Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (1) 1984, S. 43–63

Eine Realisierung der Theorie der abstrakten Besov-Räume $B_q^s(A)$ $(s > 0, 1 \leqq q \leqq \infty)$ und der Lebesgue-Räume $H_{p,\mu}^s$ auf der Grundlage Besselscher Differentialoperatoren

G. Altenburg

Die Arbeit behandelt die von H. Triebel entwickelte Theorie der abstrakten Besov-Räume am Beispiel gewichteter L_p-Räume auf der Grundlage Besselscher Differentialoperatoren. Außerdem werden Räume vom Lebesgue-Typ untersucht, die auf derselben Grundlage definiert sind, und es werden Interpolationssätze für alle diese Räume angegeben.

В этой работе изучается развитая Х. Трибелом теория абстрактных пространств Бесова на примере весовых пространств типа L_p на основе дифференциальных операторов Бесселя. Кроме этого исследуются пространства типа Лебега, определенных на том же основе, и доказываются интерполяционные теоремы для всех этих пространств.

The paper deals with the theory of abstract Besov-spaces, defined by H. Triebel, in the concrete case of weighted L_p-spaces on the base of Bessel-type-differential-operators. Also spaces of Lebesgue-type on the same base are defined and treated here. Furthermore interpolation theorems are given.

0. Einführung

Die Arbeit beinhaltet die von H. Triebel in [5] entwickelte Theorie der abstrakten Besov-Räume an einem konkreten Beispiel. Als Hilbertraum H dieser Theorie fungiert hier der Raum $L_{2,\mu}$ und als Banachraum A einer der Räume $L_{p,\mu}$. Die Stelle des positiv-definiten, selbstadjungierten Operators Λ nimmt hier der Operator $\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)\,\mathfrak{B}_\mu$ ein, wobei $\mathfrak{B}_\mu$ die in $L_{2,\mu}$ unitäre Besseltransformation ist (modifizierte Hankeltransformation). In [2] wurde $\mathfrak{B}_\mu$ auf einen linearen Hausdorffraum $H'(\Omega)$ ausgedehnt, in dem die Funktion $(1 + x^2)$ ein Multiplikator ist und alle Räume $L_{p,\mu}$ stetig eingebettet sind. Es stellt sich heraus, daß man $H'(\Omega)$ als Konkretisierung des in der abstrakten Theorie verwendeten Raumes $\mathscr{H}$ verwenden kann. Der Beweis der Zugehörigkeit des Tripels $[L_{2,\mu}, \Lambda, L_{p,\mu}]$ zu einer geeigneten Klasse $\mathfrak{R}'$ beruht wesentlich auf der Arbeit von P. L. Butzer, R. J. Nessel und W. Trebels [3].

1. Abstrakte Besov-Räume

1.1. Definitionen

Sei Λ ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H und

$$\Lambda a = \int_d^\infty s\, dE_s a, \qquad a \in D(\Lambda),$$

seine Spektraldarstellung ($d > 0$). Dann sind durch

$$R_{\beta,\varrho}(A)\, a = \int_d^\infty \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)_+^\beta dE_s a, \quad \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)_+ := \max\left(0, 1 - \frac{s}{\varrho}\right),$$

die Riesz-Mittel des Operators A definiert, wobei β komplex, $\operatorname{Re}\beta \geqq 0$, $\varrho > 0$ sind.

Definition 1: Sei l eine nichtnegative ganze Zahl. Dann ist $\mathfrak{R}^l$ die Menge aller Tripel $[H, A, A]$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(i) H ist ein komplexer Hilbertraum, A ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator in H und A ein komplexer Banachraum. Weiterhin existiert ein linearer Hausdorffraum $\mathscr{H}$, in dem H und A stetig eingebettet sind. $A \cap H$ ist dicht in A und H.

(ii) Für $a \in A \cap H$ ist $R_{l,\varrho}(A)\, a$ bezüglich $\varrho \in (0, \infty)$ stets eine A-Lebesgue-meßbare Funktion, und es gilt

$$\sup_{\varrho>0} \|R_{l,\varrho}(A)\, a \mid A\| \leqq c \|a \mid A\|, \qquad a \in A \cap H,$$

mit einer von a unabhängigen Konstanten $c > 0$.

(iii) Für alle reellen Zahlen $\beta \geqq l + 1$ und alle $a \in A \cap H$ gilt

$$R_{\beta,\varrho}(A)\, a \xrightarrow[A]{} a \quad \text{für} \quad \varrho \to \infty.$$

Bemerkung 1: (ii) bedeutet, daß die Riesz-Mittel $R_{l,\varrho}(A)$ stetig auf ganz A fortsetzbar sind und in der Operatorennorm gleichmäßig (bez. ϱ) beschränkt sind.

Definition 2: Φ ist die Menge aller Funktionenfolgen $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Alle $\varphi_j(x)$ sind auf $\mathbf{R}_1$ definierte reellwertige, unendlich oft differenzierbare Funktionen mit

$$\operatorname{supp}\varphi_0 \subseteqq (-2,2), \qquad \operatorname{supp}\varphi_j \subseteqq (2^{j-1}, 2^{j+1}), \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

(ii) Für jede nichtnegative ganze Zahl k existiert eine Zahl $c_k > 0$, so daß für alle $j = 0, 1, \ldots$ und alle $x \in \mathbf{R}_1$ die Abschätzung

$$|\varphi_j^{(k)}(x)| \leqq c_k \cdot 2^{-jk}$$

erfüllt ist.

(iii) Es existieren zwei positive Konstanten C_0 und C_1 mit

$$C_0 \leqq \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) \leqq C_1 \quad \text{für alle } x \geqq 0.$$

Definition 3: Ist A ein Banachraum, $\{a_j\}_{j=0}^\infty \subset A$, $s \geqq 0$, $1 \leqq q < \infty$, so setzen wir

$$\|\{a_j\} \mid l_q^s(A)\| := \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{jsq} \|a_j \mid A\|^q\right)^{1/q}, \qquad \|\{a_j\} \mid l_\infty^s(A)\| := \sup_j (2^{js} \|a_j \mid A\|).$$

Definition 4: Ist $[H, A, A]$ für ein passendes l zu einer Klasse $\mathfrak{R}^l$ gehörig, $s > 0$, $1 \leqq q \leqq \infty$, $\varphi \in \Phi$, so definieren wir

$$B_q^s(A) := \{a \in A : \|\{\varphi_j(A)\, a\} \mid l_q^s(A)\| < \infty\}.$$

Bemerkung 2: Die Funktionen $\varphi_j(\Lambda)$ des Operators Λ sind wie üblich durch

$$\varphi_j(\Lambda)\, a = \int\limits_d^\infty \varphi_j(s)\, dE_s a, \qquad a \in D(\varphi_j(\Lambda)),$$

gegeben. In [5: Prop. 3.2.1] wurde gezeigt, daß die Operatoren $\varphi_j(\Lambda)$ stets beschränkt in A sind, d. h., für $a \in A$ gehört $\varphi_j(\Lambda)\, a$ auf jeden Fall wieder zu A, so daß der Ausdruck

$$\|a \mid B_q^s(A)\|^\varphi := \|\{\varphi_j(\Lambda)\, a\} \mid l_q^s(A)\|$$

für jedes $\varphi \in \Phi$ sinnvoll ist.

Bemerkung 3: Nach [5: Th. 3.2.2] ist $B_q^s(A)$ im gesamten Parameterbereich von s und q stets ein Banachraum mit der Norm $\|a \mid B_q^s(A)\|^\varphi$, $\varphi \in \Phi$. Durchläuft φ die gesamte Menge Φ bei festem s und q, so sind alle diese Normen äquivalent. Für den Beweis von Th. 3.2.2 und Prop. 3.2.1 in [5] werden nur die Riesz-Mittel $R_{\beta,\varrho}(\Lambda)$ mit reellem β benutzt, so daß die Beschränkung auf diese in Def. 1 (iii) ausreichend ist.

1.2. Die Räume H, A und $\mathscr{H}$

Definition 1: Für $1 < p < \infty$ und $\mu \geqq -\frac{1}{2}$ setzen wir $L_{p,\mu} := \{f : f(x)$ ist eine in $(0, \infty)$ definierte, komplexwertige Funktion (Lebesgue-meßbar) mit $\|f \mid L_{p,\mu}\| < \infty\}$,

$$\|f \mid L_{p,\mu}\| := \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p\, x^{2\mu+1}\, dx\right)^{1/p}.$$

Bemerkung 1: Die Räume $L_{p,\mu}$ sind Banachräume, $L_{2,\mu}$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L_{2,\mu}} = \int\limits_0^\infty f(x) \cdot \overline{g(x)}\, x^{2\mu+1}\, dx.$$

Definition 2: $H(\Omega)$ ist der Raum aller in $(0, \infty)$ definierten, unendlich oft differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen $\varphi(x)$, für die alle Normen

$$\|\varphi\|_{k,l} = \sup_{x>0}\, (1 + x^k) \cdot \sum_{j=0}^{l} |(x^{-1}D)^j\, \varphi(x)| \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots)$$

endlich sind. Dabei ist $(x^{-1}D)$ die Hintereinanderausführung von Differentiation nach x und Multiplikation mit x^{-1}, $(x^{-1}D)^j$ die j-fache Anwendung dieses Operators mit $(x^{-1}D)^0 := I$ (Identität).

Bemerkung 2: Nach [2] ist $H(\Omega)$ ein Fréchet-Raum und dicht in allen $L_{p,\mu}$. Außerdem lassen sich alle Räume $L_{p,\mu}$ als Teilräume des zu $H(\Omega)$ dualen Raumes $H'(\Omega)$ interpretieren, realisiert durch

$$f(\varphi) = \int\limits_0^\infty f(x)\, \varphi(x)\, x^{2\mu+1}\, dx, \qquad f \in L_{p,\mu}, \qquad \varphi \in H(\Omega),$$

und die Einbettung der Räume $L_{p,\mu}$ in $H'(\Omega)$ ist stetig in bezug auf die starke Topologie von $H'(\Omega)$.

Wir wählen nun für H in Def. 1.1/1 den Raum $L_{2,\mu}$, für A den Raum $L_{p,\mu}$ und für $\mathscr{H}$ den Raum $H'(\Omega)$. Damit ist (i) aus Definition 1.1/1 erfüllt, wenn man Bemerkung 2 benutzt.

1.3. Der Differentialoperator M_μ in $L_{2,\mu}$

Definition 1: Es sei $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $M_\mu := (2\mu + 2)(x^{-1}D) + x^2(x^{-1}D)^2$,

$$\dot{A}f := -M_\mu f, \qquad D(\dot{A}) = H(\Omega),$$

$$Af := \mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu f, \qquad D(A) = \mathscr{W}^2_{2,\mu}.$$

Bemerkung 1: Nach [2] ist der Differentialoperator M_μ ein stetiger Operator in $H(\Omega)$. Für nichtnegative ganzzahlige l ist $\mathscr{W}^l_{2,\mu}$ die Vervollständigung von $H(\Omega)$ in der Norm

$$\|f \mid \mathscr{W}^l_{2,\mu}\| = (\|f \mid L_{2,\mu}\|^2 + \|x^l(x^{-1}D)^l f \mid L_{2,\mu}\|^2)^{1/2}$$

und nach [1] ein Hilbertraum.

Bemerkung 2: $\mathfrak{B}_\mu$ ist die Besseltransformation (modifizierte Hankeltransformation), definiert in $L_{2,\mu}$ durch

$$(\mathfrak{B}_\mu f)(y) = \int_0^\infty \frac{J_\mu(xy)}{(xy)^\mu} \cdot f(x)\, x^{2\mu+1}\, dx,$$

wobei $J_\mu(t)$ die Besselfunktion 1. Art der Ordnung μ ist. Nach [1] ist $\mathfrak{B}_\mu$ eine unitäre Transformation in $L_{2,\mu}$ mit $\mathfrak{B}_\mu^{-1} = \mathfrak{B}_\mu$. Außerdem ist

$$(f, g)^* = (f, g)_{L_{2,\mu}} + (Af, Ag)_{L_{2,\mu}}$$

ein Skalarprodukt in $\mathscr{W}^2_{2,\mu}$, das die zu $\|f \mid \mathscr{W}^2_{2,\mu}\|$ äquivalente Norm

$$\|f\|^* = (\|f \mid L_{2,\mu}\|^2 + \|Af \mid L_{2,\mu}\|^2)^{1/2}$$

erzeugt.

Im folgenden bezeichnet $\tilde{\mathscr{D}}_A$ die Menge aller Eigenwerte des Operators A, $\mathscr{D}_A$ die Menge der Eigenwerte endlicher Vielfachheit und $\mathscr{S}_A$ das Spektrum des Operators A.

Satz 1: *Der Operator $\dot{A}$ ist wesentlich selbstadjungiert im Raum $L_{2,\mu}$, sein Abschluß $\bar{\dot{A}}$ ist der Operator A mit $D(A) = \mathscr{W}^2_{2,\mu}$. Der energetische Raum des Operators A ist $H_A = \mathscr{W}^1_{2,\mu}$, die Spektren $\tilde{\mathscr{D}}_A$ und $\mathscr{D}_A$ sind leer und $\mathscr{S}_A \subseteqq [0, \infty)$.*

Beweis: 1. *Schritt:* Wir beweisen, daß A selbstadjungiert und der Abschluß von $\dot{A}$ ist. Der Raum $H(\Omega)$ ist stetig eingebettet in allen Räumen $\mathscr{W}^l_{2,\mu}$ und dicht nach Definition der Räume, woraus $D(\dot{A}) \subseteqq D(A)$ folgt. Außerdem gilt nach [2: 4.2] die Identität $Af = \dot{A}f$ für $f \in H(\Omega) = D(\dot{A})$. Damit ist A eine Erweiterung von $\dot{A}$. Da $\mathfrak{B}_\mu$ eine unitäre Transformation in $L_{2,\mu}$ ist, gilt für $f, g \in D(A)$

$$(Af, g)_{L_{2,\mu}} = \int_0^\infty (\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu f)(y)\, \overline{g(y)}\, y^{2\mu+1}\, dy = \int_0^\infty x^2 (\mathfrak{B}_\mu f)(x)\, \overline{(\mathfrak{B}_\mu g)(x)}\, x^{2\mu+1}\, dx$$

$$= \int_0^\infty f(y)\, \overline{(\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu g)(y)}\, y^{2\mu+1}\, dy = (f, Ag)_{L_{2,\mu}}. \qquad (1)$$

Folglich ist A und damit auch $\dot{A}$ ein symmetrischer Operator, wobei die Dichtheit von $D(A)$ in $L_{2,\mu}$ aus $H(\Omega) \subseteqq D(A) \subseteqq L_{2,\mu}$ und der Dichtheit von $H(\Omega)$ in $L_{2,\mu}$ folgt. Nach Definition ist $\mathscr{W}^2_{2,\mu}$ vollständig in der Norm $\|f \mid \mathscr{W}^2_{2,\mu}\|$ und nach Bemerkung 1 bzw. Bemerkung 2 dann auch vollständig in der äquivalenten Norm $\|f\|_A = \|f \mid L_{2,\mu}\| + \|Af \mid L_{2,\mu}\|$. Mit [6: Satz 17.2] ist A folglich ein abgeschlossener Operator und somit eine Erweiterung von $\overline{\dot{A}}$. Da $D(\overline{\dot{A}})$ der Abschluß von $D(\dot{A})$ in der Norm $\|f\|_{\dot{A}} = \|f \mid L_{2,\mu}\| + \|\dot{A}f \mid L_{2,\mu}\| = \|f\|_A$ und $H(\Omega)$ dicht in $D(A)$ ist, stimmt $D(A)$ folglich mit $D(\overline{\dot{A}})$ überein, und damit ist $A = \overline{\dot{A}}$.

Wir beweisen nun, daß A selbstadjungiert ist, woraus die wesentliche Selbstadjungiertheit von $\dot{A}$ folgt. Es gilt

$$(Af, f)_{L_{2,\mu}} = \int_0^\infty (\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu f)(y)\,\overline{f(y)}\, y^{2\mu+1}\,dy = \int_0^\infty x^2\, |(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\, x^{2\mu+1}\,dx$$
$$\geqq 0 \cdot \|f \mid L_{2,\mu}\|^2, \quad f \in D(A).$$

Damit ist A halbbeschränkt (nach unten), woraus mit [6: Satz 17.6] für beliebige $\lambda < 0$ die Gleichung

$$\mathscr{R}(A - \lambda E) = \overline{\mathscr{R}(A - \lambda E)}$$

folgt. E ist hierbei der identische Operator in $L_{2,\mu}$, $\mathscr{R}(B)$ bezeichnet den Wertebereich eines Operators B, der Querstrich den Abschluß in $L_{2,\mu}$. Sei A^* der adjungierte Operator zu A, $D(A^*) \subseteqq L_{2,\mu}$. Wegen $L_{2,\mu} \subseteqq H'(\Omega)$ können wir jedes Element g von $D(A^*)$ folglich durch die Interpretation

$$g(\varphi) = \int_0^\infty g(x)\,\varphi(x)\,x^{2\mu+1}\,dx, \qquad \varphi \in H(\Omega).$$

als Element von $H'(\Omega)$ auffassen. Nach [2] ist $\mathfrak{B}_\mu$ ein Automorphismus in $H(\Omega)$ und auch in $H'(\Omega)$, wenn man $\mathfrak{B}_\mu$ durch

$$(\mathfrak{B}_\mu f)(\varphi) := f(\mathfrak{B}_\mu \varphi) \qquad f \in H'(\Omega), \qquad \varphi \in H(\Omega),$$

auf den Raum $H'(\Omega)$ überträgt. Die Multiplikation in $H(\Omega)$ mit einer in $(0, \infty)$ definierten, unendlich oft differenzierbaren geraden Funktion $a(x)$ höchstens polynomialen Wachstums für $x \to \infty$, deren Ableitungen $(x^{-1}D)^k a$ sämtlich bei Null beschränkt sind, ist eine stetige Abbildung in $H(\Omega)$ (die Funktion $a(x)$ heißt dann *Multiplikator* in $H(\Omega)$). Für einen Multiplikator $a(x)$ in $H(\Omega)$ ist dann die Multiplikation $a \cdot f$, definiert für $f \in H'(\Omega)$ durch $(a \cdot f)(\varphi) := f(a \cdot \varphi)$ $\big(\varphi \in H(\Omega)\big)$, ebenfalls eine stetige Abbildung in $H'(\Omega)$ ($a(x)$ heißt dann *Multiplikator* in $H'(\Omega)$). Da die Funktion $a(x) = x^2$ ein Multiplikator in $H(\Omega)$ und in $H'(\Omega)$ ist, erhalten wir für obige Funktion $g \in D(A^*)$

$$(\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu g)(\varphi) = g(\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu \varphi) = \int_0^\infty g(y)\,(\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu \varphi)(y)\,y^{2\mu+1}\,dy$$
$$= (g, A\overline{\varphi})_{L_{2,\mu}} = (A^*g, \overline{\varphi})_{L_{2,\mu}} = (A^*g)(\varphi), \qquad \varphi \in H(\Omega),$$

wobei wir die Funktion A^*g, die zu $L_{2,\mu}$ gehört, wieder als Element von $H'(\Omega)$ auffassen. Die in $H'(\Omega)$ gebildete verallgemeinerte Funktion $\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu g$ stimmt also in $H'(\Omega)$ mit der Funktion A^*g aus $L_{2,\mu}$ überein. Wendet man die verallgemeinerte Besseltransformation in $H'(\Omega)$ auf beide an, so erhält man die Identität von $x^2 \mathfrak{B}_\mu g$ und $\mathfrak{B}_\mu(A^*g)$ in $H'(\Omega)$. Da $\mathfrak{B}_\mu$ unitär in $L_{2,\mu}$ ist, gehört $\mathfrak{B}_\mu(A^*g)$ zu $L_{2,\mu}$ und folglich auch $x^2\mathfrak{B}_\mu g$. Andererseits stimmt die verallgemeinerte Funktion $x^2\mathfrak{B}_\mu g$ aber mit der gewöhnlichen Funktion $x^2\mathfrak{B}_\mu g$ (Multiplikation der gewöhnlichen Besseltransformierten $\mathfrak{B}_\mu g$ mit der Funktion x^2) überein bzw. wird von dieser erzeugt. Daraus folgt, daß die Funktion $\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu g$ zu $L_{2,\mu}$ gehört und g folglich zu $\mathscr{W}^2_{2,\mu}$. Daraus ergibt sich $D(A) \supseteqq D(A^*)$, und da A^* eine Erweiterung von A ist, daß A selbstadjungiert, d. h. $A^* = A$ ist.

2. *Schritt:* Wir beweisen $H_A = \mathscr{W}^1_{2,\mu}$. Nach [6: Satz 17.10] ist der zu A gehörende energetische Raum H_A vollständig in der Norm

$$\|f \mid H_A\| = \left((f, f)_{L_{2,\mu}} + (Af, f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1/2} = \left(\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)\, \mathfrak{B}_\mu f, f\right)_{L_{2,\mu}}$$

$$= \left(\int_0^\infty (1 + x^2)\, |(\mathfrak{B}_\mu f)\,(x)|^2\, x^{2\mu+1}\, dx\right)^{1/2},$$

und $D(A)$ ist dicht in H_A, d. h., H_A ist die Vervollständigung von $\mathscr{W}^2_{2,\mu}$ in der Norm $\|f \mid H_A\|$. Andrerseits ist $H(\Omega) \subseteqq \mathscr{W}^2_{2,\mu} \subseteqq \mathscr{W}^1_{2,\mu}$, und aus der Dichtheit von $H(\Omega)$ in $\mathscr{W}^1_{2,\mu}$ folgt die Dichtheit von $\mathscr{W}^2_{2,\mu}$ in $\mathscr{W}^1_{2,\mu}$. In [1] wurde gezeigt, daß $\|f \mid H_A\|$ eine äquivalente Norm in $\mathscr{W}^1_{2,\mu}$ ist. Damit sind H_A und $\mathscr{W}^1_{2,\mu}$ identisch.

3. *Schritt:* Die Behauptung $\mathscr{S}_A \subseteqq [0, \infty)$ folgt sofort aus $(Af, f)_{L_{2,\mu}} \geqq 0$.

4. *Schritt:* Wir beweisen, daß $\tilde{\mathscr{D}}_A$ und $\mathscr{D}_A$ leer sind. Wegen $\mathscr{D}_A \subseteqq \tilde{\mathscr{D}}_A$ genügt es, dies für $\tilde{\mathscr{D}}_A$ zu zeigen. Wir nehmen an, es gäbe ein Element λ in $\tilde{\mathscr{D}}_A$. Wegen $\tilde{\mathscr{D}}_A \subseteqq \mathscr{S}_A$ muß dann $\lambda \geqq 0$ gelten. Dann gibt es nach Definition von $\tilde{\mathscr{D}}_A$ (siehe [6]) ein von Null verschiedenes Element $g \in L_{2,\mu}$ (o. B. d. A. sei $\|g \mid L_{2,\mu}\| = 1$) mit $Ag = \lambda \cdot g$, d. h. konkret: mit $\left(\mathfrak{B}_\mu(x^2 - \lambda)\, \mathfrak{B}_\mu g\right) = 0$ in $L_{2,\mu}$. Da $\mathfrak{B}_\mu$ unitär ist in $L_{2,\mu}$, gilt folglich $(x^2 - \lambda)\, \mathfrak{B}_\mu g = 0$. Die Funktion $x^2 - \lambda$ verschwindet in $[0, \infty)$ jedoch nur an der Stelle $x = \sqrt{\lambda}$, woraus sich $\mathfrak{B}_\mu g = 0$ und damit $g = 0$ ergibt, was ein Widerspruch zu $\|g \mid L_{2,\mu}\| = 1$ ist. Die Annahme ist folglich falsch, womit die Behauptung $\mathscr{D}_A = \tilde{\mathscr{D}}_A = \emptyset$ und damit auch der Satz bewiesen ist ∎

Bemerkung 3: Mit A sind somit auch alle positiven Potenzen A^s definiert und ebenfalls selbstadjungiert in $L_{2,\mu}$. Speziell gilt $\sqrt{A} = \mathfrak{B}_\mu x \mathfrak{B}_\mu$ mit dem Definitionsgebiet $\mathscr{W}^1_{2,\mu}$, wie man leicht sieht.

Satz 2: *Es seien* $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $s > 0$, χ_s *die charakteristische Funktion der Menge* $[0, s)$. *Definiert man* $E_s := \mathfrak{B}_\mu \chi_s \mathfrak{B}_\mu$, *dann ist* $\{E_s\}_{s>0}$ *eine Spektralschar im Raum* $L_{2,\mu}$ *und erzeugt den selbstadjungierten Operator* $\sqrt{A}$, *d. h.*, $\sqrt{A}$ *hat die Spektraldarstellung* $\sqrt{A} = \int_0^\infty s\, dE_s$.

Beweis: 1. *Schritt:* Wir zeigen, daß alle E_s stetig in $L_{2,\mu}$ sind. Es gilt

$$\|E_s f \mid L_{2,\mu}\|^2 = \|\mathfrak{B}_\mu \chi_s \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2 = \|\chi_s \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2$$

$$= \int_0^s |(\mathfrak{B}_\mu f)\,(x)|^2\, x^{2\mu+1}\, dx \leqq \|\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2 = \|f \mid L_{2,\mu}\|^2, \quad f \in L_{2,\mu}.$$

Damit sind alle E_s beschränkte Operatoren in $L_{2,\mu}$ mit $\|E_s \mid L(L_{2,\mu}, L_{2,\mu})\| \leqq 1$.

2. *Schritt:* Für beliebige Funktionen f, g aus $L_{2,\mu}$ gilt stets

$$(E_s f, g)_{L_{2,\mu}} = (\mathfrak{B}_\mu \chi_s \mathfrak{B}_\mu f, g)_{L_{2,\mu}} = (\chi_s \mathfrak{B}_\mu f, \mathfrak{B}_\mu g)_{L_{2,\mu}} = (f, E_s g)_{L_{2,\mu}}, \tag{3}$$

woraus die Selbstadjungiertheit der Operatoren E_s folgt. Hierbei wurde benutzt, daß $\mathfrak{B}_\mu$ unitär in $L_{2,\mu}$ ist mit $\mathfrak{B}_\mu^2 = E$ (Identität in $L_{2,\mu}$). Auf Grund dieser Tatsache gilt auch die Beziehung

$$E_s^2 = E_s, \quad \text{wobei zusätzlich } \chi_s^2 = \chi_s \text{ verwendet wird.} \tag{4}$$

Mit (3), (4) und dem 1. Schritt haben wir bewiesen, daß alle E_s Projektoren in $L_{2,\mu}$ sind.

3. *Schritt:* Aus $\chi_{s_1} \cdot \chi_{s_2} = \chi_{\min(s_1,s_2)}$ erhält man die Beziehung

$$E_{s_1}E_{s_2} = E_{\min(s_1,s_2)}. \tag{5}$$

Leicht sieht man auch, daß für $f \in L_{2,\mu}$

$$\lim_{s\downarrow 0} E_s f = 0 \quad (\text{Konvergenz in } L_{2,\mu}) \tag{6}$$

gilt. Für jede Funktion $f \in L_{2,\mu}$ gilt weiterhin

$$\|E_s f - f \mid L_{2,\mu}\|^2 = \int_s^\infty |(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2 \, x^{2\mu+1} \, dx,$$

wobei die rechte Seite gegen 0 konvergiert, wenn s gegen ∞ strebt, da $\mathfrak{B}_\mu f$ zu $L_{2,\mu}$ gehört. Dies ist die Aussage

$$\lim_{s\to\infty} E_s f = f \qquad (\text{Konvergenz in } L_{2,\mu}). \tag{7}$$

Analog erhält man für $s_0 > 0$ die Aussage

$$\lim_{s\downarrow s_0} E_s f = E_{s_0} f, \quad f \in L_{2,\mu}. \tag{8}$$

Mit (5) bis (8) sind nun für die Operatoren E_s alle Bedingungen einer Spektralschar in $L_{2,\mu}$ erfüllt.

4. *Schritt:* Sei G der von der Spektralschar E_s erzeugte Spektraloperator

$$G = \int_0^\infty s \, dE_s \quad (G \text{ ist selbstadjungiert}) \quad \text{mit}$$

$$D(G) = \left\{ f \in L_{2,\mu} : \int_0^\infty s^2 d \, \|E_s f \mid L_{2,\mu}\|^2 < \infty \right\}.$$

Dann ist G^2 ebenfalls selbstadjungiert mit dem Definitionsgebiet

$$D(G^2) = \left\{ f \in L_{2,\mu} : \int_0^\infty s^4 d \, \|E_s f \mid L_{2,\mu}\|^2 < \infty \right\}.$$

Nach [3: S. 354] stimmt G^2 auf dem Raum $H(\Omega)$ mit dem Differentialoperator

$$-\Box = -D^2 - \frac{2\mu + 1}{x} D \qquad \left(D = \frac{d}{dx}\right) \tag{9}$$

überein (man setze dort $\nu := \mu + 1/2$). Nach einer leichten Umformung von (9) sieht man jedoch, daß dies der Differentialoperator $\dot{A}$ aus Definition 1.3/1 ist, d. h., G^2 ist eine selbstadjungierte Erweiterung von $\dot{A}$. Da der Operator A aus Definition 1.3 nach Satz 1 die kleinste selbstadjungierte Erweiterung von $\dot{A}$ ist und keine weiteren echten selbstadjungierten Erweiterungen existieren können (siehe [6]), muß G^2 folglich mit A übereinstimmen, d. h., es gilt

$$\mathfrak{B}_\mu x^2 \mathfrak{B}_\mu = \int_0^\infty s^2 dE_s = G^2, \qquad D(G^2) = \mathscr{W}^2_{2,\mu}. \tag{10}$$

Mit Bemerkung 1.3/3 haben wir schließlich das gewünschte Resultat

$$\mathfrak{B}_\mu x \mathfrak{B}_\mu = \int_0^\infty s dE_s = G, \qquad D(G) = \mathscr{W}^1_{2,\mu},$$

womit der Beweis des Satzes beendet ist ∎

1.4. Der Operator A in $L_{2,\mu}$

Nach [3: S. 353] gilt für $1 < p < \infty$, $\varrho > 0$, $\alpha > (2\mu + 1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$ die Abschätzung

$$\left\| \int_0^{\sqrt{\varrho}} (1 - s^2/\varrho)^\alpha dE_s f \mid L_{p,\mu} \right\| \leqq c \cdot \|f \mid L_{p,\mu}\|, \qquad f \in L_{p,\mu} \cap L_{2,\mu}, \tag{1}$$

wobei die positive Konstante c weder von ϱ noch von f abhängt. Betrachten wir die Riesz-Mittel des Operators A aus Definition 1.3, so erhalten wir

$$R_{\alpha,\varrho}(A) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{s^2}{\varrho}\right)_+^\alpha dE_s = \int_0^{\sqrt{\varrho}} \left(1 - \frac{s^2}{\varrho}\right)^\alpha dE_s$$

und mit (1) folglich für $\alpha > (2\mu + 1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$

$$\sup_{\varrho \to 0} \|R_{\alpha,\varrho}(A) f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c \cdot \|f \mid L_{p,\mu}\|, \qquad f \in L_{p,\mu} \cap L_{2,\mu}. \tag{2}$$

Bemerkung 1: Wählen wir $l := \left[(2\mu + 1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|\right] + 1$, wobei $[b]$ den ganzzahligen Teil der reellen Zahl b bezeichnet, so ist die Bedingung (ii) aus Definition 1.1/1 für die Riesz-Mittel des Operators A erfüllt. Es ist bei der Wahl von l zu beachten, daß l von μ und p abhängt, daß man bei festem $\mu \geqq -\frac{1}{2}$ jedoch ein von p unabhängiges l findet, nämlich $l := \left[\mu + \frac{1}{2}\right] + 1$.

Definition: Es sei G der von der Spektralschar $\{E_s\}$ erzeugte Spektraloperator aus Satz 1.3/2, $1 < p < \infty$, $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $\alpha > (2\mu + 1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$ und $\Psi(t)$ eine auf $[0, \infty)$ stetige, streng monoton wachsende Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\lim_{t \downarrow 0} \Psi(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \Psi(t) = \infty;$

(ii) Ψ besitze $[\alpha] + 2$ Ableitungen $\Psi^{(k)}$, $0 \leqq k \leqq [\alpha] + 2$, mit

$$t^k |\Psi^{(k+1)}(t)| \leqq c_k \cdot \Psi'(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq k \leqq [\alpha] + 1,$$

wobei c_k von t unabhängige Konstanten sind und $\Psi'(t)$ monoton für $t \geqq t_0 > 0$ ist.

Dann heißen für $\varkappa > \alpha$, $\varrho > 0$, $\beta > 0$ die Operatoren

$$(R, \varkappa)_{\Psi,\varrho}(G) = \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{\Psi(s)}{\Psi(\varrho)}\right)_+^\varkappa dE_s$$

verallgemeinerte Riesz-Mittel von G der Ordnung $\varkappa$, und

$$L_{\Psi,\beta,\varrho}(G) = \int\limits_0^\infty \left(1 + \frac{\Psi(s)}{\Psi(\varrho)}\right)^{-\beta} dE_s$$

heißen *Besselpotentiale* von G der Ordnung β.

Bemerkung 2: In [3] wurden verallgemeinerte Riesz-Mittel von G und Besselpotentiale von G speziell für die Funktion $\Psi(t) = t^2$ untersucht, die alle in der Definition geforderten Bedingungen mit beliebigem $\alpha \geqq 0$ erfüllt ($t_0 \geqq 0$ beliebig wählbar).

Satz 1: *Es seien* $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$, $\beta > \alpha > (2\mu + 1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$, A *der Operator aus Definition* 1.3. *Dann existiert eine positive Konstante* c, *so daß für alle Funktionen* $f \in L_{p,\mu} \cap L_{2,\mu}$ *die Abschätzung*

$$\|R_{\beta,\varrho}(A) f - f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c \cdot \frac{1}{\varrho} \|Af \mid L_{p,\mu}\|, \quad \varrho > 0, \tag{3}$$

gilt.

Beweis: Nach [3: Cor. 4.4] existieren positive Konstanten c_1 und c_2, so daß für alle $f \in L_{p,\mu} \cap L_{2,\mu}$ und alle $\varrho > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \|L_{s^2,\mu+3/2,\varrho}(G) f - f \mid L_{p,\mu}\| &\leqq \|(R, \beta)_{s^2,\varrho}(G) f - f \mid L_{p,\mu}\| \\ &\leqq c_2 \cdot \|L_{s^2,\mu+3/2,\varrho}(G) f - f \mid L_{p,\mu}\| \end{aligned} \tag{4}$$

gilt. Außerdem gilt die Beziehung

$$(R, \beta)_{s^2,\varrho}(G) = \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{s^2}{\varrho^2}\right)_+^\beta dE_s = R_{\beta,\varrho^2}(A). \tag{5}$$

Setzt man (5) in (4) ein, substituiert $\varrho^2 = \varrho_1$ und führt hinterher eine Umbenennung von ϱ_1 in ϱ durch, so erhält man die Ungleichung

$$\|R_{\beta,\varrho}(A) f - f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c_2 \cdot \|L_{s^2,\mu+3/2,\sqrt{\varrho}}(G) f - f \mid L_{p,\mu}\|. \tag{6}$$

Unter Verwendung von [3: Cor. 5.2] erhält man aus (6) die gewünschte Ungleichung (3), womit der Beweis beendet ist ∎

Bemerkung 3: Verwendet man l aus Bemerkung 1.4/1 und wählt $\beta > l + 1$, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und damit dann auch die Bedingung (iii) der Definition 1.1/1 für den Operator A.

Satz 2: *Es sei* $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$, $l := \left[(2\mu + 1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|\right] + 1$, A *der Operator aus Definition* 1.3 *und*

$$\Lambda := A + E = \mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)\,\mathfrak{B}_\mu. \tag{7}$$

Dann gehört $[L_{2,\mu}, \Lambda, L_{p,\mu}]$ *zur Klasse* $\mathfrak{R}^l$.

Beweis: 1. *Schritt:* Wir zeigen, daß Λ ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator in $L_{2,\mu}$ ist. Wir wissen, daß der Operator A mit $D(A) = \mathscr{W}^2_{2,\mu}$ selbstadjungiert ist. Da der identische Operator E in $L_{2,\mu}$ symmetrisch ist und $D(A) \subseteqq D(E) = L_{2,\mu}$ gilt, können wir Satz 17.8 aus [6] anwenden (man setze dort $B := E$, $c := 1$, $\delta := 0$). Daraus folgt, daß Λ ein selbstadjungierter Operator in $L_{2,\mu}$ mit $D(\Lambda) = D(A) = \mathscr{W}^2_{2,\mu}$ ist. Unter Verwendung der Abschätzung $(1 + x^2) \geqq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(\Lambda f, f)_{L_{2,\mu}} &= (\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)\, \mathfrak{B}_\mu f, f)_{L_{2,\mu}} = ((1 + x^2)\, \mathfrak{B}_\mu f, \mathfrak{B}_\mu f)_{L_{2,\mu}} \\ &= \int_0^\infty (1 + x^2)^2\, |(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\, x^{2\mu+1}\, dx \geqq \int_0^\infty |(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\, x^{2\mu+1}\, dx \\ &= \|\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2 = \|f \mid L_{2,\mu}\|^2, \qquad f \in D(\Lambda).\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß der Operator Λ positiv-definit ist. Die Betrachtungen in Abschnitt 1.2 zeigen nun, daß das Tripel $[L_{2,\mu}, \Lambda, L_{p,\mu}]$ mit $1 < p < \infty$ stets die Bedingung (i) der Definition 1.1/1 erfüllt.

2. *Schritt:* Wir zeigen, daß (ii) aus Def. 1.1/1 erfüllt ist. Nach Satz 1.3/2 hat A die Spektraldarstellung $A = \int_0^\infty s^2 dE_s$, woraus für Λ die Darstellung $\Lambda = \int_0^\infty (1 + s^2)\, dE_s$ folgt. Betrachten wir nun die Riesz-Mittel $R_{\beta,\varrho}(\Lambda)$ mit $\beta \geqq 0$, $\varrho > 0$, so gilt

$$R_{\beta,\varrho}(\Lambda) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{1 + s^2}{\varrho}\right)_+^\beta dE_s.$$

Im Fall $\varrho \leqq 1$ ist $1 + s^2 \geqq \varrho$ und somit die Funktion $\left(1 - \frac{1 + s^2}{\varrho}\right)_+^\beta$ identisch Null für $s \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, d. h., die Riesz-Mittel $R_{\beta,\varrho}(\Lambda)$ sind im Fall $\varrho \leqq 1$ die Nulloperatoren in $L_{p,\mu}$. Im Fall $\varrho > 1$ haben wir die Beziehung

$$\begin{aligned}R_{l,\varrho}(\Lambda) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{1 + s^2}{\varrho}\right)_+^l dE_s = \left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^l \int_0^\infty \left(1 - \frac{s^2}{\varrho - 1}\right)_+^l dE_s \\ &= \left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^l \cdot R_{l,\varrho-1}(A).\end{aligned} \tag{8}$$

Unter Verwendung von (2) erhalten wir folglich aus (8)

$$\sup_{\varrho>1} \|R_{l,\varrho}(\Lambda)\, f \mid L_{p,\mu}\| \leqq \sup_{\varrho>1} \left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^l \cdot \sup_{\varrho>0} \|R_{l,\varrho}(A)\, f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c \cdot \|f \mid L_{p,\mu}\| \tag{9}$$

für alle $f \in L_{2,\mu} \cap L_{p,\mu}$, wobei $c > 0$ unabhängig von f ist. Damit ist (ii) aus Def. 1.1/1 gezeigt.

3. *Schritt:* Wir beweisen (iii) der Def. 1.1/1 für den Operator Λ. Mit (3) und (8) erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|R_{\beta,\varrho}(\Lambda)\, f - f \mid L_{p,\mu}\| &= \left\|\left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^\beta R_{\beta,\varrho-1}(A)\, f - f \mid L_{p,\mu}\right\| \\ &= \left\|\left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^\beta (R_{\beta,\varrho-1}(A)\, f - f) + \left(\left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^\beta - 1\right) f \mid L_{p,\mu}\right\| \\ &\leqq \left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^\beta \frac{c}{\varrho - 1} \cdot \|f \mid L_{p,\mu}\| + \left(\left(\frac{\varrho - 1}{\varrho}\right)^\beta - 1\right) \|f \mid L_{p,\mu}\|,\end{aligned}$$

die für alle $f \in L_{2,\mu} \cap L_{p,\mu}$ richtig ist. Dabei wurde $\varrho > 1$ und $\beta > l + 1$ vorausgesetzt. Da die rechte Seite gegen Null konvergiert, wenn ϱ gegen Unendlich strebt, folgt hieraus bereits (iii) aus Def. 1.1/1 für den Operator Λ ∎

1.5. Die Operatoren $\dot{\Lambda}_p{}^s$, die Räume $H^s_{p,\mu}$

Für den positiv-definiten, selbstadjungierten Operator Λ sind bekanntlich alle reellen Potenzen $\Lambda^s (s \in \mathbf{R}_1)$ definiert und ebenfalls wieder positiv-definite selbstadjungierte Operatoren in $L_{2,\mu}$. Sie haben die Spektraldarstellung $\Lambda^s = \int\limits_0^\infty (1 + t^2)^s \, dE_t$ mit den in $L_{2,\mu}$ dichten Definitionsgebieten

$$D(\Lambda^s) = \left\{ f \in L_{2,\mu} \colon \int\limits_0^\infty (1 + t^2)^{2s} \, d \, \|E_t f\|^2 < \infty \right\}.$$

Bekanntlich sind die Definitionsgebiete $D(\Lambda^{s/2})$, ausgerüstet mit dem Skalarprodukt $(f, g)_{\mathscr{H}^s_{2,\mu}} := (\Lambda^{s/2} f, \Lambda^{s/2} g)_{L_{2,\mu}}$ und der daraus erzeugten Norm $\|f \mid \mathscr{H}^s_{2,\mu}\| = \|\Lambda^{s/2} f \mid L_{2,\mu}\|$ Hilberträume. Ferner sind die Operatoren Λ^s für $s \leqq 0$ beschränkt im Raum $L_{2,\mu}$, d. h., es gilt $D(\Lambda^s) = L_{2,\mu}$ für $s \leqq 0$.

Bemerkung 1: Für $s \in \mathbf{R}_1$ ist die Funktion $(1 + x^2)^{s/2}$ stets ein Multiplikator in $H(\Omega)$, denn sie gehört zum Raum $\mathcal{O}(\Omega)$ (siehe [2]). Dann ist aber auch der Operator $\mathfrak{B}_\mu (1 + x^2)^{s/2} \mathfrak{B}_\mu$ stetig in $H(\Omega)$ und wegen

$$\left(\mathfrak{B}_\mu (1 + x^2)^{s/2} \mathfrak{B}_\mu\right) \cdot \left(\mathfrak{B}_\mu (1 + x^2)^{-s/2} \mathfrak{B}_\mu\right) = E \qquad (\text{Identität in } H(\Omega))$$

sogar ein Automorphismus in $H(\Omega)$. Der Operator $\Lambda^{s/2}$ stimmt auf $H(\Omega)$ mit dem Operator $\mathfrak{B}_\mu (1 + x^2)^{s/2} \mathfrak{B}_\mu$ überein.

Definition 1: Für $s \geqq 0$, $\mu \geqq -\frac{1}{2}$ ist $\mathscr{H}^s_{2,\mu}$ der Hilbertraum $D(\Lambda^{s/2})$ mit dem Skalarprodukt $(f, g)_{\mathscr{H}^s_{2,\mu}}$ und der Norm $\|f \mid \mathscr{H}^s_{2,\mu}\|$.

Definition 2: Für $1 < p < \infty$, $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $s \geqq 0$ definieren wir

$$D(\dot{\Lambda}_p{}^s) := \{f \in \mathscr{H}^{2s}_{2,\mu} \cap L_{p,\mu} \colon (\Lambda^s f) \in L_{p,\mu}\}, \qquad \dot{\Lambda}_p{}^s f := \Lambda^s f, \qquad f \in D(\dot{\Lambda}_p{}^s).$$

Bemerkung 2: Nach [5: Prop. 3.3.1] sind die Operatoren $\dot{\Lambda}_p{}^s$ abschließbar in $L_{p,\mu}$ und $D(\dot{\Lambda}_p{}^s)$ ist dicht in $L_{p,\mu}$, was aus $H(\Omega) \subseteqq D(\dot{\Lambda}_p{}^s) \subseteqq L_{p,\mu}$ und der Dichtheit von $H(\Omega)$ in $L_{p,\mu}$ folgt. Aus Bemerkung 1 folgt außerdem, daß $\dot{\Lambda}_p{}^s$ auf $H(\Omega)$ mit dem Operator $\mathfrak{B}_\mu (1 + x^2)^s \mathfrak{B}_\mu$ übereinstimmt.

Definition 3: Für $s \geqq 0$, $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$ bezeichne $\Lambda_p{}^s$ den Abschluß des Operators $\dot{\Lambda}_p{}^s$ im Raum $L_{p,\mu}$.

Bemerkung 3: $D(\Lambda_p{}^s)$, ausgerüstet mit der Norm

$$\|f \mid \mathscr{H}^{2s}_{p,\mu}\| = (\|f \mid L_{p,\mu}\|^p + \|\Lambda_p{}^s f \mid L_{p,\mu}\|^p)^{1/p},$$

ist nach [5: Prop. 3.3.1] ein Banachraum.

Bemerkung 4: Man könnte die Operatoren $\Lambda_p{}^s$ auch für $s < 0$ definieren, dabei stellt sich aber heraus, daß sie beschränkt in $L_{p,\mu}$ sind, d. h., ihre Definitionsgebiete stimmen mit ganz $L_{p,\mu}$ überein (siehe [5: remark 3.3.1]).

Definition 4: Für $s \geqq 0$, $\mu \geqq -\frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$ ist $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ der Banachraum $D(\Lambda_p^{s/2})$, ausgerüstet mit der Norm $\|f \mid \mathscr{H}^s_{p,\mu}\|$.

Satz 1: *Für alle $s \geqq 0$, $1 < p < \infty$, $\mu \geqq -\frac{1}{2}$ ist der Raum $H(\Omega)$ dicht und stetig eingebettet in $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$. Die Räume $\mathscr{H}^s_{2,\mu}$ stimmen mit den in* [1] *untersuchten Räumen $\mathscr{W}^s_{2,\mu}$ überein (äquivalente Normen).*

Beweis: 1. *Schritt:* Wir beweisen, daß $H(\Omega)$ stetig in allen $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ eingebettet ist. Nach Bemerkung 2 stimmt der Operator $\Lambda_p^{s/2}$ auf $H(\Omega)$ mit $\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu$ überein. Für $f \in H(\Omega)$ gilt folglich

$$\|f \mid \mathscr{H}^s_{2,\mu}\|^p = \|f \mid L_{p,\mu}\|^p + \|\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{p,\mu}\|^p$$
$$\leqq c \cdot \|f\|^p_{k,l} + c' \cdot \|\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu f\|^p_{m,n} \leqq c'' \cdot \|f\|^p_{M,N},$$

wobei benutzt wurde, daß $\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu$ eine stetige Transformation in $H(\Omega)$ ist. Die auftretenden Konstanten hängen nicht von f ab, ebenso nicht die in den $H(\Omega)$-Normen auftretenden Indizes k, l, m, n, M, N, womit die Stetigkeit der Einbettung von $H(\Omega)$ in $H^s_{p,\mu}$ bewiesen ist.

2. *Schritt:* Wir beweisen die Dichtheit von $H(\Omega)$ in $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$. Nach Definition von $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ ist $D(\dot{\Lambda}_p^{s/2})$ dicht in $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$; es genügt also zu zeigen, daß Funktionen aus $D(\dot{\Lambda}_p^{s/2})$ in $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ beliebig gut durch Funktionen aus $H(\Omega)$ approximiert werden können. Sei $f \in D(\dot{\Lambda}_p^{s/2})$. Nach Definition gehört f dann zu $\mathscr{H}^s_{2,\mu}$ und $\dot{\Lambda}_p^{s/2} f = \Lambda^{s/2} f$ zu $L_{p,\mu}$. Da $H(\Omega)$ dicht ist in $L_{p,\mu}$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g_\varepsilon \in H(\Omega)$ mit $\|g_\varepsilon - \Lambda^{s/2} f \mid L_{p,\mu}\| < \varepsilon$. Wählt man $f_\varepsilon := \mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{-s/2}\, \mathfrak{B}_\mu g_\varepsilon$, so gehört f_ε nach Bemerkung 1 ebenfalls zu $H(\Omega)$, und es gilt $\Lambda^{s/2} f_\varepsilon = g_\varepsilon$. Somit haben wir

$$\|\Lambda^{s/2}(f_\varepsilon - f) \mid L_{p,\mu}\| = \|g_\varepsilon - \Lambda^{s/2} f \mid L_{p,\mu}\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Andererseits gilt für $f \in \mathscr{H}^s_{2,\mu}$ die Gleichung $\Lambda^{-s/2} \cdot \Lambda^{s/2} f = f$, so daß aus der Stetigkeit des Operators $\Lambda_p^{-s/2}$ in $L_{p,\mu}$

$$\|f_\varepsilon - f \mid L_{p,\mu}\| = \|\Lambda^{-s/2}(\Lambda^{s/2}(f_\varepsilon - f)) \mid L_{p,\mu}\| = \|\Lambda_p^{-s/2}(g_\varepsilon - \Lambda^{s/2} f) \mid L_{p,\mu}\| < c \cdot \varepsilon \tag{2}$$

folgt, wobei (1) verwendet wurde und die Tatsache, daß $\Lambda_p^{-s/2} = \Lambda^{-s/2}$ auf $D(\dot{\Lambda}_p^{s/2})$ gilt. Die Konstante c hängt hierbei nicht von f und ε ab. Aus (1) und (2) folgt die Abschätzung $\|f_\varepsilon - f \mid \mathscr{H}^s_{p,\mu}\| \leqq c' \cdot \varepsilon$, man kann also f beliebig gut in $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ durch $H(\Omega)$-Funktionen approximieren.

3. *Schritt:* Nach [1] ist

$$\|f \mid \mathscr{W}^s_{2,\mu}\| = \left(\int_0^\infty (1 + x^{2s})\, |(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\, x^{2s+1}\, dx\right)^{1/2}, \qquad f \in H(\Omega),$$

eine äquivalente Norm in $\mathscr{W}^s_{2,\mu}$, und $H(\Omega)$ ist dicht in $\mathscr{W}^s_{2,\mu}$. Nach dem 2. Schritt genügt es folglich zu zeigen, daß es positive Konstanten c_1 und c_2 gibt, so daß für alle $f \in H(\Omega)$ gilt

$$c_1 \cdot \|f \mid \mathscr{W}^s_{2,\mu}\| \leqq \|f \mid \mathscr{H}^s_{2,\mu}\| \leqq c_2 \cdot \|f \mid \mathscr{W}^s_{2,\mu}\| \tag{3}$$

gilt. Nach Bemerkung 1 gilt aber für $f \in H(\Omega)$

$$\|f \mid \mathscr{H}^s_{2,\mu}\|^2 = \int_0^\infty (1 + x^2)^s\, |(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\, x^{2\mu+1}\, dx,$$

wobei gleichzeitig benutzt wurde, daß $\mathfrak{B}_\mu$ eine unitäre Transformation in $L_{2,\mu}$ ist. Nun ist aber wegen $s \geqq 0$ leicht zu sehen, daß es positive Konstanten b_1 und b_2 gibt mit $b_1 \cdot (1 + x^{2s}) \leqq (1 + x^2)^s \leqq b_2 \cdot (1 + x^{2s})$, $x \geqq 0$, womit (3) und somit der Satz bewiesen ist ∎

Bemerkung 5: Die Räume $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ sind Räume vom Lebesgue- bzw. Bessel-Potential-Typ. In Analogie zur Definition der Räume $H_p{}^s(\mathrm{R}_n)$ in [5] bzw. [6] kann man auch hier die Räume $H^s_{p,\mu}$ über den Raum $H'(\Omega)$ der verallgemeinerten Funktionen einführen. Nach Bemerkung 1 ist der Operator $\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^s\, \mathfrak{B}_\mu$ für jede reelle Zahl s ein Automorphismus in $H(\Omega)$. Durch die Definition

$$\big(\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^s\, \mathfrak{B}_\mu f\big)(\varphi) := f\big(\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^s\, \mathfrak{B}_\mu\varphi\big), \qquad f \in H'(\Omega), \qquad \varphi \in H(\Omega),$$

wird der Operator $\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^s\, \mathfrak{B}_\mu$ in üblicher Weise auf $H'(\Omega)$ übertragen und ist folglich auch dort ein Automorphismus (bez. der starken Topologie).

Definition 5: Für $s \in \mathbf{R}_1$, $1 < p < \infty$, $\mu \geqq -1/2$, setzen wir

$$H^s_{p,\mu} := \{f \in H'(\Omega) : \big(\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu f\big) \in L_{p,\mu}\},$$

$$\|f\|_{s,p,\mu} := \|\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{p,\mu}\|.$$

Satz 2: *Die Räume $H^s_{p,\mu}$ sind Banachräume mit den Normen $\|f\|_{s,p,\mu}$. Der Raum $H(\Omega)$ ist stetig und dicht eingebettet in allen Räumen $H^s_{p,\mu}$, diese wiederum sind in $H'(\Omega)$ bezüglich der starken Topologie stetig eingebettet. Der Operator $T_r := B_\mu(1 + x^2)^{r/2}\, B_\mu$, definiert in $H'(\Omega)$, ist ein Liftoperator in der Skala der Räume $H^s_{p,\mu}$ mit $T_r(H^s_{p,\mu}) = H^{(s-r)}_{p,\mu}$, $s \in \mathbf{R}_1$ $r \in \mathbf{R}_1$, $1 < p < \infty$.*
Außerdem gelten die stetigen Einbettungen

$$H^{s_1}_{p,\mu} \subseteqq H^{s_2}_{p,\mu} \quad \textit{für} \quad s_1 \geqq s_2,\ 1 < p < \infty. \tag{4}$$

Beweis: 1. *Schritt:* Nach Bemerkung 5 ist der Operator T_r für beliebige $r \in \mathbf{R}_1$ ein Automorphismus in $H'(\Omega)$ mit $T_r{}^{-1} = T_{-r}$. Für $f \in H^s_{p,\mu}$ gilt folglich

$$\|T_r f\|_{(s-r),p,\mu} = \|\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{(s-r)/2}\, \mathfrak{B}_\mu(T_r f) \mid L_{p,\mu}\| = \|\mathfrak{B}_\mu(1 + x^2)^{s/2}\, \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{p,\mu}\|$$
$$= \|f\|_{s,p,\mu},$$

wobei benutzt wurde, daß $\mathfrak{B}_\mu{}^2 = E$ (Identität in $H'(\Omega)$) gilt. Damit ist T_r ein Liftoperator in der Skala der Räume $H^s_{p,\mu}$; bei festem p und μ sind somit alle Räume $H^s_{p,\mu}$ untereinander isometrisch-isomorph. Damit genügt es, für einen einzigen der Räume $H^s_{p,\mu}$ zu zeigen, daß er ein Banachraum ist. Da der Raum $H^0_{p,\mu}$ mit $L_{p,\mu}$ zusammenfällt, wie man sieht, gibt es folglich nichts mehr zu beweisen.

2. *Schritt:* Die Dichtheit von $H(\Omega)$ in den Räumen $H^s_{p,\mu}$ folgt daraus, daß $H(\Omega)$ dicht in $L_{p,\mu} = H^0_{p,\mu}$ ist und T_r einen Automorphismus in $H(\Omega)$ darstellt. Für gegebenes $f \in H^s_{p,\mu}$ approximiert man $T_s f$ in $L_{p,\mu}$ durch Funktionen g_j aus $H(\Omega)$. Dann ist f in $H^s_{p,\mu}$ automatisch durch die Funktionen $f_j = T_{-s} g_j$ (welche zu $H(\Omega)$ gehören) approximiert. Die Stetigkeit der Einbettung $H(\Omega) \subseteqq L_{p,\mu}$, die in [2] bewiesen wurde, und die Stetigkeit des Operators T_s in $H(\Omega)$ liefern zusammen die Stetigkeit der Einbettung von $H(\Omega)$ in $H^s_{p,\mu}$. Es gelte jetzt $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, und B sei eine beschränkte Menge in $H(\Omega)$. Aus der Stetigkeit der Einbettung $H(\Omega) \subseteqq H^{-s}_{p',\mu}$ folgt, daß B dann auch in $H^{-s}_{p',\mu}$ beschränkt ist. Für $f \in H^s_{p,\mu}$ folgt hieraus unter An-

wendung der Hölder-Ungleichung

$$\sup_{\varphi\in B}|f(\varphi)| = \sup_{\varphi\in B}|(T_s f)(T_{-s}\varphi)| = \sup_{\varphi\in B}\left|\int_0^\infty (T_s f)(x)\cdot(T_{-s}\varphi)(x)\,x^{2\mu+1}\,dx\right|$$

$$\leqq \|f\|_{s,p,\mu}\cdot\sup_{\varphi\in B}\|\varphi\|_{-s,p,\mu} \leqq c(B)\cdot\|f\|_{s,p,\mu},$$

wobei die Konstante $c(B)$ nicht von f abhängt. Damit ist $H^s_{p,\mu}$ stetig eingebettet in $H'(\Omega)$ bezüglich der starken Topologie (gleichmäßige Konvergenz auf beschränkten Mengen).

3. *Schritt*: Wir beweisen (4). Da $H(\Omega)$ dicht in allen $H^s_{p,\mu}$ ist, genügt es, für $s_2 \leqq s_1$ die Ungleichung $\|f\|_{s_2,p,\mu} \leqq c\cdot\|f\|_{s_1,p,\mu}$, $f\in H(\Omega)$, zu beweisen. Wegen $s_2 - s_1 \leqq 0$, Bemerkung 4, Bemerkung 2 und der Beziehung

$$T_{s_2}f = T_{s_2-s_1}(T_{s_1}f) = \Lambda_p^{((s_2-s_1)/2)}(T_{s_1}f), \qquad f\in H(\Omega),$$

ist dies aber offensichtlich erfüllt ∎

Satz 3: *Für $s \geqq 0$, $1 < p < \infty$ stimmen die Räume $H^s_{p,\mu}$ mit den Räumen $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ überein, d. h., die identische Abbildung ist eine topologische Isomorphie von $H^s_{p,\mu}$ nach $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$.*

Beweis: Nach Satz 1 und Satz 2 ist $H(\Omega)$ dicht in $H^s_{p,\mu}$ und $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$. Wir beweisen zuerst die Äquivalenz der Normen. Da der Operator T_s auf $H(\Omega)$ mit $\Lambda_p^{s/2}$ zusammenfällt, haben wir

$$\|f\|_{s,p,\mu} = \|T_s f \mid L_{p,\mu}\| = \|\Lambda_p^{s/2}f \mid L_{p,\mu}\| \leqq \|f \mid \mathscr{H}^s_{p,\mu}\|, \qquad f\in H(\Omega). \tag{5}$$

Wegen $f = T_{-s}(T_s f)$ und der Beschränktheit des Operators T_{-s} in $L_{p,\mu}$ haben wir andererseits

$$\|f \mid \mathscr{H}^s_{p,\mu}\| = (\|f \mid L_{p,\mu}\|^p + \|T_s f \mid L_{p,\mu}\|^p)^{1/2}$$
$$\leqq c\cdot\|T_s f \mid L_{p,\mu}\| = c\cdot\|f\|_{s,p,\mu}, \qquad f\in H(\Omega). \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich nun die gewünschte Normäquivalenz. Sei $f\in H^s_{p,\mu}$, $\{f_j\}$ eine approximierende Folge aus $H(\Omega)$. Aus (4) und $L_{p,\mu} = H^0_{p,\mu}$ folgt dann, daß die Folge $\{f_j\}$ auch in $L_{p,\mu}$ gegen f konvergiert, insbesondere also f zu $L_{p,\mu}$ gehört. Aus obiger Normäquivalenz folgt, daß $\{f_j\}$ in $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ eine Cauchyfolge ist, die wegen der Vollständigkeit von $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ im Raum $\mathscr{H}^s_{p,\mu}$ gegen eine Funktion $g\in L_{p,\mu}$ konvergiert. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $L_{p,\mu}$ folgt $f = g$ und durch Grenzübergang in (5) und (6) die Behauptung des Satzes ∎

Satz 4: *Der duale Raum $(H^s_{p,\mu})'$ ist isometrisch isomorph zum Raum $H^{-s}_{p',\mu}$, wobei $s\in\mathbf{R}_1$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$ ist.*

Beweis: 1. *Schritt:* Für $f\in H^{-s}_{p',\mu}$ gilt

$$|f(\varphi)| = |(T_s(T_{-s}f))(\varphi)| = |(T_{-s}f)(T_s\varphi)| = \left|\int_0^\infty (T_{-s}f)(x)\cdot T_s\varphi(x)\cdot x^{2\mu+1}\,dx\right|$$

$$\leqq \|T_{-s}f \mid L_{p',\mu}\|\cdot\|T_s\varphi \mid L_{p,\mu}\| = \|f\|_{-s,p',\mu}\cdot\|\varphi\|_{s,p,\mu}, \qquad \varphi\in H(\Omega),$$

wobei die Hölder-Ungleichung benutzt wurde. Da $H(\Omega)$ dicht in $H^s_{p,\mu}$ ist, folgt hieraus, daß f ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $H^s_{p,\mu}$ erzeugt, und es gilt

$$\|f \mid (H^s_{p,\mu})'\| \leqq \|f\|_{-s,p',\mu}. \tag{7}$$

2. *Schritt:* Sei $f \in (H^s_{p,\mu})'$. Auf Grund der dichten, stetigen Einbettung von $H(\Omega)$ in $H^s_{p,\mu}$ können wir $(H^s_{p,\mu})'$ als linearen Teilraum von $H'(\Omega)$ auffassen, somit f als Element von $H'(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |(T_{-s}f)(T_s\varphi)| &= |f(\varphi)| \leqq \|f \mid (H^s_{p,\mu})'\| \cdot \|\varphi\|_{s,p,\mu} \\ &= \|f \mid (H^s_{p,\mu})'\| \cdot \|T_s\varphi \mid L_{p,\mu}\|, \qquad \varphi \in H(\Omega). \end{aligned}$$

Da T_s ein Automorphismus in $H(\Omega)$ ist, andererseits $H(\Omega)$ dicht in $L_{p,\mu}$ ist, erzeugt $T_{-s}f$ folglich ein lineares, stetiges Funktional auf $L_{p,\mu}$, gehört folglich auf Grund der Dualität der $L_{p,\mu}$-Räume zum Raum $L_{p',\mu}$. Das bedeutet aber, daß f zu $H^{-s}_{p',\mu}$ gehört, und aus der obigen Abschätzung folgt

$$\|f\|_{-s,p',\mu} = \|T_{-s}f \mid L_{p',\mu}\| \leqq \|f \mid (H^s_{p,\mu})'\|. \tag{8}$$

Mit (7) und (8) hat man die Gleichheit der Normen, womit der Satz bewiesen ist ∎

2. Interpolationssätze

2.1. Die Räume $B_q^s(L_{p,\mu})$ und $H^s_{p,\mu}$

Ist Φ das System von Funktionenfolgen, das in Def. 1.1/2 gegeben wurde, und setzt man $A = L_{p,\mu}$, so erhält man die Räume

$$B^s_{p,q,\mu} := B_q^s(L_{p,\mu}), \quad s > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leqq q \leqq \infty, \quad \mu \geqq -1/2.$$

aus Def. 1.1/4, wobei Λ der in Satz 1.4/2 behandelte Operator ist (dort wurde auch die Zugehörigkeit des Tripels $[L_{2,\mu}, \Lambda, L_{p,\mu}]$ zu einer geeigneten Klasse $\mathfrak{R}^l$ bewiesen). Mit $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi$ haben die Operatoren $\varphi_j(\Lambda)$ die Form $\varphi_j(\Lambda) = \mathfrak{B}_\mu\varphi_j(1 + x^2)\,\mathfrak{B}_\mu$. Nach Bemerkung 1.1/3 sind die Räume $B^s_{p,q,\mu}$ im gesamten Parameterbereich Banachräume, ausgestattet mit den untereinander äquivalenten Normen

$$\|f \mid B^s_{p,q,\mu}\|^\varphi = \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{jsq} \left\|\mathfrak{B}_\mu\big(\varphi_j(1 + x^2)\,\mathfrak{B}_\mu f\big) \mid L_{p,\mu}\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Auf Grund der Äquivalenz der Normen können wir im weiteren φ in der Bezeichnung der Normen weglassen.

Satz 1: *Es seien* $s > \varepsilon > 0$, $1 < p < \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$, $1 \leqq q_0 \leqq q_1 \leqq \infty$, $\mu \geqq -1/2$. *Dann gelten folgende stetige Einbettungen:*

$$H(\Omega) \subseteqq B^s_{p,q,\mu} \subseteqq H'(\Omega), \text{ wobei } H(\Omega) \text{ dicht in } B^s_{p,q,\mu} \text{ für } q < \infty \text{ ist;} \tag{1}$$

$$B^{s+\varepsilon}_{p,\infty,\mu} \subseteqq B^s_{p,q_0,\mu} \subseteqq B^s_{p,q_1,\mu} \subseteqq B^{s-\varepsilon}_{p,1,\mu} \subseteqq L_{p,\mu}. \tag{2}$$

Beweis: 1. *Schritt:* Die Stetigkeit der Einbettung $B^s_{p,q_0,\mu}$ in $B^s_{p,q_1,\mu}$ ergibt sich aus der Monotonie der l_q-Räume. Wir beweisen jetzt die letzte Inklusion in (2). In [5: Th. 3.2.2] wurde gezeigt, daß für $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi$ mit $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(t) = 1$ $(t \geqq 0)$ für jede Funktion $f \in L_{p,\mu}$ die Beziehung $f = \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(\Lambda) f$ (Konvergenz in $L_{p,\mu}$) gilt. Daraus folgt für

$f \in B^{s-\varepsilon}_{p,1,\mu}$

$$\|f \mid L_{p,\mu}\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu} \right\| \leqq \sum_{j=0}^{\infty} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\|$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(s-\varepsilon)} \cdot 2^{j(s-\varepsilon)} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\| \leqq \left(\sup_j 2^{-j(s-\varepsilon)}\right) \cdot \|f \mid B^{s-\varepsilon}_{p,1,\mu}\|.$$

2. *Schritt:* Wir beweisen die erste und vorletzte Inklusion in (2). Aus der Monotonie der l_q-Räume folgen die Einbettungen

$$B^s_{p,1,\mu} \subseteqq B^s_{p,q_0,\mu} \quad \text{und} \quad B^s_{p,q_1,\mu} \subseteqq B^s_{p,\infty,\mu}.$$

Damit ist es ausreichend, die Einbettungen

$$B^{s+\varepsilon}_{p,\infty,\mu} \subseteqq B^s_{p,1,\mu} \quad \text{und} \quad B^s_{p,\infty,\mu} \subseteqq B^{s-\varepsilon}_{p,1,\mu}$$

zu beweisen, wobei die zweite aus der ersten hervorgeht, wenn man dort s durch $s - \varepsilon$ ersetzt. Die erste Einbettung folgt aus

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\| = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} 2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\|$$

$$\leqq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon}\right) \cdot \sup_j 2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\|.$$

3. *Schritt:* Wir beweisen (1). Aus (2) folgt, daß es ausreichend ist, die Einbettung $H(\Omega) \subseteqq B^{s+\varepsilon}_{p,\infty,\mu}$ zu beweisen, aus der dann automatisch $H(\Omega) \subseteqq B^s_{p,q,\mu}$ folgt. Für $f \in H(\Omega)$ gilt

$$2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\| = 2^{j(s+\varepsilon)} \|\mathfrak{B}_\mu \varphi_j(1 + x^2) \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{p,\mu}\|$$

$$\leqq c \cdot 2^{j(s+\varepsilon)} \|(1 + y^{2N}) \mathfrak{B}_\mu \varphi_j(1 + x^2) \mathfrak{B}_\mu f \mid L_\infty\|,$$

wobei L_∞ der übliche Raum der in $(0, \infty)$ wesentlich beschränkten Funktionen mit der üblichen esssup-Norm ist. Die oben auftretende natürliche Zahl N muß die Bedingung $N > \dfrac{\mu + 1}{p}$ erfüllen, damit das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2\mu+1}\,dx}{(1 + x^{2N})^p}$ konvergiert. In [2] wurde die Beziehung

$$(1 + x^{2N}) \mathfrak{B}_\mu g = \mathfrak{B}_\mu\big((1 + (-M_\mu)^N) g\big), \qquad g \in H(\Omega), \tag{3}$$

bewiesen, wobei M_μ der in 1.3 definierte Differentialoperator ist. Außerdem ist $\mathfrak{B}_\mu$ eine stetige Abbildung von $L_{1,\mu}$ nach L_∞, was sich aus der Beschränktheit der Funktion $t^{-\mu} J_\mu(t)$ in $[0, \infty)$ ergibt. In der obigen Ungleichung folgt also mit (3)

$$2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c \cdot \left\|\mathfrak{B}_\mu\big((1 + (-M_\mu)^N) \varphi_j(1 + x^2) \mathfrak{B}_\mu f\big) \mid L_\infty\right\| \cdot 2^{j(s+\varepsilon)}$$

$$\leqq c \cdot \left\|\big(1 + (-M_\mu)^N\big) \varphi_j(1 + x^2) \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{1,\mu}\right\| \cdot 2^{j(s+\varepsilon)}. \tag{4}$$

Der Träger der Funktion $\varphi_j(1 + x^2)$ ist in der Menge $\left(\sqrt{2^{j-1} - 1}, \sqrt{2^{j+1} - 1}\right)$ enthalten (Modifikation für φ_0), so daß für $x \in \operatorname{supp}\big(\varphi_j(1 + x^2)\big)$ die Beziehung $2^{j(s+\varepsilon)} \leqq 2^{s+\varepsilon}(1 + x^2)^{s+\varepsilon}$ erfüllt ist, wodurch sich in (4) die Abschätzung

$$2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(A) f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c \cdot \|(1 + x^2)^{s+\varepsilon} \big(1 + (-M_\mu)^N\big) \varphi_j(1 + x^2) \mathfrak{B}_\mu f \mid L_{1,\mu}\|$$

ergibt. Die Stetigkeit der Einbettung $H(\Omega) \subseteqq B^{s+\varepsilon}_{p,\infty,\mu}$ folgt nun aus den folgenden Tatsachen:

- $\mathfrak{B}_\mu$ ist ein Automorphismus in $H(\Omega)$,
- $\varphi_j(1 + x^2)$ gehört zum Raum $\mathcal{O}(\Omega)$, ist also ein Multiplikator in $H(\Omega)$,
- $\left(1 + (-M_\mu)^N\right)$ ist ein stetiger Operator in $H(\Omega)$,
- $(1 + x^2)^{s+\varepsilon}$ gehört zu $\mathcal{O}(\Omega)$, ist also ein Multiplikator in $H(\Omega)$,
- $H(\Omega)$ ist stetig in $L_{1,\mu}$ eingebettet.

Somit gibt es natürliche Zahlen k, l und eine positive Konstante c, so daß

$$2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(\Lambda) f \mid L_{p,\mu}\| \leqq c \cdot \sup_{x>0} (1 + x^2)^k \sum_{n=0}^{l} |(x^{-1}D)^n f(x)| \tag{5}$$

ist. Die Zahlen c, k, l hängen hierbei nicht von f und j ab, wobei die Unabhängigkeit der Zahl c von j aus den Eigenschaften der Ableitungen der Funktionen φ_j folgt. Der Übergang zum Supremum über j auf der linken Seite in (5) liefert die gewünschte Einbettung. Aus (2) ergibt sich die stetige Einbettung

$$B^s_{p,q,\mu} \subseteqq L_{p,\mu}. \tag{6}$$

In [2] wurde weiterhin die Stetigkeit der Einbettung $L_{p,\mu} \subseteqq H'(\Omega)$ bewiesen, realisiert durch die Interpretation

$$f(\varphi) = \int_0^\infty f(x) \cdot \varphi(x)\, x^{2\mu+1}\, dx.$$

Zusammen mit (6) liefert dies die stetige Einbettung $B^s_{p,q,\mu} \subseteqq H'(\Omega)$.

4. *Schritt:* Wir beweisen, daß $H(\Omega)$ dicht ist in $B^s_{p,q,\mu}$, wenn $q < \infty$ ist. Nach dem 1. Schritt konvergiert die Folge f_M $(M = 1, 2, \ldots)$, definiert durch

$$f_M := \sum_{j=0}^{M} \varphi_j(\Lambda) f, \qquad f \in L_{p,\mu}, \qquad \{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi \text{ mit } \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(t) = 1 \qquad (t \geqq 0),$$

im Raum $L_{p,\mu}$ gegen die Funktion f. Sei $f \in B^s_{p,q,\mu}$ und $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi$. Dann gilt

$$\|f - f_M \mid B^s_{p,q,\mu}\| = \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \|\psi_k(\Lambda)(f - f_M) \mid L_{p,\mu}\|^q\right)^{1/q}. \tag{7}$$

Aus der Darstellung

$$f - f_M = \sum_{j=M+1}^\infty \varphi_j(\Lambda) f \quad \text{(Konvergenz in } L_{p,\mu})$$

und der Stetigkeit der Operatoren $\psi_k(\Lambda)$ in $L_{p,\mu}$ folgt die Darstellung

$$\psi_k(\Lambda)(f - f_M) = \sum_{j=M+1}^\infty \psi_k(\Lambda)\, \varphi_j(\Lambda) f = \sum_{r=-1}^{1} \psi_k(\Lambda)\, \varphi_{k+r}(\Lambda) f, \tag{8}$$

wobei die rechte Seite von (8) aus der Lage der Träger der Funktionen ψ_k und φ_j folgt und für $k \geqq M - 1$ gilt. Im Fall $k < M - 1$ hat der Träger von ψ_k einen leeren Schnitt mit allen Trägern der Funktionen φ_j für $j \geqq M + 1$, so daß sich in diesem Fall $\psi_k(\Lambda)(f - f_M) = 0$ ergibt. In (8) eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \|f - f_M \mid B^s_{p,q,\mu}\| &\leqq \sum_{r=-1}^{1} \left(\sum_{k=M-1}^\infty 2^{ksq} \|\psi_k(\Lambda)\, \varphi_{k+r}(\Lambda) f \mid L_{p,\mu}\|^q\right)^{1/q} \\ &\leqq c \cdot \left(\sum_{k=M-2}^\infty 2^{ksq} \|\varphi_k(\Lambda) f \mid L_{p,\mu}\|^q\right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei benutzt wurde, daß die Operatoren $\psi_k(\Lambda)$ gleichmäßig beschränkt sind in $L_{p,\mu}$, d. h. gleichmäßig beschränkte Operatorennormen besitzen. Die Zahl c ist nicht von f und M abhängig. Die rechte Seite von (9) konvergiert für $M \to \infty$ gegen 0. Dies bedeutet aber, daß $f - f_M$ für jedes M zu $B^s_{p,q,\mu}$ gehört (und damit auch f_M selbst) und f_M für $M \to \infty$ in $B^s_{p,q,\mu}$ gegen f konvergiert. Um f durch Funktionen aus $H(\Omega)$ zu approximieren, genügt es folglich, f_M zu approximieren, und zwar in der $B^s_{p,q,\mu}$-Norm. Da $f \in B^s_{p,q,\mu}$ zu $L_{p,\mu}$ gehört und $H(\Omega)$ dicht in $L_{p,\mu}$ ist, gibt es also zu jedem $\delta > 0$ eine Funktion $f_\delta \in H(\Omega)$ mit

$$\|f - f_\delta \mid L_{p,\mu}\| < \delta. \tag{10}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ fest und

$$c_\psi := \sup_k \|\psi_k(\Lambda)\|_{L_{p,\mu}\to L_{p,\mu}}, \qquad c_\varphi := \sup_j \|\varphi_j(\Lambda)\|_{L_{p,\mu}\to L_{p,\mu}}.$$

Man wähle $M = M(\varepsilon)$ so, daß $\|f - f_M \mid B^s_{p,q,\mu}\| < \varepsilon/2$ gilt. Setzt man nun

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2c_\varphi \cdot c_\psi(M+1)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{M+2} 2^{ksq}\right)^{-1/q},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\|f - \sum_{j=0}^{M} \varphi_j(\Lambda) f_\delta \mid B^s_{p,q,\mu}\right\| &\leqq \|f - f_M \mid B^s_{p,q,\mu}\| + \left\|f_M - \sum_{j=0}^{M} \varphi_j(\Lambda) f_\delta \mid B^s_{p,q,\mu}\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \left\|\psi_k(\Lambda)\left(\sum_{j=0}^{M} \varphi_j(\Lambda)(f - f_\delta)\right) \right| L_{p,\mu}\right\|^q\right)^{1/q} \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sum_{k=0}^{M+2} 2^{ksq}\left(\sum_{j=0}^{M} \left\|\psi_k(\Lambda)\,\varphi_j(\Lambda)(f - f_\delta) \right| L_{p,\mu}\right\|\right)^q\right)^{1/q} \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{2} + c_\varphi \cdot c_\psi \cdot (M+1)\,\|f - f_\delta \mid L_{p,\mu}\| \cdot \left(\sum_{k=0}^{M+2} 2^{ksq}\right)^{1/q} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei wurde wieder die Lage der Träger der Funktionen ψ_k und φ_j zueinander benutzt. Da $\varphi_j(\Lambda) = \mathfrak{B}_\mu \varphi_j(1 + x^2)\, \mathfrak{B}_\mu$ ein stetiger Operator in $H(\Omega)$ ist, gehört die Funktion $\sum_{j=0}^{M} \varphi_j(\Lambda) f_\delta$ zu $H(\Omega)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, findet man nach obigem Verfahren also stets eine Funktionenfolge aus $H(\Omega)$, die die vorgegebene Funktion $f \in B^s_{p,q,\mu}$ im Raum $B^s_{p,q,\mu}$ approximiert. Damit ist $H(\Omega)$ dicht in $B^s_{p,q,\mu}$ für $q < \infty$. ∎

Satz 2: (i) *Es seien* $0 < s_0, s_1 < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $\mu_0, \mu_1 \geqq -1/2$, $1 \leqq q_0, q_1 \leqq \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. *Dann gilt*

$$[B^{s_0}_{p_0,q_0,\mu_0}, B^{s_1}_{p_1,q_1,\mu_1}]_\theta = B^s_{p,q,\mu}, \tag{11}$$

wobei

$$\mu := p\left(\frac{(1-\theta)\,\mu_0}{p_0} + \frac{\theta\mu_1}{p_1}\right) \tag{12}$$

ist. Ist zusätzlich $p = q$, *so gilt*

$$(B^{s_0}_{p_0,q_0,\mu_0}, B^{s_1}_{p_1,q_1,\mu_1})_{\theta,p} = B^s_{p,p,\mu} \quad \textit{mit } \mu \textit{ aus } (12). \tag{13}$$

(ii) *Für* $0 < s_0 < s_1 < \infty$, $1 \leqq q_0, q_1, q \leqq \infty$, $1 < p < \infty$, $\mu \geqq -1/2$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta) s_0 + \theta s_1$ *gilt*

$$(B^{s_0}_{p,q_0,\mu}, B^{s_1}_{p,q_1,\mu})_{\theta,q} = B^s_{p,q,\mu}. \tag{14}$$

(iii) *Für* $s_1 > s_0 > 0$, $\mu \geqq -1/2$, $1 < p < \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$, $0 < \theta < 1$ *gilt*

$$(H^{s_0}_{p,\mu}, H^{s_1}_{p,\mu})_{\theta,q} = B^{s/2}_{p,q,\mu} \tag{15}$$

und

$$[H^{s_0}_{p,\mu}, H^{s_1}_{p,\mu}]_\theta = H^s_{p,\mu}, \tag{16}$$

wobei $s = (1-\theta) s_0 + \theta s_1$ *in* (15) *und* (16) *ist.*

Beweis: 1. *Schritt:* Wir beweisen (i). Aus [7: Th. 1.18.5] erhalten wir

$$[L_{p_0,\mu_0}, L_{p_1,\mu_1}]_\theta = (L_{p_0,\mu_0}, L_{p_1,\mu_1})_{\theta,p} = L_{p,\mu}$$

mit $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ und μ aus (12). Die Beziehungen (11) und (13) folgen nun sofort hieraus, wenn man [5. Th. 3.3.2 (i)] zur Anwendung bringt.

2. *Schritt:* Wir beweisen (ii). Setzt man $A = L_{p,\mu}$ in [5: Th. 3.3.2 (ii)], so ist (14) bewiesen.

3. *Schritt:* Zum Beweis von (15) und (16) ist es ausreichend, die Beziehungen

$$(L_{p,\mu}, H^s_{p,\mu})_{\theta,q} = B^{\theta s/2}_{p,q,\mu} \quad \text{und} \quad [L_{p,\mu}, H^s_{p,\mu}]_\theta = H^{\theta s}_{p,\mu} \tag{17}$$

für $s > 0$ zu beweisen, da der Operator $\Lambda_p^{s/2}$ eine eineindeutige stetige Abbildung von $L_{p,\mu}$ auf $H^{s_0}_{p,\mu}$, von $H^{s_1-s_0}_{p,\mu}$ auf $H^{s_1}_{p,\mu}$ und von $B^{\theta(s_1-s_0)/2}_{p,q,\mu}$ auf $B^{s/2}_{p,q,\mu}$ mit $s = (1-\theta) s_0 + \theta s_1$ realisiert. (Siehe hierzu auch [7: Th. 1.15.3].) Die Beziehungen (17) folgen aber sofort aus [5: Th. 3.3.2 (iii)], wenn man die Definition von $H^s_{p,\mu}$ benutzt ∎

2.2. Die Räume $W^s_{p,\mu}$

Definition: Für $s \geqq 0$, $\mu \geqq -1/2$, $1 < p < \infty$ setzen wir

$$W^s_{p,\mu} := \begin{cases} H^s_{p,\mu}, & \text{falls } s = 0, 1, 2, \dots \text{ ist}, \\ B^{s/2}_{p,p,\mu}, & \text{falls } s > 0 \text{ nicht ganzzahlig ist}. \end{cases}$$

Satz 1: *Sind* $\mathscr{W}^s_{2,\mu}$ *die in* [1] *definierten Sobolev-Slobodeckij-Räume, so gilt* $\mathscr{W}^s_{2,\mu} = W^s_{2,\mu}$ *für alle* $s \geqq 0$, $\mu \geqq -1/2$.

Beweis: Nach Satz 1.5/1 gilt $\mathscr{W}^s_{2,\mu} = H^s_{2,\mu}$ für alle $s \geqq 0$. Mit obiger Definition haben wir folglich die Beziehung

$$\mathscr{W}^s_{2,\mu} = W^s_{2,\mu} \quad \text{für} \quad s = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Wenn wir nun noch zeigen, daß für nichtganze $s > 0$ die Beziehung

$$H^s_{2,\mu} = B^{s/2}_{2,2,\mu} \tag{2}$$

stets erfüllt ist, so folgt die Behauptung des Satzes aus der Definition für $W^s_{2,\mu}$ und $\mathscr{W}^s_{2,\mu} = H^s_{2,\mu}$ ($s > 0$ nicht ganz). Wir beweisen jetzt (2). Sei $\{\varphi_j\} \in \Phi$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_j(t))^2 = 1$,

$t \geqq 0$. Dann gilt für $f \in H(\Omega)$

$$\|f \mid H^s_{2,\mu}\|^2 = \|\mathfrak{B}_\mu(1+x^2)^{s/2}\,\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2 = \|(1+x^2)^{s/2}\,\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2$$

$$= \int\limits_0^\infty (1+x^2)^s \sum_{j=0}^\infty \big(\varphi_j(1+x^2)\big)^2\,|(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\,x^{2\mu+1}\,dx$$

$$\leqq c \cdot \sum_{j=0}^\infty 2^{js}\,\|\mathfrak{B}_\mu\varphi_j(1+x^2)\,\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2 = c \cdot \|f \mid B^{s/2}_{2,2\mu}\|^2,$$

wobei wieder die Eigenschaften der Träger der Funktionen φ_j ausgenutzt wurden. Da $H(\Omega)$ dicht in $B^{s/2}_{2,2\mu}$ ist, folgt hieraus die Einbettung

$$B^{s/2}_{2,2\mu} \subseteqq H^s_{2,\mu}. \tag{3}$$

Analog gilt mit einem System $\varphi \in \Phi$ mit $\sum\limits_{j=0}^\infty \varphi_j(t) = 1$ $(t \geqq 0)$ für $f \in H(\Omega)$ die Beziehung

$$\|f \mid B^{s/2}_{2,2\mu}\|^2 = \sum_{j=0}^\infty 2^{js}\,\|\mathfrak{B}_\mu\varphi_j(1+x^2)\,\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2$$

$$= \sum_{j=0}^\infty 2^{js}\,\|\varphi_j(1+x^2)\,\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2$$

$$\leqq c \cdot \int\limits_0^\infty (1+x^2)^s\,|(\mathfrak{B}_\mu f)(x)|^2\,x^{2\mu+1}\,dx$$

$$= c \cdot \|\mathfrak{B}_\mu(1+x^2)^{s/2}\,\mathfrak{B}_\mu f \mid L_{2,\mu}\|^2 = c \cdot \|f \mid H^s_{2,\mu}\|^2,$$

was man unter Ausnutzung der Beziehungen $2^{js} \leqq 2^s(1+x^2)^s$ für x mit $(1+x^2) \in \operatorname{supp}\varphi_j$ und der Tatsache, daß $\varphi_j(t) \leqq 1$ ist, erhält. Wegen der Dichtheit von $H(\Omega)$ in $H^s_{2,\mu}$ folgt aus der obigen Abschätzung die stetige Einbettung

$$H^s_{2,\mu} \subseteqq B^{s/2}_{2,2,\mu}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt (2) und damit der Satz ∎

Satz 2: (i) *Für* $0 < s_0, s_1 < \infty$, $\mu \geqq -1/2$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)\,s_0 + \theta s_1$, $1 < p < \infty$, *wobei* s_0, s_1, s *nicht ganzzahlig sind, gilt*

$$[W^{s_0}_{p,\mu}, W^{s_1}_{p,\mu}]_\theta = W^s_{p,\mu} \tag{5}$$

und, für $m = 0, 1, 2, \ldots$, *gilt*

$$[L_{p,\mu}, W^m_{p,\mu}]_\theta = H^{\theta m}_{p,\mu}. \tag{6}$$

(ii) *Für* $0 \leqq s_0 < s_1 < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)\,s_0 + \theta s_1$, $\mu \geqq -1/2$ *gilt bei nichtganzem* s

$$(H^{s_0}_{p,\mu}, H^{s_1}_{p,\mu})_{\theta,p} = W^s_{p,\mu} \tag{7}$$

und

$$(W^{s_0}_{p,\mu}, W^{s_1}_{p,\mu})_{\theta,p} = W^s_{p,\mu}, \tag{8}$$

wobei s_0, s_1 *gleichzeitig ganz bzw. nichtganz seien.*

Beweis: Aus Satz 2.1/2 (i) ergibt sich mit $p_0 = p_1 = q_0 = q_1 = p$ und $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ für nichtganze s_0, s_1, s die Beziehung (5). Setzen wir in Formel 2.1/(16) $s_0 = 0$,

$s_1 = m$, so erhalten wir wegen $L_{p,\mu} = H^0_{p,\mu}$ die Beziehung (6). Setzt man $q = p$ in Formel 2.1/(15), so erhält man (7). Sind s_0 und s_1 ganz, so folgt (8) aus Formel 2.1/(13), wenn man dort $p_0 = p_1 = q_0 = q_1 = p$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ wählt und s_0 durch $s_0/2$, s_1 durch $s_1/2$, s durch $s/2$ ersetzt ∎

LITERATUR

[1] ALTENBURG, G.: Eigenschaften von Fourier-Besseltransformationen. Diplomarbeit: FSU Jena 1979.

[2] ALTENBURG, G.: Besseltransformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall (0, ∞) und deren Dualräumen. Math. Nachr. 108 (1982) 197–218.

[3] BUTZER, P. L., NESSEL, R. J., und W. TREBELS: Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation, 1. Radial multipliers in connection with Riesz-bounded spectral measures. J. Approx. Theory 8 (1973), 335–356.

[4] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume, Bd. 1. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1966.

[5] TRIEBEL, H.: Fourier analysis and function spaces. Teubner-Text zur Mathematik, Bd. 7. Leipzig 1977, 116–131.

[6] TRIEBEL, H.: Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1972. 2. Aufl., Verlag Harri Deutsch: Thon-Frankfurt/M.

[7] TRIEBEL, H.: Interpolation theory, function spaces, differential operators. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin/North-Holland: Amsterdam—New York—Oxford 1978.

Manuskripteingang: 19. 08. 1982

VERFASSER

GERD ALTENBURG
Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität
DDR-6900 Jena, Universitätshochhaus