Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (1) 1984, S. 65–79

Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями I[1])

У. Е. Райтум

Für das Steuerungsproblem der Koeffizienten einer elliptischen Differentialgleichung in Divergenzform mit nichtlinearen niedrigsten Gliedern wird eine Darstellung für den Hauptteil des Lösungszuwachses der Zustandsgleichung bei nadelförmigen Variationen der Steuerfunktionen hergeleitet.

Для задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений дивергентного вида второго порядка с нелинейными младшими членами выводится представление для главной части приращения решения уравнения при игольчатых вариациях управляющих функций.

This paper considers optimal control problems for systems governed by second order elliptic differential equations in divergence form with nonlinear terms and control appear in all terms. The representation of the main part of increment for a solution of the state equation is given in the case of needle-like variations.

1. Большинство исследований по необходимым условиям оптимальности для задач управления коэффициентами эллиптических операторов посвящено линейным уравнениям и случаю, когда множество допустимых управляющих функций или множество допустимых операторов выпукло [1–4]. Задачи с невыпуклым множеством допустимых управляющих функций и линейным уравнением состояния системы рассмотрены в [5–7], в [8, 9] исследованы задачи с нелинейными уравнениями в случае выпуклости множества допустимых операторов, а в [10] на основе преобразования исходной экстремальной задачи получены ослабленные необходимые условия оптимальности в случае нелинейного уравнения со сложной структурой множества допустимых управлений.

Задачи с невыпуклым множеством допустимых операторов в случаях, когда главная часть эллиптического оператора зависит от управляющих функций, имеет ряд отличительных черт. Одной из основных особенностей является то, что главная часть приращения минимизируемого функционала существенно зависит от формы области, в которой варьируются управляющие функции [5]. Это свойство приводит к тому, что необходимые условия оптимальности не всегда могут быть сформулированы при помощи стандартной функции Лагранжа (пример 1).

Другой отличительной чертой таких задач является то, что не всегда допустимо традиционное расширение экстремальных задач путем перехода к выпуклой оболочке множества допустимых управляющих функций (пример 2), что тоже вызывает изменение вида необходимых условий оптимальности.

В настоящей работе, состоящей из двух частей, рассматриваются необходимые

[1]) Заключительная вторая часть работы будет опубликована в следующем номере этого же журнала.

условия оптимальности в задачах, где уравнение состояния системы имеет вид

$$\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x, u)\, z_{x_j} + a_{i0}(x, u, z)\right] - a_0(x, u, z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}) = 0.$$

Здесь u — управления, z — состояние системы. Множество допустимых управлений не предполагается выпуклым и присутствуют конечное число дополнительных ограничений в виде равенств или неравенств для интегральных функционалов.

Исследования ведутся, в основном, следуя классической схеме вывода принципа максимума [11] (см. также [12, 13]). В первой части работы выводится представление для главной части приращения состояния системы (функции z) при игольчатых вариациях управляющих функций в эллипсоидах. Во второй части устанавливается представление для главной части приращения функционалов и доказывается необходимое условие оптимальности, которое по форме близко к принципу максимума.

В заключении приводятся некоторые случаи, когда необходимые условия оптимальности позволяют обосновать расширение исходной задачи путем перехода к выпуклой оболочке множества допустимых операторов.

Близкая методика исследований была применена в [7].

Пример 1: Минимизируется функционал

$$J_1 = \int_{-1}^{1} (z_x - f)^2\, dx \tag{1.1}$$

по $z \in \mathring{W}_2^1(-1, 1)$, $u \in U_1 \equiv \{u\colon u \in L_\infty(-1, 1),\ u(x) = \alpha$ или $1/\alpha,\ x \in (-1, 1)\}$ при ограничениях

$$\frac{d}{dx}\left[u z_x - f\right] = 0, \qquad x \in (-1, 1), \tag{1.2}$$

где

$$f(x) \equiv \begin{cases} x - \gamma, & x \in (-1, 0], \\ x + \gamma, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

а константы $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$ фиксированы.

Решение уравнения (1.2) имеет представление

$$z_x = (f - c_0)\frac{1}{u}, \qquad c_0 \equiv \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{u}\, dx\right)^{-1} \int_{-1}^{1} \frac{f}{u}\, dx,$$

следовательно, функционал J_1 равен

$$J_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(f - c_0)^2}{u^2}\, dx - 2\int_{-1}^{1} \frac{f - c_0}{u} f\, dx + \int_{-1}^{1} f^2\, dx.$$

Так как функционал J_1 в конечном счете зависит только от фиксированных величин и интегралов

$$\int_{-1}^{1} \frac{f^2}{u^2}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{f}{u}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{u}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{f}{u^2}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{f^2}{u}\, dx,$$

а функция u принимает только два значения, то при помощи представлений для $u \in U_1$

$$\frac{1}{u} = 1 - v, \quad \frac{1}{u^2} = 1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)v, \qquad v(x) = \alpha - 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\alpha} - 1, \ x \in (-1, 1),$$

и теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости и замкнутости множества значений векторных мер [14] показывается, что задача минимизации функционала J_1 имеет решение (u^0, z^0) и $J_1(u^0, z^0) > 0$.

В то же время легко проверить, что при $\gamma > \alpha^{-2}$ необходимое условие экстремума в виде обычного принципа максимума

$$-z_x{}^0(x)\,\psi_x(x)\,u \geqq -z_x{}^0(x)\,\psi_x(x)\,u^0(x), \qquad x \in (-1, 1), \qquad u \in U_1, \tag{1.3}$$

где ψ — решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\,[u^0\psi_x - 2(z_x{}^0 - f)] = 0, \qquad x \in (-1, 1), \quad \psi \in \mathring{W}_2{}^1(-1, 1),$$

не выполняется. В самом деле, если бы соотношение (1.3) выполнялось, то после подставления в (1.3) явных выражений для функций z^0 и ψ, следовало бы справедливость соотношения

$$\delta(x)\left\{\left(\frac{1}{u^0(x)} - 1\right)\delta(x) - c_1\right\}\left(u - u^0(x)\right) \leqq 0, \quad x \in (-1, 1), \qquad u \in [\alpha, 1/\alpha], \tag{1.4}$$

где

$$\delta(x) \equiv f(x) - \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^0}\,dx\right)^{-1} \int_{-1}^{1} \frac{f}{u^0}\,dx, \qquad c_1 \equiv \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^0}\,dx\right)^{-1} \int_{-1}^{1} \frac{\delta}{|u^0|^2}\,dx. \tag{1.5}$$

При помощи непосредственной проверки нетрудно убедиться, что соотношения (1.4) могут иметь место только тогда, когда $c_1 \neq 0$ и

$$c_1\delta(x)\left(1 - u^0(x)\right) \geqq 0 \qquad \forall\, x \in (-1, 1). \tag{1.6}$$

Поскольку функция δ строго монотонно возрастает, то из (1.6) следует, что оптимальное управление u^0 может иметь не более одной точки переключения. Наконец, прямые вычисления для функций

$$u^0(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in (-1, x_0], \\ 1/\alpha, & x \in (x_0, 1), \end{cases} \qquad u^0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, & x \in (-1, x_0], \\ \alpha, & x \in (x_0, 1), \end{cases}$$

показывают, что при $\gamma > \alpha^{-2}$ соотношения (1.4) не выполняются, т. е. условие экстремума в виде (1.3) не имеет места.

Пример 2: Минимизируется функционал

$$J_2(u) = \int_0^2 \left(z(u) - w\right)^2 dx$$

по

$$u \in U_2 \equiv \left\{u{:}\, u \in L_\infty(0, 2),\ u(x) = \alpha \quad \text{или} \quad \frac{1}{\alpha}, \ x \in (0, 2)\right\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ фиксировано, $z(u)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dx}\,[uz_x] - b(x, z_x) = \frac{d}{dx}\,w_x - b(x, w_x), \qquad x \in (0, 2), \tag{1.7}$$

относительно $z \in \mathring{W}_2^1(0, 2)$,

$$b(x, t) \equiv \begin{cases} b_0(x)\,|t|^2, & |t| \leqq t_0, \\ b_0(x)\,t_0^2, & |t| > t_0, \end{cases} \quad b_0(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \in [1, 2), \end{cases} \quad t_0 > 2,$$

и w является произвольной дважды непрерывно дифференцируемой в $[0, 2]$ функцией такой, что

$$\begin{aligned} &w(0) = 0, \quad w(2) = 0, \quad w_x(0) = 0, \\ &w_x(x) > 0, \quad x \in (0, 1), \quad |w_x(x)| \leqq \alpha^2(t_0 - 1), \quad x \in (0, 2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Расширенная задача минимизации функционала J_2 по $u \in \overline{\text{co}}\, U_2$, где $\overline{\text{co}}\, U_2$ является выпуклой замкнутой оболочкой множества U_2, имеет решение $u^0 = 1$ и $J_2(u^0) = 0$.

Если бы нижняя грань функционала J_2 на U_2 была бы равна нулю, то существовала бы последовательность $\{u^k\} \subset U_2$ такая, что $J_2(u^k) \to 0$, $z(u^k) \to w$, когда $k \to \infty$. Обозначим $z^k = z(u^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Поскольку свободный член уравнения (1.7) и функции $b\big(\cdot, z_x^k(\cdot)\big)$ равномерно по $k = 1, 2, \ldots$ ограничены в $L_2(0, 2)$, то все функции $z^k (k = 1, 2, \ldots)$ принадлежат ограниченному множеству в $W_2^1(0, 2)$. Кроме того, для любых $u \in U_2$ и любых свободных членов из $L_2(0, 2)$ уравнение (1.7) однозначно разрешимо относительно $z \in \mathring{W}_2^1(0, 2)$. Поэтому аналогично как при исследовании G — сходимости эллиптических операторов [15], нетрудно установить, что функция w должна быть решением уравнения

$$(1 - \alpha)\frac{d}{dx}\left[\frac{\alpha - (1 + \alpha)\,\gamma}{\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\,\gamma}\, w_x\right] = b_0(x)\,|w_x|^2 \frac{(1 - \alpha^2)^2}{(\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\,\gamma)^2} \times \gamma(1 - \gamma), \quad x \in (0, 2), \tag{1.9}$$

где γ является слабо предельным в $L_2(0, 2)$ элементом последовательности характеристических функций множеств, где $u^k(x) = \alpha$. В самом деле, без умаления общности можно считать, что последовательность $\{z^k\}$ слабо в $W_2^1(0, 2)$ и сильно в $L_2(0, 2)$ сходится к функции w, так как $z^k \to w$ и последовательность $\{z^k\}$ ограничена в $W_2^1(0, 2)$. В свою очередь из соотношений

$$u^k z_x^k = w_x + \int_0^x b\big(t, z_x^k(t)\big)\, dt - \int_0^x b\big(t, w_x(t)\big)\, dt + \text{const}, \tag{1.10}$$

которые равносильны уравнениям (1.7) с $u = u^k$, $z = z^k$, следует, что последовательность $\{u^k z_x^k\}$ сходится сильно. Поэтому (функции u^k могут принимать только два значения) последовательность $\{u^k z_x^k - w_x\}$ сходится к функции

$$(1 - \alpha)\,\frac{\alpha - (1 + \alpha)\,\gamma}{\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\,\gamma}\, w_x.$$

Вполне аналогично, с учетом сильной сходимости последовательности $\{u^k z_x^k\}$ и (1.8), показывается, что последовательность $\big\{b\big(\cdot, z_x^k(\cdot)\big)\big\}$ слабо в $L_2(0, 2)$ сходится к

$$b_0\left[\frac{\alpha w_x}{(1 - \alpha^2)\,\gamma + \alpha^2}\right]^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2\right)\gamma + \alpha^2\right].$$

Из (1.10) и полученных предельных значений уже следует соотношение (1.9).

Обозначим

$$\varphi \equiv (1 - \alpha)\frac{\alpha - (1+\alpha)\gamma}{\alpha^2 + (1-\alpha^2)\gamma} w_x,$$

$$\psi \equiv \int_0^x b_0 |w_x|^2 \frac{(1-\alpha^2)^2}{(\alpha^2 + (1-\alpha^2)\gamma)^2}\gamma(1-\gamma)\,dt.$$

Тогда соотношение (1.9) можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \psi(x), \qquad x \in (0, 2),$$

так как $w_x(0) = 0$. Функция ψ является неотрицательной и $\psi(x) = c_2$ при $x \geqq 1$. Если $\gamma(1-\gamma)$ отлично от нуля на множестве ненулевой меры в $(0, 1)$, то $c_2 > 0$, что противоречит тому, что в силу (1.8) в сегменте $[1, 2]$ функция φ должна принимать значения, сколь угодно близкие к нулю. С другой стороны, если $\gamma(1-\gamma) = 0$ в интервале $(0, 1)$, то $\psi \equiv 0$, но тогда из равенства $\varphi(x) = \psi(x)$, определения функции φ и того, что $w_x(x) > 0$, $x \in (0, 1)$, следует, что выполнено $\gamma = \alpha(1+\alpha)^{-1}$.

Полученное противоречие показывает, что не существует последовательности $\{u^k\} \subset U_2$ такой, что $J_2(u^k) \to 0$, когда $k \to \infty$. Таким образом, нижняя грань функционала J_2 по $u \in U_2$ строго больше нуля и, следовательно, переход от U_2 к $\overline{\text{co}}\, U_2$ не сохраняет нижней грани минимизируемого функционала.

2. Применяемые в настоящей работе обозначения основных функциональных пространств и также свойства решений эллиптических уравнений берутся из [16].

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n (n \geqq 2)$ с элементами $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ задана ограниченная строго липшицева область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$, $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$, где Γ состоит из конечного числа компонент связности, которые являются открытыми множествами с границей, имеющей нулевую меру (по $n-1$ мерной мере Лебега на $\partial\Omega$).

Заданы также ограниченные множества $Q_1 \subset \mathbf{R}^{n_1}$, $Q_2 \subset \mathbf{R}^{n_2}$, константа $r > n$ и функции

$$\begin{aligned}
&a_0 = a_0(x, u, z, y_1, \ldots, y_n), \qquad \varkappa = \varkappa(x', v, z),\\
&a_{i0} = a_{i0}(x, u, z), \qquad a_{ij} = a_{ij}(x, u) \qquad (i, j = 1, \ldots, n),\\
&F_k = F_k(x, u, z, y_1, \ldots, y_n), \qquad \Phi_k = \Phi_k(x', v, z),\\
&k = 0, 1, \ldots, k_0, k_0+1, \ldots, k_0 + m_0 \qquad (k_0 \geqq 0,\ m_0 \geqq 0),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

определенные для $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $u \in \mathbf{R}^{n_1}$, $v \in \mathbf{R}^{n_2}$, $z \in \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^1$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

Множества Q_1 и Q_2 определяют множество Σ допустимых управлений

$$\begin{aligned}
&\Sigma \equiv \{\sigma = (u, v)\colon u = (u_1, \ldots, u_{n_1}) \qquad (u_i \in L_\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n_1),\\
&u(x) \in Q_1 \quad (x \in \Omega); \qquad v = (v_1, \ldots, v_{n_2}) \qquad (v_i \in L_\infty(\Gamma), \quad i = 1, \ldots, n_2),\\
&v(x') \in Q_2 \quad (x' \in \Gamma)\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При помощи константы r определяются пространства

$$\mathsf{L}(r) \equiv L_{\frac{2r}{r-2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n} \times L_{\frac{2(r-1)}{r-2}}(\Gamma),$$

$$\mathsf{L}^*(r) \equiv L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n} \times L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma).$$

с элементами $g \equiv (g_0, g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}) \in \mathsf{L}(r)$, $f \equiv (f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) \in \mathsf{L}^*(r)$ и билинейной формой

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle \equiv \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n f_i g_i \, dx + \int\limits_\Gamma f_{n+1} g_{n+1} \, d\Gamma,$$

соответствующей двойственности между $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$.

Функции a_0, a_{i0}, a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$ для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ определяют оператор $\mathsf{A}(\sigma)\colon \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$,

$$\begin{gathered}\big(\mathsf{A}(\sigma)\, g\big)(x, x') \equiv \Big(a_0\big(x, u(x), g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)\big), \\ \sum_{j=1}^n a_{1j}(x, u(x))\, g_j(x) + a_{10}(x, u(x), g_0(x)), \ldots, \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(x, u(x))\, g_j(x) + a_{n0}\big(x, u(x), g_0(x)\big),\ \varkappa\big(x', v(x'), g_{n+1}(x')\big)\Big), \\ x \in \Omega, \quad x' \in \Gamma, \quad g \in \mathsf{L}(r),\end{gathered} \tag{2.3}$$

где через $\big(\mathsf{A}(\sigma)\, g\big)(x, x')$ обозначается значение элемента $\mathsf{A}(\sigma)\, g \in \mathsf{L}^*(r)$, вычисленное в точке $(x, x') \in \Omega \times \Gamma$.

При помощи функций F_k, Φ_k определяются функционалы $J_k\colon \Sigma \times \mathsf{L}(r) \to \mathbf{R}$,

$$\begin{gathered}J_k(\sigma, g) \equiv \int\limits_\Omega F_k(x, u, g_0, g_1, \ldots, g_n)\, dx + \int\limits_\Gamma \Phi_k(x', v, g_{n+1})\, d\Gamma, \\ k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Из свойств гладкости границы $\partial\Omega$ и теорем вложения [17] следует, что пространство $\mathsf{L}(r)$ распадается на прямую сумму

$$\begin{gathered}\mathsf{L}(r) = \mathsf{W} \oplus \mathsf{G}, \\ \mathsf{W} \equiv \{w\colon w \in \mathsf{L}(r),\ w = (z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}, z),\ z \in W_2^1(\Omega),\ z|_{\Gamma_0} = 0\};\end{gathered} \tag{2.5}$$

где оператор проектирования $\mathsf{P}\colon \mathsf{L}(r) \to \mathsf{W}$ элементу $g \in \mathsf{L}(r)$ сопоставляет элемент $w = \mathsf{P}g$, сообщающий минимум функционалу $\langle\langle w, w\rangle\rangle - 2\langle\langle g, w\rangle\rangle$, $w \in \mathsf{W}$. В дальнейшем элементы w пространства W часто будут отождествляться с функциями $z \in W_2^1(\Omega)$, согласно представлению (2.5).

Сопряженный к P оператор P', действующий из $\mathsf{L}^*(r)$ в $\mathsf{L}^*(r)$ также является ограниченным оператором проектирования и соотношение $\langle\langle f, \eta\rangle\rangle = 0\ \forall\ \eta \in \mathsf{W}$ эквивалентно соотношению $\mathsf{P}'f = 0$.

На протяжении всей работы верхние индексы будут употребляться для различения элементов функциональных пространств, а нижние индексы — для различения компонент элементов. Скалярное произведение в евклидовых пространствах будет обозначаться через $\langle\cdot, \cdot\rangle$, евклидова длина вектора — через $|\cdot|$, градиент функции — через ∇, т. е. $\nabla z \equiv (z_{x_1}, \ldots, z_{x_n})$, производная Фреше оператора $\mathsf{A}(\sigma)\colon \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$, вычисленная на элементе g, — через $L\mathsf{A}(\sigma, g)$, производная Фреше функционала $J(\sigma, g)$ по $g \in \mathsf{L}(r)$, вычисленная на элементе g, — через $LJ(\sigma, g)$. Символом $\overline{\mathrm{co}}$ будет обозначаться переход к выпуклой замкнутой оболочке множества. Через $o(\varepsilon)$ будут обозначаться величины с нормой более высокого порядка малости, чем норма аргумента, а через $O(\varepsilon)$ — величины того же порядка малости, т. е.

$$\lim_{\|\varepsilon\| \to 0} \frac{\|o(\varepsilon)\|}{\|\varepsilon\|} = 0, \quad \overline{\lim_{\|\varepsilon\| \to 0}} \frac{\|O(\varepsilon)\|}{\|\varepsilon\|} < \infty.$$

Векторфункция $(a_{10}, \ldots, a_{n0})$ будет обозначаться через a. При помощи записи Ag, где $A \equiv (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ является матрицей размерности $n \times n$ и $g = (g_0, g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}) \in \mathsf{L}(r)$, будет обозначаться результат воздействия матрицы A на вектор $(g_1, \ldots, g_n)$, т. е. $Ag = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} g_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} g_j\right)$. В записях $a_0(x, u, w)$, $F_k(x, u, w)$, $w(x)$, $a_0(x, u, g)$, $F_k(x, u, g)$, $g(x)$ с $w \in \mathsf{W}$, $g \in \mathsf{L}(r)$ будет подразумеваться, что берутся только те компоненты элементов w и g, которые определены на Ω.

Основным объектом исследований является следующая задача 1.

Задача 1: *Минимизировать функционал $J_0(\sigma, w)$ по $\sigma \in \Sigma$, $w \in \mathsf{W}$ при ограничениях*

$$J_i(\sigma, w) \leqq 0 \ (i = 1, \ldots, k_0) \ \text{ и } \ J_i(\sigma, w) = 0 \ (i = k_0 + 1, \ldots, k_0 + m_0), \tag{2.6}$$

когда σ и w связаны соотношением

$$\langle\langle \mathsf{A}(\sigma)\, w, \eta \rangle\rangle = 0 \qquad \forall\ \eta \in \mathsf{W}. \tag{2.7}$$

В случае $a_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ вариационное равенство (2.7) эквивалентно данному в [16] определению обобщенного решения краевой задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(x, u)\, z_{x_j}] - a_0(x, u, z, \nabla z) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$z|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial N} z + \varkappa(x, v, z)|_{x = x' \in \Gamma} = 0,$$

относительно $z \in W_2^1(\Omega)$, где $\frac{\partial}{\partial N}$ — производная по конормали. В случае $\Gamma = \emptyset$ вариационное равенство (2.7) эквивалентно краевой задаче

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(x, u)\, z_{x_j} + a_{i0}(x, u, z)] - a_0(x, u, z, \nabla z) = 0, \quad x \in \Omega,\ z|_{\partial\Omega} = 0,$$

относительно $z \in W_2^1(\Omega)$.

Формулировка основного уравнения состояния оптимизируемой системы в виде вариационного равенства обусловлена как единой формой записи для различных краевых задач, так и удобствами исследований. Необходимо отметить еще, что вариационное равенство (2.7) эквивалентно уравнению

$$\mathsf{P}'\mathsf{A}(\sigma)\, w = 0. \tag{2.8}$$

В дальнейшем решение вариационного равенства (2.7) (или, что то же самое, решение уравнения (2.8)), соответствующее выбранному $\sigma \in \Sigma$, будет обозначаться через $w(\sigma)$.

На протяжении всей работы будет предполагаться выполнение следующих условий A:

А1: Функции a_0, a_{i0}, a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$, F_k, Φ_k $(k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ удовлетворяют условию Каратеодори, т. е. при любых фиксированных $u \in \mathbf{R}^{n_1}$, $v \in \mathbf{R}^{n_2}$, $z \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^n$ измеримы по $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$ и для почти всех $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$ непрерывны по $u \in \mathbf{R}^{n_1}$, $v \in \mathbf{R}^{n_2}$, $z \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^n$.

А2: Для всех $x \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}^{n_1}$

$$a_{ij}(x, u) = a_{ji}(x, u) \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

т. е. матрица $A(x, u) \equiv (a_{ij}(x, u))$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ является симметрической, и существует положительная константа ν такая, что

$$\nu\,|\xi|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u)\,\xi_i\xi_j \leqq \frac{1}{\nu}\,|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n.$$

А3: Существуют функции $h_1 \in L_2(\Omega)$, $h_2 \in L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega)$, $h_3 \in L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma)$ такие, что для всех $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $u \in \overline{\mathrm{co}}\,Q_1$, $v \in \overline{\mathrm{co}}\,Q_2$

$$|a_{i0}(x, u, 0)| \leqq h_1(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$|a_0(x, u, 0, 0)| \leqq h_2(x), \qquad |\varkappa(x', v, 0)| \leqq h_3(x').$$

А4: Функции a_0, a_{i0} $(i = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$ имеют частные производные по (z, y) и существуют константы $\mu_0 \geqq 0$, $\mu_1 \geqq 0$, $0 \leqq p$, $q < 1$, функции $h_4 \in L_r(\Omega)$, $h_5 \in L_{r-1}(\Gamma)$, и непрерывные монотонно возрастающие функции $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, $\gamma_2 = \gamma_2(t)$ $(t \in \mathbf{R};\ \gamma_1(0) = 0,\ \gamma_2(0) = 0)$:

$$|\gamma_1(t)| \leqq \mu_1\left(1 + |t|^{\frac{2(1-q)}{r-2}}\right), \qquad |\gamma_2(t)| \leqq \mu_1\left(1 + |t|^{\frac{2(1-p)}{n}}\right), \qquad t \in \mathbf{R},$$

такие, что для всех $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $u \in \overline{\mathrm{co}}\,Q_1$, $v \in \overline{\mathrm{co}}\,Q_2$, $z, z', z'' \in \mathbf{R}$, $y, y', y'' \in \mathbf{R}^n$ выполняются неравенства (в них $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\,a_{i0}(x, u, z)\right| \leqq \mu_0\left[h_4(x) + |z|^{\frac{2}{r-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\,a_0(x, u, z, y)\right| \leqq \mu_0\left[h_4(x) + |z|^{\frac{2}{r-2}} + |y|^{\frac{2}{r}}\right]^2,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\,a_0(x, u, z, y)\right| \leqq \mu_0\left[h_4(x) + |z|^{\frac{2}{r-2}} + |y|^{\frac{2}{r}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\,\varkappa(x', v, z)\right| \leqq \mu_0\left[h_5(x') + |z|^{\frac{2}{r-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\,a_{i0}(x, u, z') - \frac{\partial}{\partial z}\,a_{i0}(x u, z'')\right|$$
$$\leqq \mu_0\left[h_4(x) + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}}\right]^q \gamma_1(|z' - z''|),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\,a_0(x, u, z', y') - \frac{\partial}{\partial z}\,a_0(x, u, z'', y'')\right| \leqq \mu_0[G_1]^{1+q}\,\gamma_1(|z' - z''|)$$
$$+ \mu_0[G_1]^{1+p}\,\gamma_2(|y' - y''|),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\,a_0(x, u, z', y') - \frac{\partial}{\partial y_i}\,a_0(x, u, z'', y'')\right|$$
$$\leqq \mu_0[G_1]^q\,\gamma_1(|z' - z''|) + \mu_0[G_1]^p\,\gamma_2(|y' - y''|),$$

$$G_1 \equiv h_4(x) + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}} + |y'|^{\frac{2}{r}} + |y''|^{\frac{2}{r}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\,\varkappa(x', v, z') - \frac{\partial}{\partial z}\,\varkappa(x', v, z'')\right| \leqq \mu_0\Big[h_5(x') + |z'|^{\frac{2}{r-2}}$$
$$+ |z''|^{\frac{2}{r-2}}\Big]^q\,\gamma_1(|z' - z''|).$$

A5: Для каждого $\sigma \in \sum$ и любых $f \in \mathsf{L}^*(r)$ вариационное равенство

$$\langle\langle \mathsf{A}(\sigma)\, w - f, \eta\rangle\rangle = 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathsf{W}$$

однозначно разрешимо относительно $w \in \mathsf{W}$ и тем самым определяет неявную функцию $w = \mathsf{D}(\sigma)\, f$,

$$\mathsf{D}(\sigma)\colon \mathsf{L}^*(r) \to \mathsf{W}, \qquad \mathsf{P}'[\mathsf{A}(\sigma)\, \mathsf{D}(\sigma)\, f - f] \equiv 0.$$

Кроме того, существуют определенные на $\mathbf{R}_+^1$ непрерывные монотонно возрастающие функции γ_3 и γ_4 такие, что для всех $\sigma \in \Sigma$, $f, f^1, f^2 \in \mathsf{L}^*(r)$

$$\|\mathsf{D}(\sigma)\, f\| \leqq \gamma_3(1 + \|\mathsf{P}'f\|),$$

$$\|\mathsf{D}(\sigma)\, f^1 - \mathsf{D}(\sigma)\, f^2\| \leqq \gamma_4(1 + \|\mathsf{P}'f^1\| + \|\mathsf{P}'f^2\|)\, \|\mathsf{P}'(f^1 - f^2)\|.$$

Условия A1—A5 обеспечивают, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ оператор $\mathsf{A}(\sigma)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на $\mathsf{L}(r)$. Кроме того, в силу условия A5, для каждых фиксированных $\sigma \in \Sigma$, $g \in \mathsf{L}(r)$ и любых $f \in \mathsf{L}^*(r)$ вариационное равенство

$$\langle\langle L\mathsf{A}(\sigma, g)\, w - f, \eta\rangle\rangle = 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathsf{W}$$

однозначно разрешимо относительно $w \in \mathsf{W}$ и имеет место априорная оценка вида $\|w\| \leqq c(\sigma, g)\|\, \mathsf{P}'f\|$, где константа $c(\sigma, g)$ не зависит от $f \in \mathsf{L}^*(r)$.

3. Для фиксированного $\sigma^0 = (u^0, v^0) \in \Sigma$ определим семейство управлений $\{\sigma^\varepsilon(\beta)\} \subset \Sigma$, зависящих от переменных параметров $\varepsilon > 0$, $\beta \equiv (\beta_1, \ldots, \beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+m}) \in \mathbf{R}^{s+m}$ следующим образом.

Выбираются целые числа $s \geqq 0$, $m \geqq 0$, $s + m > 0$, попарно различные точки $x^1, \ldots, x^s \in \Omega$, $x'^1, \ldots, x'^m \in \Gamma$, число $\delta_0 \in (0, 1]$, элементы $u^1, \ldots, u^s \in Q_1$, $v^1, \ldots, v^m \in Q_2$, положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, положительно определенные симметрические постоянные матрицы $C_1, \ldots, C_s$ размерности $n \times n$ и, по определению, для

$$\beta \in B(\delta_0) \equiv \{\beta\colon \beta \in \mathbf{R}^{s+m},\ \delta_0 \leqq \beta_i \leqq \delta_0^{-1},\ i = 1, \ldots, s + m\}$$

и для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\sigma^\varepsilon(\beta) \equiv \big(u^\varepsilon(\beta), v^\varepsilon(\beta)\big),$$

$$u^\varepsilon(\beta)\,(x) \equiv \begin{cases} u^k, & x \in E(k, \varepsilon, \beta), \quad k = 1, \ldots, s, \\ u^0(x), & x \,\bar{\in}\, \bigcup\limits_k E(k, \varepsilon, \beta), \end{cases}$$

$$v^\varepsilon(\beta)\,(x') \equiv \begin{cases} v^k, & x' \in S(k, \varepsilon, \beta), \quad k = 1, \ldots, m, \\ v^0(x'), & x' \,\bar{\in}\, \bigcup\limits_k S(k, \varepsilon, \beta), \end{cases}$$

$$E(k, \varepsilon, \beta) \equiv \left\{x\colon x \in \mathbf{R}^n,\quad \beta_k\langle C_k(x - x^k), x - x^k\rangle < \varepsilon^{\frac{2}{n}}\right\}, \quad k = 1, \ldots, s, \tag{3.1}$$

$$S(k, \varepsilon, \beta) \equiv \left\{x'\colon x' \in \Gamma,\ \beta_{s+k}\alpha_k\, |x' - x'^k| < \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}\right\}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Семейство управлений $\{\sigma^\varepsilon(\beta)\}$ определяется набором

$$\mathfrak{B} \equiv \{\sigma^0, \delta_0, x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m, C_1, \ldots, C_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, u^1, \ldots, u^s, v^1, \ldots, v^m\} \tag{3.2}$$

и переменными параметрами $\varepsilon > 0$ и $\beta \in B(\delta_0)$.

Пусть заданы постоянные симметрические положительно определенные матрицы A_1, A_2, C размерности $n \times n$ и вектор $b \in \mathbf{R}^n$. Рассмотрим вариационное равенство

$$\int_E \langle A_1 \nabla z + b, \nabla \varphi \rangle \, dx + \int_{R^n \setminus E} \langle A_2 \nabla z, \nabla \varphi \rangle \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1, \tag{3.3}$$

$$E \equiv \{x \colon x \in \mathbf{R}^n, \langle Cx, x \rangle < 1\},$$

относительно $z \in H_0^1$, где H_0^1 является замыканием по норме

$$\|z\|_{H_0^1} \equiv \left(\int_{R^n} |\nabla z|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

всех гладких финитных в $\mathbf{R}^n$ функций. Обозначим решение вариационного равенства (3.3) через $z(A_1, A_2, C, b)$. При помощи непосредственной проверки нетрудно убедиться, что функция $z(A_1, A_2, C, b)$ имеет представление

$$z(A_1, A_2, C, b)(x) = \begin{cases} \langle (A_2)^{1/2} d, x \rangle, & x \in E, \\ \langle x, (A_2)^{1/2} B \psi(\tau(x)) \rangle, & x \in \mathbf{R}^n \setminus E, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $d \in \mathbf{R}^n$ является решением уравнения

$$(A_2)^{-1/2} A_1 (A_2)^{-1/2} d - d - 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi'(0)}{\psi_i(0) \lambda_i} \langle d, l^i \rangle l^i = (A_2)^{-1/2} b, \tag{3.5}$$

$$B \equiv (b_{ij}), \quad b_{ij} \equiv \frac{\langle l^j, d \rangle}{\psi_j(0)} l_i^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n), \qquad \psi'(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau} \psi(\tau);$$

λ_i и $l^i \equiv (l_1^i, \ldots, l_n^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — собственные значения и соответствующие ортонормированные (с нормой равной 1) собственные вектора матрицы $(A_2)^{1/2} C (A_2)^{1/2}$,

$$\psi_i(\tau) \equiv \lambda_i \sqrt{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \int_\tau^\infty \frac{d\varrho}{(1 + \lambda_i \varrho) \sqrt{(1 + \lambda_1 \varrho) \cdots (1 + \lambda_n \varrho)}} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.6}$$

а функция $\tau = \tau(x)$, $x \in \mathbf{R}^n \setminus E$, определяется как решение уравнения

$$\langle ([(A_2)^{1/2} C (A_2)^{1/2}]^{-1} + \tau I))^{-1} (A_2)^{-1/2} x, (A_2)^{-1/2} x \rangle = 1. \tag{3.7}$$

Здесь I — единичная матрица.

Из формул (3.4)—(3.7) следует, что при $\varepsilon > 0$

$$z(A_1, A_2, \varepsilon^{-n/2} C, b)(x) = \begin{cases} z(A_1, A_2, C, b)(x), & \varepsilon^{-2/n} \langle Cx, x \rangle < 1, \\ \varepsilon^{1/n} z(A_1, A_2, C, b) \left(\dfrac{x}{\varepsilon^{1/n}} \right), & \varepsilon^{-2/n} \langle Cx, x \rangle \geqq 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

и существует константа c^*, зависящая только от A_1, A_2, C, b такая, что

$$\begin{aligned} |z(A_1, A_2, \varepsilon^{-n/2} C, b)(x)| &\leqq c^* \frac{\varepsilon}{|x|^{n-1}}, \quad \varepsilon^{-2/n} \langle Cx, x \rangle \geqq 1, \\ |\nabla z(A_1, A_2, \varepsilon^{-2/n} C, b)(x)| &\leqq c^* \frac{\varepsilon}{|x|^n}, \quad \varepsilon^{-2/n} \langle Cx, x \rangle \geqq 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Кроме того, $z(A_1, A_2, C, b)$ как элемент пространства H_0^1 непрерывен по A_1, A_2, C и b. Здесь и в дальнейшем под нормой матрицы подразумевается максимум модулей ее элементов.

Теорема 3.1: *Пусть выполнены условия* A1—A5, $\sigma^0 = (u^0, v^0) \in \Sigma$ *фиксирован, семейство* $\{\sigma^\varepsilon(\beta)\}$ *определено по формулам* (3.1), $w^0 \equiv w(\sigma^0)$.

Тогда существуют множества $\Omega' \subset \Omega(\text{mes}\,\Omega' = \text{mes}\,\Omega)$, $\Gamma' \subset \Gamma(\text{mes}\,\Gamma' = \text{mes}\,\Gamma)$, *зависящие только от функций* a_{i0}, a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, $a_0, \varkappa, h_1, \ldots, h_5$ *и элементов* $u^0, w^0, v^0, u^1, \ldots, u^s, v^1, \ldots, v^m$ *такие, что если* $x^1, \ldots, x^s \in \Omega'$, $x'^1, \ldots, x^{1m} \in \Gamma'$ *то разность* $w(\sigma^\varepsilon(\beta)) - w^0$ *имеет представление*

$$w(\sigma^\varepsilon(\beta)) - w^0 = \delta w^\varepsilon(\beta) + \delta w^1, \quad \|\delta w^\varepsilon(\beta)\| = O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad \|\delta w^1\| = o(\sqrt{\varepsilon}), \tag{3.10}$$

где

$$\delta w^\varepsilon(\beta) \equiv \left(z^\varepsilon(\beta), \frac{\partial}{\partial x_1} z^\varepsilon(\beta), \ldots, \frac{\delta}{\delta x_n} z^\varepsilon(\beta), z^\varepsilon(\beta)\right),$$

$$\begin{aligned}
&z^\varepsilon(\beta)(x) \equiv \xi(x) \sum_{k=1}^{s} z(A_1{}^k, A_2{}^k, C_k, b^k)\left(\frac{x - x^k}{\varepsilon^{1/n}} \sqrt{\beta_k}\right), \qquad x \in \bar{\Omega},\\
&A_1{}^k \equiv A(x^k, u^k), \qquad A_2{}^k \equiv A(x^k, u^0(x^k)), \qquad k = 1, \ldots, s,\\
&b^k \equiv b^{1k}(x^k) + b^{2k}(x^k), \qquad b^{1k} \equiv (b_1{}^{1k}, \ldots, b_n{}^{1k}),\\
&b_i{}^{1k}(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(x, u^k) - a_{ij}(x, u^0(x))\right) w_j{}^0(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n,\\
&b^{2k}(x) \equiv a(x, u^k, w_0{}^0(x)) - a(x, u^0(x), w_0{}^0(x)), \qquad k = 1, \ldots, s,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

а ζ *является произвольной гладкой функцией, равной* 1 *в некоторой окрестности точек* $x^1, \ldots, x^s$ *и равной нулю вблизи* $\partial\Omega$.

Кроме того, величины $O(\sqrt{\varepsilon})$ *и* $o(\sqrt{\varepsilon})$ *в соотношении* (3.10) *для каждого фиксированного* $\delta_0 \in (0, 1]$ *имеют требуемый порядок малости равномерно по* $\beta \in B(\delta_0)$.

Доказательство: Определим множество Ω' как множество всех тех точек из Ω, которые являются точками Лебега для всех следующих функций (в них $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, s$):

$$\begin{aligned}
&a_{ij}(\cdot, u^k), a_{ij}(\cdot, u^0(\cdot)), a_{ij}(\cdot, u^k)\, w_j{}^0(\cdot), a_{ij}(\cdot, u^0(\cdot))\, w_j{}^0(\cdot),\\
&a_{i0}(\cdot, u^k, w_0{}^0(\cdot)), a_{i0}(\cdot, u^0(\cdot), w_0{}^0(\cdot)), |a_{ij}(\cdot, u^k)\, w_j{}^0(\cdot)|^2,\\
&|a_{ij}(\cdot, u^0(\cdot))\, w_j{}^0(\cdot)|^2, \; |w_j{}^0(\cdot)|^2, \; |w_0{}^0(\cdot)|^{\frac{2r}{r-2}},\\
&|h_4(\cdot)|^r, \; |h_1(\cdot)|^2, \; |h_2(\cdot)|^{\frac{2r}{r+2}}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что множество Ω' имеет полную меру в Ω.

Будем говорить, что точка x'^0 является точкой Лебега для функции $f_{n+1} \in L_1(\Gamma)$, если для $S(x'^0, \varepsilon) \equiv \{x' : x' \in \Gamma, |x'^0 - x'| < \varepsilon\}$ имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\text{mes}\, S(x'^0, \varepsilon)} \int_{S(x'^0, \varepsilon)} |f_{n+1}(x') - f_{n+1}(x'^0)|\, d\Gamma = 0.$$

Определим множество $\Gamma' \subset \Gamma$ как множество всех точек Лебега для совокупности функций

$$|\varkappa(\cdot, v^k, w^0_{n+1}(\cdot)) - \varkappa(\cdot, v^0(\cdot), w^0_{n+1}(\cdot))|^{\frac{2(r-1)}{r}}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

В силу свойств точек Лебега [18] и того, что Ω является строго липшицевой областью $\operatorname{mes} \Gamma' = \operatorname{mes} \Gamma$. В дальнейшем будем считать, что точки $x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m$ уже принадлежат множествам Ω' и Γ' соответственно.

Поскольку

$$\mathsf{P}'\big[\mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\, w\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big) - \mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\, w^0\big] = -\mathsf{P}'\big[\mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\, w^0 - \mathsf{A}(\sigma^0)\, w^0\big],$$

то согласно условию A5 и ограниченности оператора P', для оценки нормы разности $\big(w(\sigma^\varepsilon(\beta)\big) - w^0$ достаточно оценить нормы компонент элемента $\mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big) \times w^0 - \mathsf{A}(\sigma^0)\, w^0$ в соответствующих пространствах Лебега. Эти компоненты отличны от нуля только в множествах $E(k, \varepsilon, \beta)$ и $S(k, \varepsilon, \beta)$ и определяются при помощи конечного числа известных функций аргументов x и x' соответственно, поэтому в силу условий A1—A4, того, что матрицы C_k являются положительно определенными и что область Ω является строго липшицевой, после перехода к точкам Лебега получаем, что

$$\big\|w\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big) - w^0\big\| \geqq c_1 \sqrt{\varepsilon},$$

где константа c_1 зависит от набора $\mathfrak{B}$, но не зависит от ε и $\beta \in B(\delta_0)$.

В свою очередь, из представления (3.11) и соотношений (3.8), (3.9) и из только что полученной оценки следует, что

$$\begin{aligned} &\|\delta w^\varepsilon(\beta)\| \leqq c_2 \sqrt{\varepsilon}, \qquad \big\|\big(\delta w^\varepsilon(\beta)\big)_0\big\|_{L_{(2r)/(r-2)}(\Omega)} \leqq c_2 \varepsilon^{(1/2)+(1/n)-(1/r)} = o\big(\sqrt{\varepsilon}\big), \\ &\big(\delta w^\varepsilon(\beta)\big)_{n+1} = 0, \qquad \|\delta w^1\| \leqq c_3 \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где константы c_2 и c_3 зависят от набора $\mathfrak{B}$, но не зависят от ε и $\beta \in B(\delta_0)$.

Элемент δw^1 удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}'\big[\mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\big(w^0 + \delta w^\varepsilon(\beta) + \delta w^1\big) - \mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\big(w^0 + \delta w^\varepsilon(\beta)\big)\big] \\ &= -\mathsf{P}'[f^{1\varepsilon} + f^{2\varepsilon} + f^{3\varepsilon}], \end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned} &f_0^{1\varepsilon} = 0, \ f_{n+1}^{1\varepsilon} = 0, \ f_i^{2\varepsilon} = 0 \ (i = 1, \ldots, n+1), \qquad f_i^{3\varepsilon} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \\ &f_i^{1\varepsilon} \equiv \big(A(x, u^\varepsilon(\beta)\big)\,\delta w^\varepsilon(\beta) + \big(A(x, u^\varepsilon(\beta)) - A(x, u^0)\big)\, w^0 \\ &\qquad + a\big(x, u^\varepsilon(\beta), w_0{}^0\big) - a(x, u^0, w_0{}^0)\big)_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ &f_0^{2\varepsilon} \equiv a_0\big(x, u^\varepsilon(\beta), w^0 + \delta w^\varepsilon(\beta)\big) - a_0\big(x, u^\varepsilon(\beta), w^0\big), \\ &f_0^{3\varepsilon} \equiv a_0\big(x, u^\varepsilon(\beta), w^0\big) - a_0(x, u^0, w^0), \\ &f_{n+1}^{3\varepsilon} \equiv \varkappa\big(x', v^\varepsilon(\beta), w_{n+1}^0\big) - \varkappa(x', v^0, w_{n+1}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Из уравнения (3.13) и условия A5 следует, что для установления требуемой оценки нормы элемента δw^1 достаточно оценить нормы элементов $\mathsf{P}' f^{1\varepsilon}$, $f^{2\varepsilon}$, $f^{3\varepsilon}$.

Элемент $f^{3\varepsilon}$ оценивается таким же способом, как была оценена разность $\mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\, w^0 - \mathsf{A}(\sigma^0)\, w^0$, и при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\|f^{3\varepsilon}\| \leqq c_4 (\varepsilon^{(r+2)/r} + \varepsilon^{r/(r-1)})^{1/2} = o\big(\sqrt{\varepsilon}\big), \tag{3.15}$$

где константа c_4 не зависит от ε и $\beta \in B(\delta_0)$.

Согласно условию A4 модуль функции $f_0^{2\varepsilon}$ оценивается сверху при помощи билинейной формы от степеней известных функций и функций $\big(\delta w^\varepsilon(\beta)\big)_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поэтому, в силу оценок (3.9) и (3.12), интеграл по множеству $\{x\colon x \in \Omega, \min\limits_k |x - x^k| < \varepsilon^{1/2n}\}$ оценивается при помощи неравенства Гельдера и свойств точек Лебега, а интеграл по остальной части области Ω — при помощи неравенства Гельдера и оценок (3.9), так как все матрицы C_k являются положительно определенными. Таким образом показывается оценка

$$\|f^{2\varepsilon}\| \leqq c_5(\varepsilon^{(1/r)+(1/2)} + \varepsilon^{1/2}\varepsilon^{(1/4)+(1/2n)-(1/2r)} + \varepsilon^{3/4}) = o(\sqrt{\varepsilon}), \tag{3.16}$$

где константа c_5 не зависит от ε и $\beta \in B(\delta_0)$.

Поскольку функция ζ равна 1 в некоторой окрестности точек $x^1, \ldots, x^s$, то из оценок (3.9), (3.12) и представления (3.11) следует, что

$$f^{1\varepsilon} = \sum_{k=1}^{s}(f^{1k} + f^{2k} + f^{3k}) + f^{4\varepsilon}, \qquad \|f^{4\varepsilon}\| \leqq c_6\varepsilon,$$

где константа c_6 не зависит от ε и $\beta \in B(\delta_0)$,

$$f_0^{1k} = 0, \quad f_{n+1}^{1k} = 0, \quad f_0^{2k} = 0, \quad f_{n+1}^{2k} = 0, \quad f_0^{3k} = 0, \quad f_{n+1}^{3k} = 0,$$

$$f_i^{1k}(x) \equiv \begin{cases} \big(A(x^k, u^k)\,\nabla z^k(x) + b^k\big)_i, & x \in E(k, \varepsilon, \beta), \\ \big(A(x^k, u^0(x^k))\,\nabla z^k(x)\big)_i, & x \bar{\in} E(k, \varepsilon, \beta), \end{cases}$$

$$f_i^{2k}(x) \equiv \begin{cases} \big((A(x, u^k) - A(x^k, u^k))\,\nabla z^k(x)\big)_i, & x \in E(k, \varepsilon, \beta), \\ \Big(\big((A(x, u^0(x)) - A(x^k, u^0(x^k))\big)\,\nabla z^k(x)\Big)_i, & x \in E(k, \varepsilon, \beta), \end{cases}$$

$$f_i^{3k}(x) \equiv \begin{cases} \Big(\big(A(x, u^k) - A(x, u^0(x))\big)\,w^0(x) - \big(A(x^k, u^k) - A(x^k, u^0(x^k))\big)\,w^0(x^k) \\ + a\big(x, u^k, w_0{}^0(x)\big) - a\big(x, u^0(x), w_0{}^0(x)\big) \\ - a(x^k, u^k, w_0{}^0(x^k)) + a(x^k, u^0(x^k), w_0{}^0(x^k))\Big)_i, & x \in E(k, \varepsilon, \beta), \\ 0, \quad x \bar{\in} E(k, \varepsilon, \beta), \end{cases}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, s),$$

$$z^k(x) \equiv z(A_1{}^k, A_2{}^k, C_k, b^k)\left(\frac{x - x^k}{\varepsilon^{1/n}}\sqrt{\beta_k}\right), \qquad x \in \Omega \qquad (k = 1, \ldots, s).$$

Из представления элементов f^{3k} и свойств точек Лебега непосредственно следует, что

$$\|f^{3k}\| = o(\sqrt{\varepsilon}) \qquad (k = 1, \ldots, s) \tag{3.17}$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. В свою очередь, из определения функций $z(A_1, A_2, C, b)$ и свойств (3.8) и (3.9) вытекает, что при достоточно малых $\varepsilon > 0$

$$\|\mathrm{P}' f^{1k}\| \leqq c_7\varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, s), \tag{3.18}$$

где константа c_7 не зависит от ε и $\beta \in B(\delta_0)$.

Так как в множестве $E(k, \varepsilon, \beta)$ функция z^k линейна по $x - x^k$ и не зависит от ε и β, а функции a_{ij} равномерно ограничены, то

$$\int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} |f_i^{2k}|^2\,dx = o(\varepsilon) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, s) \tag{3.19}$$

равмомерно по $\beta \in B(\delta_0)$.

Согласно соотношениям (3.18), (3.9) для установления требуемых оценок для элементов f^{2k} достаточно еще только показать, что

$$\varepsilon \int\limits_{\mathrm{R}^n \setminus E(k,\varepsilon,\beta)} \big|a_{ij}\big(x, u^0(x)\big) - a_{ij}\big(x^k, u^0(x^k)\big)\big|^2\,|x - x^k|^{-2n}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \tag{3.20}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, s)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Но оценка (3.20) прямо следует из вполне аналогичной оценки в [7], поскольку матрицы $C_1, \ldots, C_s$ являются положительно определенными матрицами. Таким образом,

$$\|f^{2k}\| = o(\sqrt{\varepsilon}) \qquad (k = 1, \ldots, s). \tag{3.21}$$

Из оценок (3.15)—(3.21) следует требуемая оценка для элемента δw^1. Теорема доказана ▮

Примечание: Аналогично как при оценке $w(\sigma^\varepsilon(\beta)) - w^0$ показывается, что $w(\sigma^\varepsilon(\beta))$ как элемент пространства $\mathsf{L}(r)$ непрерывен по $\varepsilon > 0, \beta \in B(\delta_0)$. Кроме того, нетрудно показать, что множества Ω' и Γ' могут быть выбраны одни и те же для всех $s, m, u^1, \ldots, u^s \in Q_1, v^1, \ldots, v^m \in Q_2$.

Величина $\delta w^\varepsilon(\beta)$ может быть формально определена по формулам (3.11) и для произвольного расположения точек $x^1, \ldots, x^s$ в Ω'. В этом случае существенными являются свойства непрерывной зависимости элемента $\delta w^\varepsilon(\beta)$ от параметров. Обозначим зависимость элемента $\delta w^\varepsilon(\beta)$ от точек $x^1, \ldots, x^s$, матриц $C_1, \ldots, C_s$ и ε, β через $\delta w^\varepsilon(\beta) = \delta w(\varepsilon, \beta, x^1, \ldots, x^s, C_1, \ldots, C_s)$. Эта зависимость полностью определяется зависимостью функций $z(A_1{}^k, A_2{}^k, C_k, b^k)$ от $A_1{}^k, A_2{}^k, C_k, b^k$. В свою очередь, при фиксированных $u^1, \ldots, u^s \in Q_1$ матрицы $A_1{}^k$, $A_2{}^k$ и векторы b^k определяются как значения в точке x^k известных интегрируемых вектор-функций и матриц-функций. Наконец, если $\varphi \in L_1(\Omega)$, x^0 является точкой Лебега функции φ и

$$E(x^0, \delta) \equiv \{x : x \in \Omega, |x - x^0| < \delta\},$$

то для любого $\delta_1 > 0$

$$\frac{\operatorname{mes}\{x : x \in E(x^0, \delta), |\varphi(x) - \varphi(x^0)| > \delta_1\}}{\operatorname{mes} E(x^0, \delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$$

Отсюда и из свойств непрерывной зависимости функции $z(A_1, A_2, C, b)$ от A_1, A_2, C, b и x вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1: *Пусть $\sigma^0 \in \Sigma$, число $s > 0$. значения $u^1, \ldots, u^s \in Q_1$ и точки $x^1, \ldots, x^s \in \Omega'$ фиксированы. Тогда множества*

$$E(\delta) \equiv \{x : x \in \Omega, \min(|x - x^1|, \ldots, |x - x^s|) < \delta\}, \qquad \delta > 0,$$

содержат множества $E'(\delta)$ такие, что

$$\frac{\operatorname{mes}(E(\delta) \setminus E'(\delta))}{\operatorname{mes} E(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

и что

$$\|\delta w(\varepsilon^*, \beta^*, x^{*1}, \ldots, x^{*s}, C_1{}^*, \ldots, C_s{}^*) - \delta w(\varepsilon, \beta, x^1, \ldots, x^s, C_1, \ldots, C_s)\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,$$

как только точки $x^{*1}, \ldots, x^{*s}$ принадлежат множеству $E'(\delta)$ и

$$|\beta^* - \beta| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0, \qquad |\varepsilon^* - \varepsilon| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0, \qquad \|C_k{}^* - C_k\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \qquad (k = 1, \ldots, s).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гогодзе, И. К.: Необходимые условия оптимальности в эллиптических задачах управления с интегральными ограничениями. Сообщ. Акад. Наук Груз. ССР 81 (1976), 18—19.
[2] Zolezzi, T.: Necessary conditions for optimal control of elliptic or parabolic problems. SIAM J. Control 10 (1972), 594—607.
[3] Goebel, M.: Zur Koeffizientensteuerung bei elliptischen Systemen. Math. Nachr. 79 (1977), 275—381.
[4] Райтум, У. Е.: Об одном критерии существования аналога принципа максимума. Латв. мат. ежегодник (Рига) 3 (1968), 283—290.
[5] Лурье, К. А.: Оптимальное управление в задачах математической физики. Изд-во Наука: Москва 1975.
[6] Tartar, L.: Problèmes de contrôle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles, Lect. Notes Econ. Math. Syst. 107 (1975), 420—426.
[7] Райтум, У. Е.: Экстремальные задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка. Латв. мат. ежегодник (Рига) 19 (1976), 198—213.
[8] Michel, P.: Necessary conditions for optimality of elliptic systems with positivity constraints on the state. SIAM J. Control and Optimization 18 (1980), 91—97.
[9] Райтум, У. Е.: Некоторые следствия из необходимых условий экстремума в задачах оптимального управления для эллиптических уравнений. Латв. мат. ежегодник (Рига) 25 (1981), 71—80.
[10] Райтум, У. Е.: Необходимые условия экстремума в задачах оптимального управления для нелинейного эллиптического уравнения. Сиб. мат. ж. 23 (1982), 144—152.
[11] Pontrjagin, L. S., Boltjanskij, V. G., Gamkrelidze, R. V., und E. F. Miščenko: Mathematische Theorie optimaler Prozesse, Oldenbourg: München/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
[12] Плотников, В. И.: Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида. Изв. АН СССР, сер. мат. 36 (1972), 652—670.
[13] Якубович, В. А.: Некоторые варианты абстрактного принципа максимума. Докл. АН СССР 229 (1976), 816—819.
[14] Ляпунов, А. А.: О вполне аддитивных вектор-функциях. Изв. АН СССР, сер. матем. 4 (1940), 465—478.
[15] Олейник, О. А.: О распространении тепла в многомерных дисперсных средах. В кн.: Задачи математической физики и механики, Москва 1976, 224—236.
[16] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд-во Наука: Москва 1973.
[17] Бесов, О. В., Ильин, В. П., и С. М. Никольский: Интегральные представления функций и теоремы вложения. Изд-во Наука: Москва 1975.
[18] Стейн, И.: Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Изд-во Мир: Москва 1973.

Manuskripteingang: 16. 11. 1982

VERFASSER

Проф. д-р У. Е. Райтум
Вычислительный центр Латвийского Государственного университета им. П. Стучки
СССР-226250 Рига, бульв. Райниса 29