

Lageabschätzung für einen Kondensator minimaler Kapazität

S. KIRSCH

Mit Hilfe der Methode der inneren Variation werden die geometrische Gestalt und Lage von demjenigen Kontinuum untersucht, das $n \geq 2$ fest und verschieden vorgegebene Punkte enthält und dessen verallgemeinerter transfiniten Durchmesser im Zusammenhang mit einer Fundamentallösung für ein verallgemeinertes Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungssystem minimal ausfällt.

С помощью метода внутренней вариации исследуются геометрический вид и геометрическое положение континуума, содержащего $n \geq 2$ различных фиксированных точек плоскости наименьшего обобщенного диаметра, в связи с фундаментальным решением обобщенной системы дифференциальных уравнений Коши-Римана.

With the help of the method of interior variation we get informations about the geometrical form and locus from that continuum, which contains $n \geq 2$ various points and has minimal generalized transfinite diameter connected with a fundamental solution for generalized Cauchy-Riemann equations.

1. Einleitung

1968 behandelte R. KÜHNAU [7] ein Extremalproblem, das, als ebenes elektrostatisches Problem gedeutet, in physikalischer Sprechweise folgendermaßen lautet. Zunächst heiße ein zweifach zusammenhängendes Gebiet zulässiger Kondensator, wenn dessen Komplement aus dem unendlich fernen Punkt und einem Kontinuum \mathfrak{R} besteht, das $n \geq 2$ fest und verschieden vorgegebene Punkte z_1, z_2, \dots, z_n enthält. Zu charakterisieren ist die geometrische Gestalt und Lage der in einem inhomogenen Medium mit der Dielektrizitätskonstante $p(z)$, $1/Q \leq p(z) \leq Q$, eingelagerten zulässigen Kondensatoren minimaler reduzierter Kapazität der Ladung 1 mit einer Gegenladung im unendlich fernen Punkt.

Hier ist folgendes Prinzip erfüllt. Es gibt genau einen zulässigen Kondensator minimaler reduzierter Kapazität. Das zugehörige, aus endlich vielen Jordankurvenbögen bestehende Extremalkontinuum \mathfrak{R}' besitzt die Eigenschaft (E), daß in jedem Punkt von \mathfrak{R}' die sich einstellende Ladungsdichte auf beiden Ufern übereinstimmt.

Im Fall $p(z) \equiv 1$ handelt es sich um ein bekanntes, auf Tschébotarëw und Pólya zurückgehendes klassisches Problem, das 1930 von H. GRÖTZSCH [4] mit der Flächenstreifenmethode und der Kontinuitätsmethode dahingehend gelöst wurde, daß das Extremalkontinuum aus einem höchstens $(2n - 3)$ -fach verästelten analytischen Schlitz mit der Eigenschaft (E) besteht; vgl. [15] und dort genannte Literatur. Einfache a-priori-Schranken für die Lage des Extremalkontinuums im Fall $p \equiv 1$ sind aus der Literatur bekannt; z. B. [8, 18], wonach dieses ganz in der abgeschlossenen konvexen Hülle der Punkte z_1, \dots, z_n liegt.

In [7] wurde für $p(z) \equiv 1$ die Extremalität und eindeutige Bestimmtheit des Extremalkontinuums mit der Eigenschaft (E) mittels Flächenstreifenmethode be-

wiesen, während seine Existenz nur für den Fall $n = 2$ durch Konstruktion einer gewissen Riemannschen Mannigfaltigkeit sichergestellt wurde. Das Hauptanliegen dieser Mitteilung besteht einerseits darin, die Existenz des Extremalkontinuums für den Fall $n > 2$ und ortsabhängiger Dielektrizitätskonstante $p(z)$ zu erbringen und andererseits eine a-priori-Schranke für die Lage des Extremalkontinuums über seine Eigenschaft (E) abzuleiten. Für den Existenzbeweis eines Extremalkontinuums mit der Eigenschaft (E) wird allerdings vorausgesetzt, daß in einer gewissen Umgebung des Extremalkontinuums $p(z) \equiv 1$ ist. Auch ohne diese Voraussetzung gilt die im Satz 1 angegebene Lageeinschränkung bei Kenntnis der Existenz des Extremalkontinuums mit der Eigenschaft (E) wie im Fall $n = 2$.

2. Bezeichnungen, Definitionen und Hilfssätze

Mit $p(z)$ bezeichnen wir eine in der gesamten z -Ebene \mathbb{C} definierte reellwertige und glatte Funktion bis auf eine Ausnahmemenge S , die aus endlich vielen analytischen Jordankurvenbögen bestehen möge, mit

$$1/Q \leq p(z) \leq Q,$$

die in einer gewissen Umgebung des unendlich fernen Punktes identisch 1 sei. Wir setzen noch

$$v(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}, \quad |v(z)| \leq \frac{Q - 1}{Q + 1} < 1.$$

$T(v)$ sei der Träger von $v(z)$, mit $D(\mathfrak{R})$ bzw. $|\mathfrak{R}|$ bezeichnen wir den Durchmesser bzw. den äußeren Jordanschen Flächeninhalt des Kontinuums \mathfrak{R} . Von den höchstens abzählbar unendlich vielen Gebieten, die $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{R}$ ausmachen, bezeichnen wir dasjenige mit G , das den unendlich fernen Punkt im Inneren enthält.

Wir betrachten weiterhin die Klasse \mathfrak{A} aller quasikonformen Abbildungen der Vollebene auf sich, deren Dilatation kleiner oder gleich Q und identisch 1 in $\mathbb{C} \setminus T(v)$ ist und die in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes, wo zwangsmäßig Konformität vorliegt, gemäß $z + a_1 z^{-1} + \dots$ normiert sind.

In der Klasse \mathfrak{A} gelten nach [11] für $z \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus T(v)$ die Verzerrungsungleichungen

$$|w(z) - z| \leq \min \left\{ \frac{1}{2\pi} (Q - 1) |T(v)| d^{-1}(z), (Q - 1) (|T(v)|/\pi)^{1/2} \right\}, \tag{1}$$

$$\left| \log \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} (Q - 1) |T(v)| d^{-1}(z_1, z_2), \tag{2}$$

$$|w''(z_1)/w'(z_1)| \leq \frac{1}{2\pi} (Q - 1) |T(v)| d^{-3}(z_1), \tag{3}$$

mit

$$d(z) = \min \{ |z - \zeta| : \zeta \in T(v) \} \quad \text{und} \quad d(z_1, z_2) = \min \{ |z_1 - \zeta| \cdot |z_2 - \zeta| : \zeta \in T(v) \}.$$

Mit $w(z)$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte stetige schlichte Abbildung des einfach zusammenhängenden Gebietes G auf das Äußere eines zu Null konzentrischen Kreises mit dem Radius $R(G, p)$, die $w(\infty) = \infty$ und für die $\log w(z)$ die Differentialgleichung

$$f_z = v(z) \bar{f}_z \tag{4}$$

erfüllt, wobei in $z = \infty$ die Entwicklung

$$w(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \dots$$

vorliegt (vgl. [17]).

Definition 1: $R(G, p)$ heißt *quasikonformer Abbildungsradius* von G .

Weiter bezeichnen wir mit $r(z, \zeta)$ die eindeutig bestimmte stetige schlichte Abbildung der Vollebene auf sich mit $r(\zeta, \zeta) = 0$ und $r(\infty, \zeta) = \infty$, wobei $\log r(z, \zeta)$ für $z \neq \zeta$ die Differentialgleichung (4) erfüllt und in $z = \infty$ die Entwicklung

$$\log r(z, \zeta) = \log z + \varepsilon'(z, \zeta)$$

bzw. in $z = \zeta \notin S$ die Entwicklung

$$\log r(z, \zeta) = (1 - v(\zeta))^{-1} (\log(z - \zeta) + v(\zeta) \overline{\log(z - \zeta)}) + c(\zeta) + \varepsilon(z, \zeta)$$

aufweist mit nach Null strebenden Funktionen $\varepsilon'(z, \zeta)$ (für $z \rightarrow \infty$) und $\varepsilon(z, \zeta)$ (für $z \rightarrow \zeta$) (vgl. [10, 21]).

Wir setzen noch

$$[z, \zeta] = |r(z, \zeta)|.$$

Diese Abstandsfunktion ist symmetrisch und stetig in z und ζ (vgl. [12]). Für $p(z) \equiv 1$ ist $[z, \zeta] \equiv |z - \zeta|$ und für im Innern und Äußeren des Einheitskreises stückweise konstantes $p(z)$ ist $[z, \zeta]$ in [12] angegeben worden.

Definition 2: Unter der *p-Kapazität* von \mathfrak{R} verstehen wir die nichtnegative reelle Zahl

$$\text{cap}(\mathfrak{R}, p) = \exp(-V)$$

mit

$$V = \inf(\mu, \mu), \quad (\mu, \mu) = -\iint \log [z, \zeta] d\mu(z) d\mu(\zeta),$$

wobei das Infimum über der Menge $\mathfrak{M}^+(\mathfrak{R})$ aller positiven σ -additiven Ladungen (= Mengenfunktionen), die auf \mathfrak{R} eingeschränkt sind und die Gesamtladung $\mu(\mathfrak{R}) = 1$ aufweisen, genommen wird.

Da das Funktional (μ, μ) nach unten halbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz auf $\mathfrak{M}^+(\mathfrak{R}) \times \mathfrak{M}^+(\mathfrak{R})$, existiert eine sogenannte *Gleichgewichtsladung* $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathfrak{R})$, für die $V = (\mu, \mu)$ gilt.

Wir setzen weiter

$$d_n = \max_{i < j} \prod [z_i, z_j]^{1/\binom{n}{2}} \quad \text{für } z_i \in \mathfrak{R} \quad (i = 1, \dots, n; n \geq 2).$$

Wie im klassischen konformen Fall ($p(z) \equiv 1$) kann man zeigen (vgl. [6, 22]), daß d_n mit wachsendem n nicht zunimmt.

Definition 3: $d(\mathfrak{R}, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ heißt *verallgemeinerter transfiniter Durchmesser* von \mathfrak{R} .

Für unsere weiteren Überlegungen benötigen wir für die Abstandsfunktion $[z, \zeta]$ eine Verzerrungsaussage, die wir gleich allgemeiner für Abbildungen aus \mathfrak{A} formulieren werden.

Mit der Hilfsfunktion

$$H(x, y, t) = (x + 2y + 2(xy + y^2)^{1/2})^{1-1/t}$$

gilt das

Lemma 1: Für $f(z) \in \mathfrak{A}$ und $z, \zeta \in \mathbb{C}$ gilt

$$B' |z - \zeta|^Q \leq |f(z) - f(\zeta)| \leq A' |z - \zeta|^{1/Q} \quad (5)$$

mit

$$A' = H(|z - \zeta|, D(T(v)), Q)$$

und

$$B' = H(|z - \zeta|^{1/Q} A', (3 + 8^{1/2})^{1-1/Q} D(T(v)), Q)^{-Q}.$$

Bemerkung 1: (5) ist asymptotisch scharf in dem Sinne, daß die linke und rechte Seite von (5) nach $|z - \zeta|$ streben für $Q \rightarrow 1$ bei festen $z, \zeta \in \mathbb{C}$.

Folgerung 1: Wenn $|z - \zeta| \leq D$ ist, so gilt für $f(z) \in \mathfrak{A}$

$$B |z - \zeta|^Q Q \leq |f(z) - f(\zeta)| \leq A |z - \zeta|^{1/Q} \quad (6)$$

mit

$$A = H(D, D(T(v)), Q) \leq (2(D + 2D(T(v))))^{1-1/Q}$$

und

$$\begin{aligned} B &= H(AD^{1/Q}, (3 + 8^{1/2})^{1-1/Q} D(T(v)), Q)^{-Q} \\ &\geq \left[2(D^{1/Q} (2(D + 2D(T(v))))^{1-1/Q} + 2(3 + 8^{1/2})^{1-1/Q} D(T(v))) \right]^{1-Q}. \end{aligned}$$

Beweis zu Lemma 1: Sei Γ die die endlichen und verschiedenen Punkte z und ζ der z' -Ebene verbindende Strecke. Wir verwenden eine Aussage von A. PFLUGER (vgl. [14: S. 49]) über die Veränderung des transfiniten Durchmessers von Γ gegenüber einem quasikonformen Homöomorphismus $f(z) \in \mathfrak{A}$, derzufolge

$$d(f(\Gamma), 1) \leq d(\Gamma, 1) \cdot \exp \int_0^\infty (1 - 1/K_\lambda) d\lambda \quad (7)$$

gilt. Dabei ist $K_\lambda = \max_{z \in \Gamma_\lambda} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \leq Q$ und Γ_λ die Niveaulinie $g(z', \infty) = \lambda$ (zu z und ζ konfokale Ellipse) der Greenschen Funktion $g(z', \infty)$ des Äußeren von Γ , die mit der Riemannschen Abbildungsfunktion $F(z')$ für das Äußere von Γ durch $g(z', \infty) = \log |F(z')|$ zusammenhängt, wobei $F(z') = (u(z')/2) + ((u(z')/2)^2 - 1)^{1/2}$ mit $u(z') = (4z'/(\zeta - z)) + 2((z + \zeta)/(z - \zeta))$ gilt.

Die rechte Seite von (7) weiter abgeschätzt liefert

$$d(f(\Gamma), 1) \leq d(\Gamma, 1) \cdot \exp((1 - 1/Q)(\lambda_1 - \lambda_2)) = d(\Gamma, 1) (r_2/r_1)^{1-1/Q}, \quad (8)$$

wobei die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, derart sind, daß die konfokalen Ellipsen $\Gamma_{\lambda_1}, \Gamma_{\lambda_2}$, die den zu Null konzentrischen Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 in der $F(z')$ -Ebene entsprechen, den Träger $T(v)$ einschließen und berühren. Falls $T(v)$ und Γ gemeinsame Punkte haben, setzt man $\Gamma_{\lambda_1} = \Gamma$.

Die große Halbachse von Γ_{λ_i} sei $a_i = |z - \zeta| (r_i + 1/r_i)/4$ ($i = 1, 2$) mit

$$2a_1 = |z - z_1| + |\zeta - z_1| = \min_{z' \in T(v)} (|z - z'| + |\zeta - z'|)$$

und

$$2a_2 = |z - z_2| + |\zeta - z_2| = \max_{z' \in T(v)} (|z - z'| + |\zeta - z'|).$$

Wird im Zähler des Ausdrucks

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{(|z - z_2| + |\zeta - z_2|) + [(|z - z_2| + |\zeta - z_2|)^2 - |z - \zeta|^2]^{1/2}}{(|z - z_1| + |\zeta - z_1|) + [(|z - z_1| + |\zeta - z_1|)^2 - |z - \zeta|^2]^{1/2}}$$

jeweils der Summand in runden Klammern durch $|z - z_1| + |z_1 - \zeta| + 2D(T(v))$ vergrößert, so entsteht ein Ausdruck, der als Funktion von $|z - z_1| + |z_1 - \zeta|$ ($\geq |z - \zeta|$) monoton fallend ist. Es gilt dann

$$\frac{r_2}{r_1} \leq \frac{|z - \zeta| + 2D(T(v)) + [(|z - \zeta| + 2D(T(v)))^2 - |z - \zeta|^2]^{1/2}}{|z - \zeta|} \tag{9}$$

Verbindet man (8) und (9) mit der bekannten Ungleichung zwischen dem Durchmesser und dem gewöhnlichen transfiniten Durchmesser von $f(\Gamma)$:

$$D(f(\Gamma)) \leq 4d(f(\Gamma), 1),$$

so erhält man unter Berücksichtigung von $d(\Gamma, 1) = |z - \zeta|/4$ die rechte Seite von (5) und zugleich die Abschätzung

$$D(f(T(v))) \leq (3 + 8^{1/2})^{1-1/q} D(T(v)).$$

Da die Umkehrfunktion $z = z(f)$ von $f = f(z) \in \mathfrak{A}$ ebenfalls eine Q -quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich ist mit $z(\infty) = \infty$ und $z'(\infty) = 1$, so erhält man nach Anwendung der rechten Seite von (5) auf $z = z(f)$ die linke Seite der Ungleichung (5) ■

Lemma 2: Sei $G_n \ni \infty$ eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete, die das einfach zusammenhängende Gebiet $G \ni \infty$ als Kern im Sinne von [3: S. 196] besitzt und gegen ihn konvergiert. Des weiteren sei $w_n(z)$ bzw. $w(z)$ die zugehörige quasikonforme Kreisabbildung von G_n bzw. G . Dann konvergieren die Abbildungsfunktionen $w_n(z)$ im Innern von G gleichmäßig gegen die Abbildungsfunktion $w(z)$, die Bildgebiete $w_n(G_n)$ besitzen $w(G)$ als Kern und konvergieren gegen ihn, d. h. $R(G_n, \rho) \rightarrow R(G, \rho)$ für $n \rightarrow \infty$.

Es sei darauf hingewiesen, daß es, obwohl die Abbildungsfunktionen $w_n(z)$ in gewissen Punkten von G erst von einem gewissen n ab erklärt sind, dennoch sinnvoll ist, von Konvergenz in diesen Punkten zu reden.

Beweis: Die Funktionenfolge $w_n(z)$ ist in G punktweise konvergent. Andernfalls gäbe es zwei Teilfolgen aus $w_n(z)$, die in einem Punkt von G gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren würden. Aus diesen zwei Teilfolgen kann man aus Normalitätsgründen wieder je eine Teilfolge $w_n^{(1)}(z)$ bzw. $w_n^{(2)}(z)$ so auswählen, daß sie im Inneren von G gleichmäßig gegen die quasikonforme Abbildungsfunktion $w^{(1)}(z)$ bzw. $w^{(2)}(z)$ mit

$$w^{(1)}(\infty) = w^{(2)}(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad w^{(1)'(\infty)} = w^{(2)'(\infty)} = 1$$

konvergiert und daß die Bildgebietenfolge $w_n^{(1)}(G_n)$ bzw. $w_n^{(2)}(G_n)$ kernkonvergent gegen das Kreisgebiet $|w| > R_1$ bzw. $|w| > R_2$ ist. In Verbindung mit einem Kernkonvergenzsatz für quasikonforme Abbildungen [16: S. 79] folgert man, daß die quasikonforme Grenzabbildung $w^{(i)}(z)$ das Gebiet G auf $|w| > R_i$ ($i = 1, 2$) abbildet.

Da in $G \setminus S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^{(i)}(z)}{w_n^{(i)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} v(z) \frac{w_n^{(i)}(z)}{w_n^{(i)}(z)} = v(z) \frac{w^{(i)}(z)}{w^{(i)}(z)}$$

für $i = 1, 2$ gilt, stimmt die komplexe Dilatation zweiter Art von $w^{(i)}(z)$ in G mit $v(z) \frac{w^{(i)}(z)}{w^{(i)}(z)}$ bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null überein (vgl. [16: Satz 5.2, S. 197]), wenn man dort nur w_1 und w_2 durch ihre konjugiert kom-

plexen Werte ersetzt. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit von $w(z)$ folgt $w^{(1)}(z) \equiv w^{(2)}(z)$ in G , im Widerspruch zur Annahme. Insbesondere folgt aus den Überlegungen die Kernkonvergenz von $w_n(G_n)$ gegen ein Kreisgebiet $|w| > R$. Die Punkt-konvergenz in Verbindung mit der Normalität der Folge $w_n(z)$ liefert die gleich-mäßige Konvergenz im Innern von G gegen eine quasikonforme Abbildungsfunktion $w^*(z)$, die G auf $|w| > R$ abbildet und deren Logarithmus fast überall in G die Differentialgleichung (4) erfüllt. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit von $w(z)$ gilt $w(z) \equiv w^*(z)$ in G und $R(G_n, p) \rightarrow R = R(G, p)$ für $n \rightarrow \infty$ ■

Bemerkung 1: Das Lemma 2 gilt sinngemäß auch für den Fall, wenn $G_n \equiv G$ gesetzt wird, und $w_n(z)$ die quasikonforme Kreisabbildungsfunktion von G mit der komplexen Dilatation zweiter Art $\nu_n(z) w_n(z) \overline{w_n(z)}$ bedeutet, wobei $\nu_n(z)$ in der gesamten Ebene erklärte, reellwertige und zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger bezeichnen, die fast überall gegen $\nu(z)$ konvergieren.

Lemma 3: Es gilt

$$d(\mathfrak{R}, p) = \text{cap}(\mathfrak{R}, p) = R(G, p) \quad (11)$$

und

$$BR(G, 1)^Q \leq R(G, p) \leq AR(G, 1)^{1/Q} \quad (12)$$

mit Konstanten A, B wie in (6), wenn dort $D = D(\mathfrak{R})$ gesetzt wird.

Beweis: Zum Beweis der ersten Gleichung in (11) vergleiche man [6] und [22]. Sei G_n eine G ausschöpfende monotone Folge einfach zusammenhängender Gebiete, die analytisch berandet seien. Mit μ bzw. μ_n bezeichnen wir die Gleichgewichtsladungen für die Kontinuen \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{R}_n . Aus der Definition 2 folgt man

$$(\mu_n, \mu_n) \leq (\mu_{n+1}, \mu_{n+1}) \leq (\mu, \mu),$$

so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \mu_n) \leq (\mu, \mu)$ ist. Wegen der schwachen Kompaktheit der Folge $\mu_n \in \mathfrak{M}^+(\mathfrak{R}_n)$ existiert eine Teilfolge von μ_n , wieder mit μ_n bezeichnet, die schwach gegen ein Maß $\mu' \in \mathfrak{M}^+(\mathfrak{R})$ konvergiert. Wegen der Halbstetigkeit nach unten des Funktionals (μ, μ) auf $\mathfrak{M}^+(\mathfrak{R}) \times \mathfrak{M}^+(\mathfrak{R})$ erhält man somit unter Berücksichtigung von Definition 2

$$(\mu, \mu) \leq (\mu', \mu') \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \mu_n) \leq (\mu, \mu);$$

woraus $\text{cap}(\mathfrak{R}, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(\mathfrak{R}_n, p)$ folgt. Nach [6: Satz 2] gilt nun $\text{cap}(\mathfrak{R}_n, p) = R(G_n, p)$. Alles zusammengefaßt liefert dies in Verbindung mit Lemma 2 die Gültigkeit der zweiten Gleichung von Lemma 3. Die Doppelungleichung ergibt sich aus (11), Definition 3 und (6), wobei in (6) $w(z) = r(z, \zeta)$ gesetzt wurde ■

3. Aufgabenstellung und Hauptergebnis

Unter allen Kontinuen \mathfrak{R} , die $n \geq 2$ fest und verschieden vorgegebene Punkte z_1, z_2, \dots, z_n enthalten, sind diejenigen Kontinuen \mathfrak{R}' gesucht, für die der betreffende quasikonforme Abbildungsradius des Äußeren G' von \mathfrak{R}' minimal ausfällt.

3.1. Existenzbeweis von \mathfrak{R}'

G_1 sei das Äußere der abgeschlossenen konvexen Hülle \mathfrak{R}_1 der Punkte z_1, \dots, z_n . Aus der Menge der zulässigen Vergleichskontinuen, deren Äußeres G einen quasikonformen Abbildungsradius

$$R(G, \rho) \leq R(G_1, \rho)$$

aufweisen, sondern wir eine Extremalfolge $\mathfrak{R}_m = \mathbb{C} \setminus G_m$ mit $R(G_m, \rho) \searrow R' = \min$ aus. Mit $z_m(w)$ bezeichnen wir die quasikonforme Umkehrabbildung von $w_m(z) : G_m \rightarrow \{ |w| > R(G_m, \rho) \}$, die wegen (4) der Beltrami-Differentialgleichung

$$z_{m\bar{w}} = -\frac{w}{\bar{w}} \nu(z_m(w)) z_{m\bar{w}} \quad \text{in } |w| > R(G_m, \rho) \tag{13}$$

genügt. Den Ungleichungen (10) und (12) entnimmt man die gleichmäßige Beschränktheit der Extremalfolge \mathfrak{R}_m . Aus Kompaktheitsgründen kann man aus der Funktionenfolge $z_m(w)$ eine Teilfolge, wieder mit $z_m(w)$ bezeichnet, auswählen, die im Innern von $|w| > R = \min$ gleichmäßig gegen eine nicht konstante quasikonforme Abbildung $z(w)$ konvergiert. Wegen der Glattheitsvoraussetzung über $\nu(z)$ gilt bis auf diejenigen Punkte von $|w| > R$, wo $\nu(z(w))$ eventuell unstetig ist,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_{m\bar{w}}/z_{mw} = \lim_{m \rightarrow \infty} -\nu(z_m(w)) w/\bar{w} = -\nu(z(w)) w/\bar{w},$$

d. h. $z_m(w)$ stellt eine gute Approximation von $z(w)$ im Sinne von [16: S. 197] dar, so daß $z(w)$ f. ü. (13) in $|w| > R$ und damit $\log w(z)$ die Differentialgleichung (4) f. ü. in $G' = \{ |w| > R \}$ erfüllt. $\mathfrak{R}' = \mathbb{C} \setminus G'$ ist offenbar ein die Punkte z_1, \dots, z_n enthaltendes Kontinuum, für dessen Äußeres der quasikonforme Abbildungsradius minimal ausfällt.

3.2. Eine grobe Lageabschätzung für \mathfrak{R}'

Aus (10), (12) und der Extremalität von \mathfrak{R}' erhalten wir für den Durchmesser von \mathfrak{R}' die Abschätzung

$$D(\mathfrak{R}') \leq 4^q D^{1/q} \left(2(D + 2D(T(\nu))) \right)^{1-1/q} \times \left(2(1 + 2D(T(\nu)) D^{-1})^{1-1/q} + 2(3 + 8^{1/2})^{1-1/q} D(T(\nu)) D^{-1} \right)^{q-1} =: r',$$

wobei $D = \max_{i \neq j} |z_i - z_j|$ gesetzt ist. Daraus schließt man, daß \mathfrak{R}' ganz in dem Durchschnitt $M = M(z_1, \dots, z_n, r')$ der abgeschlossenen Kreisscheiben $|z - z_i| \leq r'$ ($i = 1, \dots, n$) liegt. Im weiteren setzen wir voraus, daß \mathfrak{R}' und $T(\nu)$ keine gemeinsamen Punkte besitzen. Das ist sicher dann gewährleistet, wenn der Abstand

$$l = \min_{z \in M, \zeta \in T(\nu)} |z - \zeta|$$

des Trägers von $\nu(z)$ und M größer Null ist.

3.3. Variationsformel für den quasikonformen Abbildungsradius $R(G, p)$, falls $z_i \notin G \supset T(\nu)$, $i = 1, \dots, n$

Wir setzen zunächst G analytisch berandet voraus. Die reelle Funktion $\nu(z)$ sei vorerst zweimal stetig differenzierbar, wobei der kompakte Träger $T(\nu) \subset G$ den Rand von G vom unendlich fernen Punkt nicht trennen möge. Von diesen Glattheitsvoraussetzungen werden wir uns später lösen.

Sei C eine beliebige, aber feste, $T(\nu)$ umschlingende geschlossene analytische Jordankurve innerhalb von G . Des weiteren bezeichnen wir mit k_z einen Kreis mit dem Mittelpunkt z und Radius ρ im Äußeren von ∂G und C . Die Kurven ∂G , C und k_z seien mathematisch positiv orientiert. Die innere Variation

$$\zeta_\varepsilon = \zeta + \varepsilon(\zeta - z)^{1-n} \prod_{i=1}^n (\zeta - z_i), \quad \varepsilon \text{ komplexe Konstante,} \quad (14)$$

vermittelt außerhalb von k_z eine schlicht konforme Abbildung für hinreichend kleines $|\varepsilon|$.

Wir setzen noch

$$P(\zeta) = \log(w(\zeta)/R(G, p)), \quad P_\varepsilon(\zeta) = \log(w_\varepsilon(\zeta)/R(G_\varepsilon, p)), \quad (15)$$

wenn $w(\zeta)$ bzw. $w_\varepsilon(\zeta)$ die zugehörige quasikonforme Kreisabbildung von G bzw. G_ε (= Äußeres von $\zeta_\varepsilon(\partial G)$) bedeutet. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G + C + k_z} [P_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) - P(\zeta)] dP = \log(R(G, p)/R(G_\varepsilon, p)) + \operatorname{Re} \log(1 + \varepsilon). \quad (16)$$

Da $P(\zeta)$ und $P_\varepsilon(\zeta)$ Lösungen von (4) sind, gilt für hinreichend kleines $|\varepsilon|$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{C + k_z} [P(\zeta) - P_\varepsilon(\zeta)] dP = 0.$$

Die Gleichungen (15) und (16), addiert, liefern uns unter Berücksichtigung von

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} [P_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) - P(\zeta)] dP = 0$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \log(R(G, p)/R(G_\varepsilon, p)) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{C + k_z} [P_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) - P_\varepsilon(\zeta)] P'(\zeta) d\zeta \\ &\quad - \operatorname{Re} \log(1 + \varepsilon). \end{aligned} \quad (18)$$

Durch eine Ausschöpfung von G durch analytisch berandete Gebiete schließen wir in Verbindung mit Lemma 2 auf die Gültigkeit von (18) für beliebig berandete Gebiete G . Approximiert man $\nu(z)$ mit $T(\nu) \subset G$ durch eine Folge von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\nu_n(z)$ mit kompakten Trägern $T(\nu_n) \subset G$, die ∂G von ∞ nicht trennen mögen, so bleibt mit der Bemerkung 1 die Variationsformel (18) auch für den Fall einer stückweise glatten Funktion $\nu(z)$ mit kompaktem Träger $T(\nu) \subset G$ bestehen. Falls $T(\nu)$ den Rand ∂G von ∞ trennt, hat man vor dem letztgenannten Grenzübergang in (18) die Kurve C durch zwei geschlossene analytische Jordankurven C_1 (mathematisch negativ orientiert) und C_2 (mathematisch positiv

orientiert) zu ersetzen, so daß ∂G im Innern von C_1 , C_1 im Innern von C_2 und $T(\nu)$ zwischen C_1 und C_2 liegt.

Da in einer gewissen Umgebung U von $k_\varepsilon + C$ für hinreichend kleines $|\varepsilon|$ die Entwicklung

$$P_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) - P_\varepsilon(\zeta) = P'_\varepsilon(\zeta) (\zeta_\varepsilon - \zeta) + o(\varepsilon)$$

und auf Grund von Lemma 2

$$P'_\varepsilon(\zeta) = P'(\zeta) + h(\varepsilon, \zeta)$$

gilt mit $h(\varepsilon, \zeta)$ gleichmäßig konvergent gegen Null in U für $|\varepsilon| \rightarrow 0$, geht (18) nach Anwendung der Cauchyschen Integralformel über in

$$\begin{aligned} \log (R(G, p)/R(G_\varepsilon, p)) = \operatorname{Re} \varepsilon \left[\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} \left(\frac{P'^2(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)}{(n-2)!} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_C P'^2(\zeta) (\zeta - z)^{1-n} \prod_{i=1}^n (\zeta - z_i) d\zeta - 1 \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (19)$$

Unter der Voraussetzung positiven Abstandes l zwischen $T(\nu)$ und M gilt

Satz 1. Es gibt genau ein Extremalkontinuum \mathfrak{R}' , für dessen Äußeres G' der quasikonforme Abbildungsradius $R(G', p)$ minimal ausfällt. Es besteht aus einem höchstens $(2n-3)$ -fach verästelten analytischen Schlitz mit der Eigenschaft (E), d. h. daß dem links- und rechtsseitigen Ufer eines beliebigen Teilbogens von \mathfrak{R}' auf dem Kreis $|w| = R(G', p)$ bei der Extremalabbildung $w(z)$ gleich lange Kreisbögen entsprechen. Das Extremalkontinuum wird durch ein positives quadratisches Differential

$$Q(z) dz^2 > 0, \quad Q(z) \text{ meromorph in } \mathbb{C} \setminus C,$$

beschrieben und liegt ganz in der abgeschlossenen konvexen Hülle der Vereinigung der Kreisscheiben

$$|z - z_i| \leq \min \{ \pi^{-1}(Q - 1) |T(\nu)|/l, 2(Q - 1) (|T(\nu)|/\pi)^{1/2} \}$$

für $i = 1, \dots, n$.

Satz 1'. Im Fall $n = 2$ ist das Extremalkontinuum \mathfrak{R}' das analytische Bild einer Strecke, vermittelt durch eine quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich. Wenn $\alpha(z)$ bzw. $\kappa(z)$ den Winkel der von z_1 nach z_2 gerichteten Tangente zur Richtung von z_1 nach z_2 bzw. die Krümmung des analytischen Jordankurvenbogens \mathfrak{R}' mit der Länge L im Punkt $z \in \mathfrak{R}'$ bezeichnet, so gelten noch zu der a priori Lageeinschränkung von \mathfrak{R}' im Satz 1 die folgenden Abschätzungen:

$$|\alpha(z)| \leq \pi^{-1}(Q - 1) |T(\nu)| l^{-2}, \quad z \in \mathfrak{R}', \quad (20)$$

$$|\kappa(z)| \leq (2\pi)^{-1} (Q - 1) |T(\nu)| l^{-3}, \quad z \in \mathfrak{R}', \quad (21)$$

und

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| \leq L \leq |z_1 - z_2|^{1/Q} \left(2(|z_1 - z_2| + 2D(T(\nu))) \right)^{1-1/Q} \\ \times \exp \left(\frac{1}{2\pi} (Q - 1) |T(\nu)| l^{-2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Bemerkung 2: Die Lageabschätzung des Extremalkontinuums \mathfrak{R}' für den Fall $n = 2$ im Satz 1 gilt übrigens auch für eine beliebige Lage des Trägers von $\nu(z)$, da

die Eigenschaft (E) von \mathfrak{R}' unabhängig von der Lage des Trägers von $\nu(z)$ in [7] über die Konstruktion einer gewissen Riemannschen Mannigfaltigkeit nachgewiesen wurde.

Bemerkung 3: Daß $\mathfrak{R}'(z_1, z_2)$ im Fall $p(z) \geq 1$ das Bild einer Strecke ist, vermittelt durch eine quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich, wurde bereits in [13: S. 245] bemerkt.

Beweis von Satz 1: Sei G' ein Extremalgebiet. $P(z)$, der Logarithmus der zugehörigen Extremalabbildung, erfüllt dann in G' rechterhand von C notwendig die Differentialgleichung

$$P'^2(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i) = (z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} + \dots + b_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P'^2(\zeta) \prod_{i=1}^n (\zeta - z_i)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (23)$$

b_i konstant ($i = 0, \dots, n-3$).

Dies ergibt sich durch $(n-2)$ -malige Integration des eckigen Klammersausdruckes in (19), der identisch verschwinden muß. Offenbar kann \mathfrak{R}' keine inneren Punkte besitzen. Andernfalls könnte man \mathfrak{R}' stets so abändern, daß der quasikonforme Abbildungsradius $R(G, p)$ als streng monoton fallendes Gebietsfunktional (vgl. [6]) kleiner als $R(G', p)$ ausfallen würde im Widerspruch zur Minimalität von $R(G', p)$. Setzt man

$$f(z) = P'^2(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i) - (z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} + \dots + b_0)$$

und wendet die Sochozki-Plemeljschen Formeln auf (23) an, so erkennt man, daß $f(z)$ die homogene Integralgleichung

$$f(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in C,$$

erfüllt.

Der Differentialgleichung (23) entnimmt man, daß \mathfrak{R}' durch das positive quadratische Differential

$$Q(z) dz^2 > 0$$

mit

$$Q(z) = \frac{z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} + \dots + b_0 - (2\pi i)^{-1} \int_C f(\zeta) (\zeta - z)^{-1} d\zeta}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}$$

beschrieben wird. Nach [5] besteht \mathfrak{R}' demnach aus analytischen Schlitzern, die in höchstens endlich vielen Verzweigungspunkten (= Nullstellen des Zählers von $Q(z)$) verästelt sein können und in mindestens zwei der Punkte z_1, \dots, z_n einmünden müssen. Letzteres bedeutet, daß $Q(z)$ mindestens zwei einfache Pole besitzen muß, andernfalls wäre der topologische Verlauf des Extremalkontinuums unvereinbar mit der Extremalität von \mathfrak{R}' . Die Eigenschaft (E) von \mathfrak{R}' ergibt sich dann vermöge der

Beziehung

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} \log |w(z)|\right)^2 = -z'^2(s) P'^2(z),$$

wobei $z(s)$ eine Parameterdarstellung von \mathbb{R}' bezüglich der Bogenlänge s und n die Außennormale bezeichnet, und unter Berücksichtigung der Nichtnegativität der Normalenableitung von $\log |w(z)|$ in $z \in \mathbb{R}'$ in Verbindung mit (23). Mit $w_i = w(z_i)$ bezeichnen wir den Bildpunkt von z_i ($=$ einfacher Pol von $Q(z)$; $i = 1, \dots, r \leq n$) bezüglich der Extremalabbildung $w(z)$ auf dem Kreis $|w| = R(G', p)$. Wir konstruieren durch Ränderzuordnung eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, in dem wir jeweils, falls vorhanden, die m Bildpunkte bezüglich der Extremalabbildung $w(z)$ auf dem Kreis $|w| = R(G', p)$ jedes m -fach erreichbaren Punktes von \mathbb{R}' identifizieren. Insbesondere werden die w_i sich selbst zugeordnet ($i = 1, \dots, r \leq n$). Nach einem Fundamentalsatz der konformen Abbildung läßt sich die so gefundene Riemannsche Mannigfaltigkeit, die von den Punkten w_i ($i = 1, \dots, r \leq n$) begrenzt zu denken ist und ∞ als inneren Punkt enthält, auf einen schlichten r -fach zusammenhängenden Bereich der ζ -Ebene schlicht konform abbilden, so daß $\zeta(\infty) = \infty$ und $\zeta'(\infty) = 1$ gilt. Den Begrenzungen w_i entsprechen notwendig die Punkte ζ_i ($i = 1, \dots, r \leq n$). Die Kreislinie $|w| = R(G', p)$ geht in einen höchstens $(2r-3)$ -fach verästelten analytischen Schlitz \mathbb{R}'' über, der nach [4] gerade das eindeutig bestimmte, die Punkte ζ_i ($i = 1, \dots, r \leq n$) enthaltende Extremalkontinuum für den konformen Fall $v(z) \equiv 0$ ist. (Auf die Möglichkeit, die eben angegebene konforme Verheftung von $|w| = R(G', p)$ auch nutzbar zu machen für eine a priori-Lageabschätzung von \mathbb{R}' für $n > 2$, machte mich Herr R. Kühnau aufmerksam.) Die zusammengesetzte Abbildung

$$\zeta = \zeta(w(z)) \tag{24}$$

mit $\zeta'(\infty) = 1$ ist eine die Punkte z_i in ζ_i ($i = 1, \dots, n$) überführende Q -quasikonforme Abbildung des Äußeren von \mathbb{R}' auf das Äußere von \mathbb{R}'' , die auf Grund der obigen Verheftungsvorschrift zu einer topologischen Abbildung der Vollebene auf sich erweitert werden kann. Da eine Q -quasikonforme Abbildung bezüglich analytischer Bögen hebbar ist, gehört (24) nach hydrodynamischer Normierung in $z = \infty$ zu \mathfrak{A} . Wegen $\mathbb{R}' = \zeta^{-1}(\mathbb{R}'')$ ist \mathbb{R}' höchstens $(2n-3)$ -fach verästelt. Bekanntlich liegt \mathbb{R}'' ganz in der abgeschlossenen konvexen Hülle $H(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ der Punkte ζ_1, \dots, ζ_n (vgl. [8]). Identifiziert man die z -Ebene und ζ -Ebene, so entnimmt man (1), daß $\zeta_i = \zeta(z_i)$ innerhalb des Kreises

$$|z - z_i| \leq \min \left\{ (Q - 1) (|T(v)|/\pi)^{1/2}, \frac{1}{2\pi} (Q - 1) |T(v)| t^{-1} \right\}, \tag{25}$$

für $i = 1, \dots, n$, liegt. Daher liegt $H(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ innerhalb der abgeschlossenen konvexen Hülle H' der Vereinigung der Kreise (25). Wendet man abermals (1) auf die Punkte ζ von H' an unter Berücksichtigung der Schlichtheit von (24), so folgt die Behauptung des Satzes 1 über die Lage von \mathbb{R}' .

Die eindeutige Bestimmtheit von \mathbb{R}' beweist man mit der Eigenschaft (E) wie in [7] ■

Beweis von Satz 1': Im Fall $n = 2$ ist \mathbb{R}'' die ζ_1 und ζ_2 verbindende Strecke und damit \mathbb{R}' das analytische Bild einer Strecke, vermittelt durch eine Q -quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich. Sei $\zeta^{-1}(z)$ die Umkehrfunktion von (24). Für \mathbb{R}' wählen wir die Parameterdarstellung

$$z(t) = \zeta^{-1}(\zeta_1 + t(\zeta_2 - \zeta_1)), \quad t \in [0, 1].$$

Die Beziehungen

$$\alpha(z) = \arg [z'(\zeta) (\zeta_2 - \zeta_1) (z_2 - z_1)^{-1}], \quad z \in \mathfrak{R}',$$

$$|\kappa(z)| = |\dot{z}(t)|^{-3} |\operatorname{Im}(\overline{\dot{z}(t)} \ddot{z}(t))| \leq |z''(\zeta)| |z'(\zeta)|^{-2} = |\zeta''(z)/\zeta'(z)|, \quad z \in \mathfrak{R}',$$

und

$$|z_1 - z_2| \leq L = \int_{\mathfrak{R}'} |dz| = |\zeta_2 - \zeta_1| \int_0^1 |\zeta'(z)|^{-1} dt$$

liefern in Verbindung mit (1), (2), (3) und (6) die Einschränkungen (20) bis (22) ■

Bemerkung 4: Unter Verwendung der Ungleichung (12) und der Abschätzung von $D(\mathfrak{R}')$ in 3.2 lassen sich leicht Kapazitätsabschätzungen für $\mathfrak{R}'(z_1, z_2)$ angeben, die asymptotisch scharf sind für Q gegen 1.

LITERATUR

- [1] BERGMAN, S.: The kernel function and conformal mapping. New York 1950.
- [2] COURANT, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York 1950.
- [3] GOLUŠIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957. (Übers. a. d. Russ.)
- [4] GRÖTZSCH, H.: Über ein Variationsproblem der konformen Abbildung. Ber. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig **82** (1930), 251–263.
- [5] JENKINS, J. A.: Univalent functions and conformal mapping. Springer-Verlag: Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.
- [6] KIRSCH, S.: Ein verallgemeinerter transfiniter Durchmesser im Zusammenhang mit einer quasikonformen Normalabbildung. Complex Analysis: Banach Center Publications Vol. **11** (1982), 121–129.
- [7] KÜHNAU, R.: Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien I. J. reine angew. Math. **231** (1968), 101–113.
- [8] —: Herleitung einiger Verzerrungseigenschaften konformer und allgemeinerer Abbildungen mit Hilfe des Argumentprinzips. Math. Nachr. **39** (1969), 249–275.
- [9] —: Transfiniter Durchmesser, Kapazität und Tschebyschewsche Konstante in der euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie. J. reine angew. Math. **234** (1969), 216–220.
- [10] —: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. Ann. Polon. Math. **31** (1975), 269–289.
- [11] —: Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien. Comm. Math. Helvetici **53** (1978), 408–428.
- [12] —: Gauss-Thomsonsches Prinzip minimaler Energie, verallgemeinerte transfinite Durchmesser und quasikonforme Abbildungen. In: Proc. Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis. Lect. Notes Math. **743** (1979), 140–164.
- [13] —: Über die Werte des Doppelverhältnisses bei quasikonformer Abbildung. Math. Nachr. **95** (1980), 237–251.
- [14] KÜNZI, H. P.: Quasikonforme Abbildungen. Springer-Verlag: Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.
- [15] КУЗЬМИНА, Г. В.: Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. Труды ордена Ленина мат. ин.-та им. В. А. Стеклова **СXXXIX**, Ленинград 1980.
- [16] ЛЕНТО, О., und K. I. VIRTANEN: Quasikonforme Abbildungen. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1965.
- [17] PARTER, S. V.: On mappings of multiply connected domains by solutions of partial differential equations. Comm. pure appl. Math. **13** (1960), 167–182.

- [18] PIRL, U.: Über die geometrische Gestalt eines Extremalkontinuums aus der Theorie der konformen Abbildungen. Math. Nachr. 39 (1969), 297—312.
- [19] PFLUGER, A.: Quasikonforme Abbildungen und logarithmische Kapazität. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 2 (1951), 69—70.
- [20] REICH, E., and M. SCHIFFER: Estimates for the transfinite diameter of a continuum. Math. Z. 85 (1964), 91—106.
- [21] SCHIFFER, M., and G. SCHOBER: Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, Vol. 2 (1976), 501—531.
- [22] SZYBIAK, A.: On some constants related to the generalized potentials. Ann. Polon. Math. 6 (1959), 265—268.

Manuskripteingang: 06. 08. 1982; in revidierter Fassung: 01. 06. 1983

VERFASSER

Dr. SIEGFRIED KIRSCH
DDR-4020 Halle, Wilhelm-Pieck-Ring 81