Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (2) 1984, S. 111–118

Eine Verallgemeinerung der Lambert-Transformation I[1])

H.-J. GLAESKE und K. STALLKNECHT

In dieser Arbeit wird eine verallgemeinerte Lambert-Transformation untersucht, die alle bisher bekannten Lambert-Reihen und speziellen Lambert-Transformationen als Spezialfall enthält. Es wird ein Konvergenzsatz bewiesen und durch geeignete Wahl des Kerns der Transformation werden die Resultate auf bekannte Fälle spezialisiert.

В данной работе исследуется обобщенное преобразование Ламберта, которое включает все пока известные ряды Ламберта и специальные преобразования Ламберта. Доказана одна теорема сходимости и с помощью соответствуюшего выбора ядра преобразования результаты перенесены на уже известные случаи.

In this paper a generalized Lambert-transformation is investigated, which includes all the well known Lambert-series and Lambert-transformations as special cases. We prove a convergence theorem and by suitable choice of the kernel of the transformation the results are specialized to the well known cases.

1.

In der Theorie der uneingeschränkten Zerfällungen natürlicher Zahlen in Potenzen natürlicher Zahlen spielen Lambertsche Reihen und Verallgemeinerungen derselben eine besondere Rolle (s. etwa [3, 4]). Stetige Analoge dieser Reihen sind Integraltransformationen, die von WIDDER [11] und GOLDBERG [5] untersucht wurden. In dieser Arbeit soll eine Integraltransformation eingeführt werden, die im wesentlichen die bisher bekannten Transformationen und Reihen enthält, nämlich

$$\Lambda_k[a](z) = \int_0^\infty k(e^{-zt})\, da(t) \tag{1.1}$$

mit einem geeigneten Kern k und Originalfunktionen a aus einem gewissen Grundraum. Im Abschnitt 2 werden Konvergenzeigenschaften des Integrals (1.1) untersucht. Es wird gezeigt, daß das Konvergenzverhalten von (1.1) wesentlich mit dem Konvergenzverhalten der Laplace-Stieltjes-Transformation

$$\Lambda[a](z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, da(t) \tag{1.2}$$

zusammenhängt. In Abschnitt 3 wird die Bildfunktion (1.1) mittels eines anderen absolut konvergenten Integrals dargestellt. Die Abschnitte 4 und 5 dienen der Einordnung der bisher bekannten Lambert-Reihen bzw. -Transformationen in unser Konzept.

[1]) Der abschließende Teil II dieses Beitrages wird im nächsten Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

Bezeichnungen. Im folgenden sei ε eine beliebige positive Zahl, $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen, $\mathbf{R}$ der Körper der reellen, $\mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Weiterhin sei A_E der Raum der im Einheitskreis holomorphen Funktionen und $\log^k z$ sei Abkürzung für $(\log z)^k$.

2.

Als Kern k der Transformation wählen wir eine beliebige (aber feste) Funktion aus einem Raum $\tilde{A}_E$.

Definition 2.1. $\tilde{A}_E$ sei die Menge der Funktionen $k \in A_E$, die im Nullpunkt eine Nullstelle 1. Ordnung besitzen und für die es ein $\varrho > 1$ gibt, so daß in $1 \leqq |z| < \varrho$ höchstens endlich viele Singularitäten z_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ von $k(z)$ liegen. Bei beliebiger Annäherung an eine solche Singularität $z \to z_j$ gelte die Abschätzung

$$k(z) = O[(z - z_j)^{-p_j} \log^{q_j} (z - z_j)], \qquad p_j, q_j \in \mathbf{C}, \quad \operatorname{Re}(q_j) \geqq 0. \tag{2.1}$$

Bemerkung. Für diesen ersten Teil der Arbeit wird nur verwendet, daß speziell im Punkte $z_0 = 1$ ein solches Verhalten (2.1) vorliegt. Die allgemeine Forderung spielt erst im Teil II eine Rolle bei der Herleitung einer Umkehrformel. In Abhängigkeit von den Eigenschaften des Kernes k müssen an die Originalfunktionen unterschiedliche Forderungen gestellt werden. Hierzu führen wir die folgende Menge von $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$-Funktionen ein.

Definition 2.2. $V_{p,q}^c[0, \infty)$ sei die Menge aller in $[0, \infty)$ rechtsseitig stetigen Funktionen a, die im Nullpunkt verschwinden, in jedem Intervall $[0, R]$ $(R > 0)$ von beschränkter Variation sind und für die

$$\int_0^1 |a(t)|\, t^{-\operatorname{Re}(p)-1}\, |\log t|^{\operatorname{Re}(q)}\, dt < \infty \tag{2.2}$$

ist.

Bemerkungen: 1. Die in der Definition 2.2 auftretenden Zahlen p und q stimmen im folgenden mit den Zahlen p_0 und q_0 überein, die im Sinne von (2.1) das Verhalten von $k(z)$ für $z \to z_0 = 1$ beschreiben. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden diese Zahlen im weiteren ohne Index geschrieben.

2. Im Falle $\operatorname{Re}(p) < 0$ ist die Integralbedingung (2.2) automatisch erfüllt.

Definition 2.3. Als verallgemeinerte Lambert-Transformierte von $a \in V_{p,q}^c[0, \infty)$ bezeichnen wir

$$A_k[a](z) = A_k(z) = \int_0^\infty k(\mathrm{e}^{-zt})\, da(t), \tag{2.3}$$

falls das Integral konvergiert.

Bemerkung. Als Spezialfall ergibt sich für $k(z) = z$ die Laplace-Stieltjes-Transformation (s. [10: S. 35ff.]), für die wir kürzer schreiben

$$A[a](z) = A(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}\, da(t). \tag{2.4}$$

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens von (2.3) beweisen wir vorerst zwei Hilfssätze. Dabei betrachten wir als mögliche Urbilder nur Funktionen $a(t)$ aus dem Raum $V_{p,q}^c[0, \infty)$.

Hilfssatz 2.1. *Konvergiert das Integral* $\int_0^1 k(e^{-zt})\, da(t)$ *für ein* $z = z_0$ *mit* $\operatorname{Re}(z_0) > 0$, *so konvergiert das Integral für alle* z *mit* $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Beweis. Für $\operatorname{Re}(p) < 0$ oder $\operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}(q) = 0$ ist die Konvergenz des Integrals in der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ wegen $k \in A_E$ offensichtlich.

Falls k im Punkte 1 nicht beschränkt ist, verfährt man wie folgt:

Mittels partieller Integration erhält man sofort

$$\int_\varepsilon^1 k(e^{-zt})\, da(t) = k(e^{-z})\, a(1) - k(e^{-\varepsilon z})\, a(\varepsilon) + z \int_\varepsilon^1 k'(e^{-zt})\, a(t)\, e^{-zt}\, dt. \tag{2.5}$$

Aus dem für $k(z)$ in Definition 2.1 geforderten Verhalten leitet man für k' im Punkte 1 die Abschätzung $k'(z) = O[(z-1)^{-p-1} \log^q (z-1)]$ her (siehe [12: S. 25]; das dort angegebene Verfahren läßt sich leicht auf endliche Punkte $z \to z_0$ übertragen). Folglich gilt

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^1 |k'(e^{-zt})\, e^{-zt}\, a(t)|\, dt \\
&\leqq M \int_\varepsilon^1 \frac{|a(t)|\, |\log (e^{-zt} - 1)|^{\operatorname{Re}(q)}}{|e^{-zt} - 1|^{\operatorname{Re}(p)+1}}\, dt \\
&= M \int_\varepsilon^1 \frac{t^{\operatorname{Re}(p)+1}\, |\log (e^{-zt} - 1)|^{\operatorname{Re}(q)}}{|e^{-zt} - 1|^{\operatorname{Re}(p)+1}\, |\log t|^{\operatorname{Re}(q)}} \cdot \frac{|a(t)|\, |\log t|^{\operatorname{Re}(q)}}{t^{\operatorname{Re}(p)+1}}\, dt \\
&\leqq M \cdot M_1(z) \int_0^1 |a(t)|\, t^{-\operatorname{Re}(p)-1}\, |\log t|^{\operatorname{Re}(q)}\, dt,
\end{aligned}$$

wobei

$$M_1(z) = \max_{t \in [0,1]} \{t^{\operatorname{Re}(p)+1}\, |e^{-zt} - 1|^{-\operatorname{Re}(p)-1}\, |\log e^{-zt} - 1)|^{\operatorname{Re}(q)}\, |\log t|^{-\operatorname{Re}(q)}$$

ist und das Integral konvergiert, da $a \in V_{p,q}^c[0, \infty)$. Damit konvergiert das letzte Integral in (2.5) für $\varepsilon \to +0$. Weiterhin gilt für alle z mit $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} k(e^{-\varepsilon z})\, a(\varepsilon) = 0.$$

Dies ergibt sich sofort, da nach Voraussetzung

$$k(e^{-zt}) = O(t^{-p} \log^q t) \quad \text{für} \quad t \to +0, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \tag{2.6}$$

gilt und die Integralbedingung in (2.2) bedeutet, daß

$$\int_0^\varepsilon \frac{|a(t)|\, |\log t|^{\operatorname{Re}(q)+1}}{t^{\operatorname{Re}(p)}}\, \frac{dt}{t\, |\log t|} < \infty$$

ist. Folglich kann das Verhalten von $a(t)$ durch

$$a(t) = o(t^p \log^{-q-1} t) \quad \text{für} \quad t \to +0 \tag{2.7}$$

abgeschätzt werden. Dann gilt:

$$\lim_{t \to +0} a(t)\, k(e^{-zt}) = 0, \qquad \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{2.8}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen ∎

Hilfssatz 2.2: *Für* Re $(z) > 0$ *konvergiert* $\int\limits_1^\infty k(e^{-zt})\, da(t)$ *genau dann, wenn das Laplace-Stieltjes-Integral* (2.4) *konvergiert.*

Beweis: Der Beweis gelingt durch die Übertragung eines Beweises von WIDDER [11: S. 174/175] für den Spezialfall $k(z) = z/(1-z)$, $z \in R$, die keine Schwierigkeiten bereitet.

a) Das Integral (2.4) sei für ein festes z mit Re $(z) > 0$ konvergent. Bezeichnet man mit $b(t)$ die Funktion $b(t) = \int\limits_1^t e^{-z\tau}\, da(\tau)$, so erhält man die Gleichung

$$\int\limits_1^\infty k(e^{-zt})\, da(t) = \int\limits_1^\infty k(e^{-zt})\, e^{zt}\, db(t)$$
$$= k'(0)\, b(\infty) + z \cdot \int\limits_1^\infty e^{zt}\big(k'(e^{-zt})\, e^{-zt} - k(e^{-zt})\big)\, b(t)\, dt.$$

Man sieht nun leicht, daß sich der Integrand des letzten Integrals durch $M\, e^{-zt}$ abschätzen läßt. Somit konvergiert auch das Integral auf der linken Seite der Gleichung.

b) Wir nehmen nun an, daß das Integral $\int\limits_1^\infty k(e^{-zt})\, da(t)$ konvergiert und bezeichnen mit $h(t)$ die Funktion

$$h(t) = \int\limits_{t_0}^t k(e^{-z\tau})\, da(\tau).$$

Um die Konvergenz von (2.4) zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß das Integral $\int\limits_{t_0}^\infty e^{-zt}\, da(t)$ konvergiert. Die Zahl t_0 wählt man so, daß in $|v| < e^{-t_0 \operatorname{Re}(z)}$ außer $v = 0$ keine weiteren Nullstellen von $k(v)$ liegen. Man erhält

$$\int\limits_{t_0}^\infty e^{-zt}\, da(t) = \int\limits_{t_0}^\infty \frac{e^{-zt}}{k(e^{-zt})}\, dh(t)$$
$$= \frac{h(\infty)}{k'(0)} + z \int\limits_{t_0}^\infty \frac{k(e^{-zt}) - e^{-zt}k'(e^{-zt})}{k^2(e^{-zt})}\, e^{-zt} h(t)\, dt.$$

Der Integrand des letzten Integrals kann nun wieder durch $M\, e^{-zt}$ abgeschätzt werden, woraus die Konvergenz des linken Integrals und damit die Konvergenz von (2.5) folgt ∎

Die Hilfssätze 2.1 und 2.2 können zu einem Konvergenzsatz für die Transformation (2.3) zusammengefaßt werden, wobei man noch verwendet, daß das Integral (2.4) für Re $(z) >$ Re (z_0) konvergiert, falls es für z_0, Re $(z_0) > 0$, konvergent ist (vgl. [10: S. 37]).

Satz 2.1. *Existiert die verallgemeinerte Lambert-Transformierte* $A_k(z_0)$, Re $(z_0) > 0$, *so existiert* $A_k(z)$ *auch für alle* z *mit* Re $(z) >$ Re (z_0).

3.

Jetzt soll eine Darstellung der Transformation (2.3) durch ein konvergentes Lebesgue-Integral hergeleitet werden. Zur Vorbereitung notieren wir den

Hilfssatz 3.1. *Das Integral* $\int_1^\infty k(e^{-zt})\, da(t)$ *konvergiere für ein* z_0 *mit* $\operatorname{Re}(z_0) > 0$. *Dann ist*

$$a(t) = o(e^{z_0 t}) \quad \text{für} \quad t \to +\infty. \tag{3.1}$$

Mit Hilfssatz 2.2 kann diese Aussage sofort auf den entsprechenden Satz für die Laplace-Stieltjes-Transformation zurückgeführt werden (s. [10: S. 39]).

Jetzt formulieren wir

Satz 3.1. *Es sei (2.3) konvergent für* $z = z_0$, $\operatorname{Re}(z_0) > 0$. *Dann kann die verallgemeinerte Lambert-Transformierte* A_k *von* a *durch das absolut konvergente Integral*

$$A_k(z) = z \int_0^\infty k'(e^{-zt})\, a(t)\, e^{-zt}\, dt, \qquad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0), \tag{3.2}$$

dargestellt werden.

Beweis. Die absolute Konvergenz von $\int_0^1 k'(e^{-zt})\, a(t)\, e^{-zt}\, dt$ wurde schon im Hilfssatz 2.1 gezeigt. Für das Restintegral gilt

$$\int_1^\infty |e^{-zt} k'(e^{-zt})\, a(t)|\, dt = \int_1^\infty |e^{-(z-z_0)t}|\, |k'(e^{-zt})\, a(t)\, e^{-z_0 t}|\, dt.$$

Der Term $|k'(e^{-zt})\, a(t)\, e^{-z_0 t}|$ kann nach Hilfssatz 3.1 und wegen der Voraussetzungen an k, die $k'(e^{-zt}) = O(1)$ für $t \to +\infty$ sichern, durch eine Konstante abgeschätzt werden. Damit folgt die Konvergenz des rechts stehenden Integrals für $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$. Weiterhin erhält man durch partielle Integration für $0 < \varepsilon < R < \infty$ die Gleichung

$$\int_\varepsilon^R k(e^{-zt})\, da(t) = k(e^{-zR})\, a(R) - k(e^{-\varepsilon z})\, a(\varepsilon) + z \int_\varepsilon^R k'(e^{-zt})\, e^{-zt} a(t)\, dt. \tag{*}$$

Da k im Nullpunkt holomorph ist und dort eine Nullstelle erster Ordnung hat, gilt $k(e^{-zR}) = O(e^{-zR})$ für $R \to +\infty$. Hiermit und mit Hilfssatz 3.1 und (2.8) ergibt sich, daß die beiden ersten Summanden auf der rechten Seite von (*) für $R \to \infty$ bzw. $\varepsilon \to +0$ verschwinden, und das liefert (3.2) ∎

4.

Wir betrachten jetzt einige Spezialisierungen des Kernes k, die Anlaß zu früher untersuchten Transformationen geben.

In [11] untersuchte Widder die Transformation

$$A_{k_1}[b](z) = \int_0^\infty \frac{t}{e^{zt} - 1}\, db(t). \tag{4.1}$$

Diese ergibt sich aus (2.3) mit dem Kern $k_1(z) = \frac{z}{1-z}$ und $a(t) = \int\limits_0^t u\,db(u)$. Falls $b \in V^c_{1,0}[0, \infty)$ ist, so gilt dasselbe auch für a (s. [1: S. 64, Hilfssatz 4]). Da sich der Kern $\frac{t}{e^{zt}-1}$ stetig nach $t = 0$ fortsetzen läßt, erhält man aus dem Hilfssatz 2.2 sofort den

Satz 4.1. *Falls* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *ist, so konvergiert das Integral* (4.1) *genau dann, wenn das Laplace-Integral* $\int\limits_0^\infty e^{-zt}t\,db(t)$ *konvergiert.*

Bemerkungen. 1. WIDDER beweist in [11: S. 174/75] weiterhin, daß das Integral (4.1) für $\mathrm{Re}(z) < 0$ genau dann konvergiert, wenn $\int\limits_0^\infty t\,db(t)$ (das ist das Laplace-Integral im obigen Satz für $z = 0$) konvergiert.

2. Die Transformation (4.1) bezeichnet man gewöhnlich als die Lambert-Transformation.

In Verallgemeinerung von (4.1) betrachtete GOLDBERG in [5] verallgemeinerte Lambert-Transformationen der Gestalt (2.3), bei denen aber k und a $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$-Funktionen sind und der Kern k für $x > 0$ die Entwicklung

$$k(e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

mit $a_n \geqq 0$, $a_1 > 0$ und $a_n = O(n^{r-1})$ für $n \to +\infty$ $(r \geqq 0)$ besitzt.

Mit $z = e^{-x}$ kann man sich durch Abschätzung der Taylorkoeffizienten von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ davon überzeugen, daß dieser Spezialfall sich im Falle $r \in \mathbf{N}$ z. B. durch eine Funktion $k(z)$ realisieren läßt, die auf der Einheitskreislinie Pole besitzt, deren Ordnung nicht größer als r ist (vgl. [9: Satz 1.4, S. 14]).

5.

Die Darstellung (2.3) der verallgemeinerten Lambert-Transformation als Stieltjes-Integral erlaubt es auch die Lambertschen Reihen und deren Verallgemeinerungen in die Betrachtungen einzubeziehen. Die Originalfunktionen sind dann Folgen $\{a_n\}$ komplexer Zahlen, die Bilder wieder Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

In [8] betrachtete SEDGEWICK Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n k(z^n), \qquad a_n, z \in \mathbf{C}, \tag{5.1}$$

wo k eine meromorphe Funktion mit $k(0) = 0$, $k'(0) \neq 0$ ist. Falls man sich auf Funktionen $k \in \tilde{A}_E$ beschränkt, so ordnet sich auch die Konvergenzuntersuchung dieser Reihen den Betrachtungen in Abschnitt 2 unter. Man erhält diese Reihen aus (2.3), wenn man als Originalfunktionen nur Funktionen der Gestalt

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ \sum\limits_{n=1}^{[t]} a_n & \text{für } t \geqq 1 \end{cases}$$

zuläßt und e^{-z} durch z ersetzt. Die Laplace-Stieltjes-Transformation (2.4) geht dann bekanntlich in die gewöhnliche Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{5.2}$$

über. Mit Hilfssatz 2.2 erhält man sofort den

Satz 5.1. *Für $|z| < 1$ konvergiert* (5.1) *genau dann, wenn* (5.2) *konvergent ist.*

Bemerkung: Dieser Satz bleibt auch richtig, wenn k im Einheitskreis Singularitäten besitzt, falls man nur die Konvergenz von (5.1) so interpretiert, daß es ein $n_0(z)$ gibt, so daß $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n k(z^n)$ konvergiert (s. [9: S. 63]).

Für $k(z) = \dfrac{z}{1-z}$ erhält man die von Knopp in [7] untersuchten Lambert-Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n}. \tag{5.3}$$

Der Satz 5.1 bleibt erhalten, wobei man nur (5.1) durch (5.3) zu ersetzen hat.

Auch hier gibt es spezielle Aussagen (vgl. [9: S. 71]), nämlich die, daß (5.3) für alle z mit $|z| \neq 1$ konvergiert, falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, und daß im Falle der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenzgebiete von (5.3) und (5.2) übereinstimmen.

Die Transformation (2.3) enthält als Spezialfall auch die von Kennedy in [6] untersuchten *R-Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{-\lambda_n z}}{1 - e^{-b\lambda_n z}}, \tag{5.4}$$

wobei $b > 0$ und $\{\lambda_n\}$ eine eigentlich monotone Folge positiver Zahlen mit dem Limes $+\infty$ ist. Als Kernfunktion hat man hier $k(z) = \dfrac{z}{1-z^b}$ zu wählen, und als Originalfunktionen sind stückweise konstante Funktionen zugelassen, die in den Punkten $z = \lambda_n$ $(n \in \mathrm{N})$ Sprungstellen mit den Sprunghöhen a_n besitzen. Hierbei geht die Laplace-Stieltjes-Transformation (2.4) in die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \tag{5.5}$$

über. Der Hilfssatz 2.2 liefert dann sofort den

Satz 5.2. *Für* Re $(z) > 0$ *konvergiert die R-Reihe* (5.4) *genau dann, wenn die Dirichletsche Reihe* (5.5) *konvergiert.*

Mit dem Ansatz $\mu_n = (b-1)\lambda_n$ kann Satz 5.2 auch in eine Konvergenzaussage für Re $(z) < 0$ umgeformt werden, falls $b > 1$ ist.

Folgerung 5.1. *Im Fall $b > 1$ und* Re $(z) < 0$ *konvergiert die R-Reihe* (5.4) *genau dann, wenn die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{(b-1)\lambda_n z}$ *konvergiert.*

Bemerkungen. 1. Diese Folgerung bleibt auch für $0 < b \leqq 1$ richtig (s. [9: S. 76ff.]).

2. Die R-Reihen (5.4) enthalten auch die Garvinschen Verallgemeinerungen Lambertscher Reihen (s. [2])

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^{\nu n}}{1 - z^{\mu n}}, \qquad \nu, \mu \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Man hat nur e^{-z} durch z zu ersetzen und $\lambda_n = \nu n$, $b = \mu/\nu$ zu wählen.

6.

In dieser Arbeit wurden Konvergenzuntersuchungen für eine verallgemeinerte Lambert-Transformation durchgeführt. Es ergab sich, daß die von uns untersuchte Transformation nicht nur alle bekannten Verallgemeinerungen der Lambert-Transformation, sondern auch alle bekannten Verallgemeinerungen Lambertscher Reihen als Spezialfälle enthält. In einem zweiten Teil soll die Frage nach Umkehrformeln näher untersucht werden.

LITERATUR

[1] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Band 1. Birkhäuser Verlag: Basel und Stuttgart 1950.

[2] GARVIN, M. C.: A generalized Lambert series. Amer. J. Math. 58 (1936), 507–513.

[3] GLAESKE, H.-J.: Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebenen Halbgitters. J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 253–266.

[4] GLAESKE, H.-J.: Eine einheitliche Herleitung einer gewissen Klasse von Transformationsformeln der analytischen Zahlentheorie I, II. Acta Arith. **XX** (1972), 133–145. 255–267.

[5] GOLDBERG, R. R.: Inversions of generalized Lambert transforms. Duke Math. J. **25** (1958), 459–476.

[6] KENNEDY, E. S.: Exponential analogues of the Lambert series. Amer. J. Math. **63** (1941), 443–460.

[7] KNOPP, K.: Über Lambertsche Reihen. J. Reine Angew. Math. **142** (1913), 283–315.

[8] SEDGEWICK, C. H. W.: Generalized Lambert Series. Tohoku Math. J. **43** (1937), 314–325.

[9] STALLKNECHT, K.: Eine allgemeine Lambert-Transformation. Diplomarbeit. Jena 1979.

[10] WIDDER, D. V.: The Laplace transform. Princeton Univ. Press: Princeton N.Y. 1946.

[11] WIDDER, D. V.: An inversion of the Lambert-transform. Duke Math. J. **27** (1950), 171 bis 182.

[12] РИЕКСТЫНЬШ, Э. Я.: Асимптотические разложения интегралов, Том I. Изд-во Зинатне: Рига 1974.

Manuskripteingang: 11. 06. 1982; in revidierter Fassung: 18. 03. 1983

VERFASSER:

Prof. Dr. H.-J. GLAESKE und Dipl.-Math. K. STALLKNECHT
Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena
6900 Jena, Universitätshochhaus — 17. OG