeta(\varphi + \psi)^{-1}\, w$, so folgt

$$w_{z\zeta} + \left[\log \frac{p_\zeta}{p_z}\right]_z w_\zeta + [\log p_\zeta(\varphi + \psi)^2]_{z\zeta}\, w = 0$$

mit der Lösung

$$w = g' - \frac{p_z}{p_\zeta} h' + \frac{p_z \psi' - p_\zeta \varphi'}{p_\zeta(\varphi + \psi)} (g + h), \quad g(z), h(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \bar{G}.$$

Damit liegt eine Differentialgleichung des Typs (19) mit $(\log \alpha B)_{z\zeta} + B = 0$ vor, und es gilt

Satz 3: *Die Funktionen $\varphi(z)$, $\gamma(z)$ und $\psi(\zeta)$, $\delta(\zeta)$ seien in G bzw. $\bar{G}$ holomorph, und es gelte*

$$p = \frac{\gamma + \delta}{\varphi + \psi} \quad \textit{mit} \quad (\varphi + \psi)\, p_z p_\zeta \neq 0 \textit{ in } G \times \bar{G}.$$

Dann ist

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)} + \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)} \left[\log \frac{\alpha(t, \tau)\, B(t, \tau)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)}\right]_t \left[\log \frac{\beta(t, \zeta)}{\beta(z, \zeta)}\right]_\zeta$$

mit

$$\alpha(z, \zeta) = \frac{p_\zeta(z, \zeta)}{p_z(z, \zeta)}, \qquad \beta(z, \zeta) = p_\zeta(z, \zeta)\, \big(\varphi(z) + \psi(\zeta)\big),$$

$$B(z, \zeta) = [\log \beta(z, \zeta)]_{z\zeta}$$

---

[1]) Auch im Fall $\alpha \not\equiv 1$ sind die Riemannfunktionen zu gewissen Gleichungen der Form (19) bekannt. Setzt man z. B.

$$\alpha = e^{\varphi\psi}, \quad B = (1 + \nu)\, \varphi'\psi' \quad \text{oder} \quad \alpha = (\varphi + \psi)^{\varkappa - \lambda}, \quad B = \frac{-\varkappa(\lambda + 1)\, \varphi'\psi'}{(\varphi + \psi)^2},$$

$$\varphi(z),\ \psi(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \bar{G}, \quad \varphi(z) + \psi(\zeta) \neq 0,$$

so erhält man Differentialgleichungen, deren Riemannfunktionen in [5: Satz 6 bzw. Satz 7] zitiert werden. Verwendet man hier $\nu = -2$ bzw. $\varkappa = 1$ oder $\lambda = -2$, so ist die Bedingung (17) erfüllt, und man erhält die Riemannfunktionen für diese Spezialfälle durch (18).

Riemannfunktion der Differentialgleichung $w_{z\zeta} + (\log \alpha)_z w_\zeta + Bw = 0$.

(ii) Geht man von der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &U_{z\zeta} + (\log a)_z U_\zeta + bU = 0, \\ &a(z, \zeta), b(z, \zeta) \text{ hol. in } G \times \overline{G}, \quad a(z, \zeta) \neq 0, \end{aligned} \tag{22}$$

aus, und versucht man die Lösungen U von (22) vermöge $w = U_z + X(z, \zeta) U$ auf Lösungen der Differentialgleichung $w_{z\zeta} + Aw_\zeta + Bw = 0$ abzubilden, so erhält man das System

$$B = b - X_\zeta, \tag{23a}$$

$$\big(A - (\log a)_z\big)\big((\log a)_z - X\big) + \big((\log a)_z - X\big)_z = 0, \tag{23b}$$

$$X_{z\zeta} + AX_\zeta + X(B - b) = b_z - b(\log a)_z + AB. \tag{23c}$$

Die Relation (23b) wird mit $X = (\log a)_z$ erfüllt. Mit (23a) und (23c) folgt sodann

$$B = b - (\log a)_{z\zeta}, \qquad A = \left[\frac{a}{(\log a)_{z\zeta} - b}\right]_z.$$

Hilfssatz 1: *Bezeichnet U eine Lösung der Differentialgleichung*

$$U_{z\zeta} + (\log a)_z U_\zeta + bU = 0 \qquad \big(a(z, \zeta) \text{ hol.}, a \neq 0 \text{ in } G \times \overline{G}\big);$$

so erhält man durch $w = U_z + U(\log a)_z$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + (\log \alpha)_z w_\zeta + Bw = 0$$

mit $\alpha = \dfrac{a}{(\log a)_{z\zeta} - b}$, $B = b - (\log a)_{z\zeta} \neq 0$.

Setzt man in Hilfssatz 1 $b \equiv 0$ und $U = g(z)$, $g(z)$ hol. in G, so erhält man mit $w = g' + g(\log a)_z$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \left[\log \frac{a}{(\log a)_{z\zeta}}\right]_z w_\zeta - (\log a)_{z\zeta}\, w = 0. \tag{24}$$

Mit

$$\alpha = \frac{a}{(\log a)_{z\zeta}} \quad \text{und} \quad B = -(\log a)_{z\zeta} \tag{25}$$

folgt sodann

Satz 4: *$a(z, \zeta)$ sei in $G \times \overline{G}$ holomorph, und es gelte $a(\log a)_{z\zeta} \neq 0$. Dann ist*

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)} + \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)} \left[\log \frac{\alpha(t, \tau)\, B(t, \tau)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)}\right]_t \left[\log \frac{a(z, \zeta)}{a(t, \zeta)}\right]_\zeta$$

mit α und B gemäß (25) Riemannfunktion der Differentialgleichung (24).

(iii) Geht man zunächst wie unter (ii) vor, und setzt man zur Bestimmung einer Lösung des Systems (23)

$$X = -(\log Y)_z, \qquad Y \neq \frac{1}{a},$$

mit einer vorerst beliebigen in $G \times \overline{G}$ nicht verschwindenden Funktion Y, so folgt mit (23a) und (23b)

$$B = b + (\log Y)_{z\zeta}, \qquad A = \left[\log \frac{a}{(\log aY)_z}\right]_z, \qquad (\log aY)_z \neq 0.$$

Wenn man in (23c) einsetzt, so folgt nach geeigneter Zusammenfassung

$$(\log a Y)_{zz} \{b + (\log Y)_{z\zeta} + (\log Y)_\zeta (\log a Y)_z\}$$
$$= (\log a Y)_z \{b + (\log Y)_{z\zeta} + (\log Y)_\zeta (\log a Y)_z\}_z.$$

Die hier zu unterscheidenden Fälle lassen sich — nach Integration — durch

$$N_{z\zeta} + (\log a)_z N_\zeta + bN = 0$$

zusammenfassen, wobei $Y = \gamma(\zeta)\, N$ ($\gamma(\zeta)$ beliebig holomorph in $\bar{G}$, $\gamma \neq 0$) verwendet wird. Das System (23) ist also erfüllt, wenn N eine partikuläre Lösung von (22) bezeichnet. Mit Rücksicht auf den Aufbau der Koeffizienten A und B kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\gamma(\zeta) \equiv 1$ gesetzt werden.

Hilfssatz 2: *Bezeichnet U eine Lösung von* (22), *so erhält man durch* $w = U_z - U (\log Y)_z$ *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$w_{z\zeta} + (\log \alpha)_z w_\zeta + [b + (\log Y)_{z\zeta}]\, w = 0 \quad \textit{mit} \quad \alpha = \frac{a}{(\log a Y)_z}, \tag{26}$$

wenn Y eine beliebige partikuläre Lösung von (22) *in* $G \times \bar{G}$ *mit* $(\log a Y)_z \neq 0$ *bezeichnet.*

Setzt man in Hilfssatz 2 wieder $b \equiv 0$ und $U = g(z)$, $g(z)$ hol. in G, so erhält man mit $w = g' - g (\log Y)_z$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + (\log \alpha)_z w_\zeta + (\log Y)_{z\zeta}\, w = 0. \tag{27}$$

Mit Hilfe von Satz 2 folgt sodann

Satz 5: *$a(z, \zeta)$ sei in $G \times \bar{G}$ holomorph, $Y(z, \zeta)$ sei eine in $G \times \bar{G}$ definierte partikuläre Lösung der Differentialgleichung $U_{z\zeta} + (\log a)_z U_\zeta = 0$, und es gelte $a Y (\log a Y)_z \neq 0$. Dann ist*

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)} + \frac{\alpha(z, \zeta)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)} \left[\log \frac{\alpha(t, \tau)\, B(t, \tau)}{\alpha(t, \zeta)\, B(t, \zeta)}\right]_t \left[\log \frac{Y(t, \zeta)}{Y(z, \zeta)}\right]_\zeta$$

Riemannfunktion zu (27) *mit α gemäß* (26) *und* $B = (\log Y)_{z\zeta}$.

b) Die geschilderte Methode läßt sich auch zur Bestimmung der Riemannfunktion bei Differentialgleichungen anwenden, bei denen Lösungsdarstellungen mit linearen Differentialoperatoren höherer Ordnung bekannt sind.

(i) Verwendet man $a \equiv 1$ in Hilfssatz 2, und setzt man voraus, daß b der Differentialgleichung (20) genügt, so folgt

$$U_{z\zeta} + bU = 0, \tag{28}$$

$$w = U_z - U (\log Y)_z, \tag{29}$$

$$w_{z\zeta} - [\log (\log Y)_z]_z\, w_\zeta + [b + (\log Y)_{z\zeta}]\, w = 0 \tag{30}$$

und

$$Y_{z\zeta} + bY = 0. \tag{31}$$

Mit Rücksicht auf (14)—(16) wird die Riemannfunktion zu (30) in der Form

$$R = S_t - S [\log Y(t, \tau)]_t \tag{32}$$

mit

$$S(t, \tau) = g'(t) + g(t) [\log b(t, \tau)]_t, \qquad g(t) \text{ hol. in } G, \tag{33}$$

angesetzt. Wegen $R(z, \tau; t, \tau) = \dfrac{Y(z, \tau)\, Y_t(t, \tau)}{Y(t, \tau)\, Y_z(z, \tau)}$ folgt zunächst

$$S_t(t, \zeta) - S(t, \zeta)\,[\log Y(t, \zeta)]_t = \frac{Y(z, \zeta)\, Y_t(t, \zeta)}{Y(t, \zeta)\, Y_z(z, \zeta)}$$

und durch Integration

$$S(t, \zeta) = \frac{Y(z, \zeta)}{Y_z(z, \zeta)} \left\{ \frac{Y(t, \zeta)}{Y(z, \zeta)} - 1 \right\}.$$

Unter Verwendung von (33) mit $\tau = \zeta$ bestimmt man sodann die Erzeugende $g(t)$, die sich wegen $R(t, \zeta; t, \tau) = 1$ auf

$$g(t) = \frac{1}{b(t, \zeta)\, Y_z(z, \zeta)} \left\{ \int_z^t Y(\xi, \zeta)\, b(\xi, \zeta)\, d\xi + Y(z, \zeta) \left[\log \frac{b(t, \zeta)}{b(z, \zeta)}\right]_\zeta \right\}$$

reduziert. Mit (32) und (33) erhält man schließlich

Satz 6: *$b(z, \zeta)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung* (20), *$Y(z, \zeta)$ sei eine Lösung von* (31) *in $G \times \bar{G}$ mit $b Y Y_z \neq 0$. Dann ist*

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{CD}{b(t, \zeta)\, Y_z(z, \zeta)} + \frac{Y(t, \zeta) - Y(z, \zeta)}{Y_z(z, \zeta)} \left[\log \frac{b(t, \tau)}{b(t, \zeta)}\right]_t$$
$$+ \frac{Y(t, \tau)\, Y_t(t, \zeta) - Y_t(t, \tau)\, Y(t, \zeta) + Y_t(t, \tau)\, Y(z, \zeta)}{Y(t, \tau)\, Y_z(z, \zeta)}$$

mit

$$C = \left[\log \frac{b(t, \tau)}{b(t, \zeta)}\right]_{tt} - \left[\log \frac{b(t, \tau)}{b(t, \zeta)}\right]_t [\log b(t, \zeta)\, Y(t, \tau)]_t$$

und

$$D = Y(z, \zeta) \left[\log \frac{b(t, \zeta)}{b(z, \zeta)}\right]_\zeta + \int_z^t Y(\xi, \zeta)\, b(\xi, \zeta)\, d\xi$$

Riemannfunktion der Differentialgleichung (30).

(ii) Setzt man in Hilfssatz 2

$$a = 1, \quad b = -\frac{n(n+1)}{\eta^2}, \quad \eta = z + \zeta, \quad n \in \mathbf{N},$$

so wird eine Lösung U der Differentialgleichung

$$\eta^2 U_{z\zeta} - n(n+1)\, U = 0 \tag{34}$$

durch

$$w = U_z - U\,(\log Y)_z, \quad \eta^2 Y_{z\zeta} - n(n+1)\, Y = 0, \tag{35}$$

auf eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + (\log Y Y_z^{-1})_z\, w_\zeta - Y_z Y_\zeta Y^{-2} w = 0 \tag{36}$$

abgebildet. Für die in $G \times \bar{G}$ definierten Lösungen von (34) gilt (vgl. [3])

$$U = Dg(z) + D^* h(\zeta), \quad g(z), \quad h(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \bar{G}, \tag{37}$$

mit

$$D = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{\eta^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial z^k}, \qquad D^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{\eta^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial \zeta^k}, \qquad A_k^n = \frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!}.$$

Wegen Satz 1 a) läßt sich die Riemannfunktion zu (36) mit einer eindeutig bestimmten Erzeugenden $g(t)$ in der Form

$$R(z, \zeta; t, \tau) = U_t(t, \tau) - U(t, \tau)\,[\log Y(t, \tau)]_t, \tag{38}$$

$$U(t, \tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{(t+\tau)^{n-k}}\, g^{(k)}(t) \tag{39}$$

darstellen. Berücksichtigt man noch

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{(t+\zeta)^{n-k}}\, g^{(k)}(t) = K^n g, \qquad K = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{n+1}{t+\zeta},$$

so folgt mit (38) und $\tau = \zeta$ zunächst $K^n g = \dfrac{Y(t,\zeta) - Y(z,\zeta)}{Y_z(z,\zeta)}$. Verwendet man sodann den Integraloperator

$$IH(t; z, \zeta) = \int_z^t H(\xi; z, \zeta)\, d\xi,$$

so folgt

$$g(t) = \frac{(t+\zeta)^{n+1}}{Y_z(z,\zeta)}\, I^n\, \frac{Y(t,\zeta) - Y(z,\zeta)}{(t+\zeta)^{n+1}}. \tag{40}$$

Setzt man $g(t)$ in (39) ein, so erhält man

$$U = \frac{Y(t,\zeta) - Y(z,\zeta)}{Y_z(z,\zeta)} + U^*$$

mit

$$U^* = \frac{(t+\zeta)^{n+1}}{Y_z(z,\zeta)} \sum_{s=0}^{n-1} a_s \frac{I^{n-s}Q}{\sigma^{n-s}} \sum_{\mu=0}^{n-s} b_\mu \left(\frac{\sigma}{t+\zeta}\right)^{\mu},$$

$$Q = \frac{Y(t,\zeta) - Y(z,\zeta)}{(t+\zeta)^{n+1}}, \qquad a_s = \frac{(-1)^{n-s}(n+1)!}{s!\,(n-s)!}, \tag{41}$$

$$b_\mu = (-1)^\mu \binom{n-s}{\mu} \frac{(2n-s-\mu)!}{(n+1-\mu)!}, \qquad \sigma = t + \tau.$$

Satz 7: *$Y(z, \zeta)$ sei eine beliebige in $G \times \overline{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$\eta^2 Y_{z\zeta} - n(n+1)\, Y = 0, \qquad \eta = z + \zeta, \qquad n \in \mathbf{N},$$

mit $Y Y_z \neq 0$. Dann ist

$$R(z, \zeta; t, \tau) = \frac{Y_t(t,\zeta)}{Y_z(z,\zeta)} - \frac{Y_t(t,\tau)\,[Y(t,\zeta) - Y(z,\zeta)]}{Y(t,\tau)\, Y_z(z,\zeta)}$$

$$+ U_t^* - \frac{Y_t(t,\tau)}{Y(t,\tau)}\, U^* \tag{42}$$

Riemannfunktion der Differentialgleichung (36) *mit* U^* *gemäß* (41), *wobei*

$$U_t^* - \frac{Y_t(t,\tau)}{Y(t,\tau)} U^* = 0 \quad \textit{für} \quad z = t \quad \textit{und} \quad \zeta = \tau$$

ist.

Bezeichnet V eine Lösung der Differentialgleichung $\eta V_{z\zeta} + \lambda V_z + \nu V_\zeta = 0$, so ist $W = V_z$ Lösung von $\eta W_{z\zeta} + \lambda W_z + (\nu + 1) W_\zeta = 0$. Ist Y Lösung von (34), dann ist $v = \eta^{-(n+1)} Y(z,\zeta)$ Lösung der Differentialgleichung $\eta v_{z\zeta} + (n+1)(v_z + v_\zeta) = 0$. Verwendet man $D_z = \frac{\partial}{\partial z}$, so folgt damit, daß

$$Y = \eta^{n+1} D_z^n V \tag{43}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (34) darstellt, wenn V Lösung von

$$\eta V_{z\zeta} + (n+1) V_z + V_\zeta = 0$$

ist. Verwendet man (vgl. [3: S. 23, Satz 6])

$$V(z,\zeta) = \frac{\alpha(z)}{\eta^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \beta^{(k)}(\zeta)}{k!\,\eta^{n+1-k}} \qquad (\alpha(z), \beta(\zeta) \text{ hol. in } G \text{ bzw. } \bar{G}), \tag{44}$$

so erhält man durch (43) $Y(z,\zeta)$ gemäß (vgl. (37))

$$Y(z,\zeta) = D\alpha(z) + D^*\beta(\zeta). \tag{45}$$

Damit läßt sich die in (40) gegebene Erzeugende $g(t)$ integralfrei machen, und man erhält

$$g(t) = \frac{(t+\zeta)^{n+1}}{Y_t(z,\zeta)} \left\{ V(t,\zeta) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(t-z)^s}{s!} D_z^s V(z,\zeta) + \frac{(-1)^n Y(z,\zeta)}{n!\,\eta} \left[\frac{t-z}{t+\zeta} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(-1)^s (t-z)^s}{\eta^s} \right] \right\}$$

mit $V(z,\zeta)$ gemäß (44) und $Y(z,\zeta)$ gemäß (45)[2]. In entsprechender Weise läßt sich die Riemannfunktion in Satz 7 integralfrei machen. Man erhält für die in U^* auftretenden Terme $I^{n-s}Q$ die Darstellung

$$I^{n-s}Q = D_t^s V(t,\zeta) - \sum_{\mu=0}^{n-s-1} \frac{(t-z)^\mu}{\mu!} D_z^{s+\mu} V(z,\zeta) + \frac{(-1)^{n-s+1} Y(z,\zeta)}{n!} \left\{ \frac{s!}{(t+\zeta)^{s+1}} - \sum_{\mu=0}^{n-s-1} \frac{(-1)^\mu (t-z)^\mu (s+\mu)!}{\mu!\,\eta^{s+\mu+1}} \right\}.$$

LITERATUR

[1] Bauer, K. W.: Differentialoperatoren bei verallgemeinerten Euler-Gleichungen. Ber. d. math.-stat. Sektion im Forschungszentrum Graz 121 (1979), 1–17.

[2] Bauer, K. W.: On a Class of Riemann Functions. Applicable Analysis 13 (1982), 109 bis 126.

[3] Bauer, K. W., und St. Ruscheweyh: Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Lecture Notes in Mathematics 791 (1980), 1–258.

[2]) Weitere Beispiele für die Darstellung von Erzeugenden von Riemannfunktionen durch Differentialoperatoren findet man in [2].

[4] Bieberbach, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Springer-Verlag: Berlin 1965.
[5] Florian, H., und J. Püngel: Riemannfunktionen als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ber. d. math.-stat. Sektion im Forschungszentrum Graz 106 (1979), 1–47.
[6] Henrici, P.: Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion. Z. Angew. Math. Phys. 3 (1952), 228–232.
[7] Kracht, W.: Integraloperatoren für die Helmholtz-Gleichung. Z. Angew. Math. Mech. 50 (1970), 389–396.
[8] Lanckau, E.: Die Riemannfunktion selbstadjungierter Gleichungen. Wissensch. Z. d. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt XXI, 5 (1979), 535–540.
[9] Püngel, J.: Riemann Functions for Associated Operators. Ber. d. math.-stat. Sektion im Forschungszentrum Graz 158 (1981), 1–10.
[10] Vekua, I. N.: New Methods for Solving Elliptic Equations. North-Holland Publ. Co.: Amsterdam 1968.
[11] Wallner, H.: Riemannfunktionen als Lösungen partieller Differentialgleichungssysteme. Ber. d. math.-stat. Sektion im Forschungszentrum Graz 136 (1980), 1–28.
[12] Wallner, H.: Bergman-Operatoren und Riemannfunktionen bei einer Klasse formal hyperbolischer Differentialgleichungen. Ber. d. math.-stat. Sektion im Forschungszentrum Graz 139 (1980), 1–25.

Manuskripteingang: 10. 07. 1982

VERFASSER:

O. Univ.-Prof. Dr. Karl Wilhelm Bauer
Institut für Mathematik der Technischen Universität
A-8010 Graz, Kopernikusgasse 24