Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (2) (1984), S. 179–191

Asymptotische Abschätzung der Inversen Toeplitzscher Bandmatrizen im Grenzfall

L. Berg

Für die Elemente der Inversen Toeplitzscher Bandmatrizen werden im Grenzfall mehrfacher Nullstellen des Stabilitätspolynoms O-Abschätzungen hergeleitet, wenn die Ordnung der Matrizen gegen Unendlich strebt.

Выводятся O-оценки элементов обратной матрицы ленточных матриц типа тёплица в граничном случае кратных корней многочлена устойчивости, если порядок матриц стремится к бесконечности.

For the elements of the inverses of Toeplitz band matrices there are constructed O-estimations in the limit case of multiple zeros of the stability polynomial, if the order of the matrices tends to infinity.

1. Einleitung

Das asymptotische Verhalten der Inversen einer Toeplitzschen Bandmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \dots a_p & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ a_{-1} & a_0 & & \ddots & a_p \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_{-q} & & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & a_0 & a_1 \\ \mathbf{0} & a_{-q} & \dots & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

der Ordnung N für $N \to \infty$ mit $a_p a_{-q} \neq 0$ und $p, q \geqq 1$ ist wesentlich durch die Nullstellen des Stabilitätspolynoms

$$a_p \lambda^{p+q} + \cdots + a_0 \lambda^q + \cdots + a_{-q} = 0 \tag{1}$$

bestimmt. Im Fall einfacher Nullstellen, die sich noch dazu in q betragsmäßig kleinere und p betragsmäßig größere trennen lassen, wurden in [1] für die Inversen A^{-1} asymptotische Abschätzungen angegeben und zum Existenznachweis holomorpher Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen mit Hilfe der Majorantenmethode verwendet. Mit dem Grenzfall, wo sich die Nullstellen nicht mehr in der angegebenen Weise trennen lassen, befaßt sich die Arbeit [2], allerdings nur im Spezialfall $p = q = 1$.

Im folgenden soll der allgemeine Grenzfall behandelt werden, wobei auch mehrfache Nullstellen zugelassen sind. Die entsprechende Anwendung zur Lösung partieller Differentialgleichungen wird an anderer Stelle vorgenommen [4], wo auch der Fall mehrfacher getrennter Nullstellen behandelt wird. Die Abschätzungen können auch benutzt werden, um wie bei A. Pomp [8] Abschätzungen für Normen der Inversen zu erhalten. Besonders bequem sind die Abschätzungen für die Zeilensummennorm ausführbar, die wegen der Persymmetrie Toeplitzscher Matrizen und damit auch ihrer Inversen im vorliegenden Fall gleich der Spaltensummennorm ist.

2. Vorbereitungen

Als Hilfsmittel verwenden wir für die Inverse $A^{-1} = (d_{nm})$ von $A = (a_{m-n})$, $n, m = 1, \ldots, N$, im Fall $d_{11} \neq 0$ die *Darstellungsformel* von I. Z. GOCHBERG und A. A. SEMENZUL [5] sowie implizit von W. F. Trench [9]

$$A^{-1} = \frac{1}{x_1}\begin{bmatrix} x_1 & & & \mathbf{0} \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_N & \ldots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ & y_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_2 \\ \mathbf{0} & & & y_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{x_1}\begin{bmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ y_N & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_2 & \cdots & y_N & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_N & \ldots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_N \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}$$

mit $x_n = d_{n1}$, $y_n = d_{1n}$ und somit $x_1 = y_1$, die sich auch in der Form

$$d_{nm} = \frac{1}{x_1} \sum_{i=1}^{n \wedge m} x_{n+1-i} y_{m+1-i} - \frac{1}{x_1} \sum_{i=2}^{n \wedge m} y_{N-n+i} x_{N-m+i} \tag{2}$$

mit $n \wedge m = \operatorname{Min}(n, m)$ schreiben läßt. In derselben Arbeit [5] wird außerdem die zu A gehörende Hauptabschnittsmatrix $\tilde{A} = (a_{m-n})$ von $(N-1)$-ter Ordnung betrachtet und für die Elemente der Inversen $\tilde{A}^{-1} = (b_{nm})$ die Formel

$$b_{nm} = \frac{1}{x_1} \sum_{i=1}^{n \wedge m} x_{n+1-i} y_{m+1-i} - \frac{1}{x_1} \sum_{i=1}^{n \wedge m} y_{N-n+i} x_{N-m+i} \tag{3}$$

mit denselben x_n und y_n wie zuvor aufgestellt. Beide Formeln werden auch in dem Buch I. S. IOHVIDOV [6] unabhängig voneinander auf sechs Seiten durch direkte Rechnungen bewiesen. Sie lassen sich aber wesentlich kürzer gemeinsam beweisen, wenn man beachtet, daß der Zusammenhang zwischen (2) und (3)

$$d_{nm} = b_{nm} + \frac{1}{x_1} y_{N-n+1} x_{N-m+1}$$

unmittelbar aus der Methode des Ränderns (vgl. etwa [7]) hervorgeht, woraus insbesondere

$$\tilde{x}_n = x_n - \frac{x_N}{x_1} y_{N-n+1}, \qquad \tilde{y}_n = y_n - \frac{y_N}{y_1} x_{N-n+1}$$

mit $\tilde{x}_n = b_{n1}$, $\tilde{y}_n = b_{1n}$ folgt. Mit diesen Gleichungen gelangt man jetzt von (2) mit $N-1$ an Stelle von N nach kurzer Rechnung zu (3), so daß sich beide Formeln durch vollständige Induktion beweisen lassen, sofern die Elemente $d_{11} = x_1$ auch für die kleineren Werte von N nicht verschwinden. Von der letzten Zusatzvoraussetzung kann man sich aber abschließend durch einen geeigneten Grenzübergang befreien.

Um noch eine andere *Darstellungsformel* für die Elemente d_{nm} von A^{-1} anzugeben, präzisieren wir die vorhergehenden Bezeichnungen zu $x_n^{(N)} = d_{n1}$, $y_n^{(N)} = d_{1n}$. Sind alle $x_1^{(i)} \neq 0$ für $1 \leq i \leq N$, so gilt nach [3]

$$d_{nm} = \sum_{i=n \vee m}^{N} \frac{x^{(i)}_{i-m+1} y^{(i)}_{i-n+1}}{x_1^{(i)}} \tag{4}$$

mit $n \vee m = \mathrm{Max}\,(n, m)$, wobei diese Darstellungsformel ebenfalls eine Folgerung aus der bereits erwähnten Methode des Ränderns ist und die Persymmetrie der Toeplitzschen Matrizen und damit auch ihrer Inversen $d_{n1} = d_{N,N-n+1}$, $d_{1n} = d_{N-n+1,N}$ ausgenutzt wurde.

Weiterhin benötigen wir im folgenden mehrfach zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1: *Die $r + 1$ Polynome in n*

$$(N + n)^{l_0}, (N + n)^{l_1}, \ldots, (N + n)^{l_r} \tag{5}$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen $l_0 < l_1 < \cdots < l_r$ lassen sich durch Hinzufügung von Linearkombinationen der jeweils vorhergehenden Polynome in Polynome überführen, deren Glieder mit der höchsten Potenz von N

$$N^{l_0}, \alpha_1 n N^{l_1 - 1}, \ldots, \alpha_r n^r N^{l_r - r}$$

mit nicht verschwindenden Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ lauten.

Beweis: Zieht man von den auf $(N + n)^{l_0}$ in (5) folgenden Polynomen jeweils $(N + n)^{l_0} N^{l_i - l_0}$ ab, so lauten die Glieder mit den höchsten Potenzen von N der verbleibenden Polynome

$$N^{l_0}, (l_1 - l_0)\, n N^{l_1 - 1}, \ldots, (l_r - l_0)\, n N^{l_r - 1},$$

so daß wir bereits $\alpha_1 = l_1 - l_0 > 0$ gefunden haben. Jetzt ziehen wir von den auf $(l_1 - l_0)\, n N^{l_1 - 1}$ folgenden Polynomen jeweils ein passendes Vielfaches dieses Polynoms ab, so daß wir

$$N^{l_0}, \alpha_1 n N^{l_1 - 1}, \alpha_2 n^2 N^{l_2 - 2}, \beta_3 n^2 N^{l_3 - 2}, \ldots, \beta_r n^2 N^{l_r - 2}$$

erhalten usw. Dieser Prozeß läßt sich so lange fortsetzen, wie die entstehenden Koeffizienten $\alpha_i \neq 0$ sind. Angenommen, es wäre $\alpha_m = 0$ mit $m \leqq r$. Dann müßte nach Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf die Polynome (5) die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \binom{l_0}{1} & \binom{l_1}{1} & \ldots & \binom{l_m}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{l_0}{m} & \binom{l_1}{m} & \ldots & \binom{l_m}{m} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Diese ist aber nach Multiplikation der n-ten Zeile mit $(n - 1)!$ für $n = 1, \ldots, m + 1$ und Addition geeigneter Linearkombinationen der ersten Zeilen zu den jeweils nachfolgenden Zeilen die aus $l_0, \ldots, l_m$ gebildete Vandermondesche Determinante. Da diese von Null verschieden ist, haben wir einen Widerspruch ∎

Hilfssatz 2: *Gegeben seien $t \geqq 1$ natürliche Zahlen $k_1, \ldots, k_t$ mit*

$$k_1 \leqq k_2 \leqq \cdots \leqq k_t, \tag{6}$$

und es sei $K_i = k_1 + \cdots + k_i$ für $0 \leqq i \leqq t$. Ferner sei τ eine ganze Zahl mit $0 \leqq \tau < t$ und l eine natürliche Zahl mit $l < K_t$. Für eine Zahl $\varepsilon \in \{1, -1\}$ setzen wir

$$u = \frac{1}{t - \tau}\left(l - \frac{1}{2}\,(K_t + \varepsilon K_\tau)\right), \tag{7}$$

und es sei

$$k_\tau - 1 \leqq 2u\varepsilon < k_{\tau+1} + 1 \tag{8}$$

mit $k_0 = -k_1$. *Schließlich setzen wir für* $i = 1, \ldots, t$

$$u_i = \left[\frac{1}{2}(k_i + 1) + u\right], \tag{9}$$

wobei über die Summe der Reste

$$\sum_{i=\tau+1}^{t} \left(\frac{1}{2} k_i + u - u_i\right) = 0 \tag{10}$$

vorausgesetzt wird. Dann nimmt die quadratische Form

$$Q = \sum_{i=1}^{t} (k_i - \beta_i)\, \beta_i \tag{11}$$

mit t ganzzahligen Veränderlichen β_i *unter den Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} &0 \leqq \beta_i \leqq k_i \text{ für } 1 \leqq i \leqq t \text{ und} \\ &\beta_1 + \cdots + \beta_t = l \end{aligned} \tag{12}$$

für

$$\left.\begin{aligned} &\beta_i = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\, k_i \quad \text{im Fall } i \leqq \tau, \\ &\beta_i = u_i \text{ im Fall } i > \tau \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ein strenges Maximum an.

Beweis: Wegen (9) gilt für die Reste

$$\delta_i = \frac{1}{2} k_i + u - u_i \tag{14}$$

die Ungleichung $-\frac{1}{2} \leqq \delta_i < \frac{1}{2}$. Für $i > \tau$ kann jedoch der Fall $\delta_i = -\frac{1}{2}$ nicht vorkommen, da sonst $\delta_i \leqq 0$ für alle $i > \tau$ wäre und die Voraussetzung (10) nicht erfüllt sein könnte. Für $i > \tau$ ergibt sich daher im Fall $\varepsilon = 1$ wegen (8) und (9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(k_i + k_\tau) - 1 \leqq \frac{1}{2}(k_i - 1) + u < u_i &< \frac{1}{2}(k_i + 1) + u, \\ &< \frac{1}{2}(k_i + k_{\tau+1}) + 1 \end{aligned}$$

und im Fall $\varepsilon = -1$

$$\frac{1}{2}(k_i - k_{\tau+1}) - 1 < u_i < \frac{1}{2}(k_i - k_\tau) + 1,$$

so daß wegen (6) in beiden Fällen $0 \leqq u_i \leqq k_i$ folgt. Wegen (13) ist daher die Nebenbedingung $0 \leqq \beta_i \leqq k_i$ für alle i erfüllt. Weiterhin erhalten wir aus (10) und (13)

$$\sum_{i=1}^{t} \beta_i = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\, K_\tau + \frac{1}{2}(K_t - K_\tau) + u(t - \tau),$$

so daß (12) wegen (7) ebenfalls erfüllt ist. Wegen (12) und (14) läßt sich die quadratische Form (11) folgendermaßen schreiben:

$$Q = \sum_{i=1}^{t} (u_i + \delta_i)^2 - 2ul - \sum_{i=1}^{t} (\beta_i - u_i - \delta_i)^2. \tag{15}$$

Für $i \leqq \tau$ folgt aus den vorhergehenden Abschätzungen für u_i wegen (6) im Fall $\varepsilon = 1$, daß $k_i \leqq u_i$ ist, und im Fall $\varepsilon = -1$, daß $u_i \leqq 0$ ist. Somit wird (15) für ganzzahlige β_i mit $0 \leqq \beta_i \leqq k_i$ für (13) maximal. Da (15) bei jeder anderen zulässigen Wahl der β_i streng kleiner wird, ist Hilfssatz 2 bewiesen ∎

Zusatz: *Ist die Voraussetzung* (10) *nicht erfüllt, sind es aber die übrigen Voraussetzungen von Hilfssatz* 2 *und gilt* $0 < u_i < k_i$ *für* $i > \tau$, *so wird das Maximum von* (11) *an mehreren Stellen angenommen.*

Beweis: Die Reste (14) können nur zwei verschiedene Werte annehmen. Ist $\delta_i = \delta$ für gerade k_i, so ist $\delta_i = \delta - \frac{1}{2} \operatorname{sign} \delta$ für ungerade k_i mit $\operatorname{sign} 0 = 1$. Unter den Zahlen $k_{\tau+1}, \ldots, k_t$ möge es b ungerade Zahlen geben. Aus (7) und (14) ergibt sich, daß die Summe

$$s = \sum_{i=\tau+1}^{t} \delta_i = \delta(t - \tau) - \frac{b}{2} \operatorname{sign} \delta$$

stets eine ganze Zahl ist. Es sei jetzt $b > 2\,|\delta|\,(t - \tau)$. Dann ist $|s| \leqq \frac{b}{2}$, und wir setzen bei $|s|$ Werten von i mit $0 < u_i < k_i$ und ungeraden k_i an Stelle von (12) jetzt

$$\beta_i = u_i + \operatorname{sign} s.$$

Der Wert $\beta_i - u_i - \delta_i = \operatorname{sign} s - \delta_i$ in (15) bleibt dann wegen $\operatorname{sign} s = -\operatorname{sign} \delta = \operatorname{sign} \delta_i$ kleiner oder gleich Eins. Lassen wir die übrigen Werte β_i wie in (13), so erhalten wir für Q wieder einen Maximalwert. Wegen $s \neq 0$ und $2\,|s| \leqq b$ ist $b \geqq 2$, so daß es mindestens zwei Möglichkeiten für die Wahl der $|s|$ Werte i und damit für die Lage der Maximalstellen gibt.

Es bleibt noch der Fall $2\,|\delta|\,(t - \tau) > b$ zu behandeln. Dann ist $|s| \leqq |\delta|\,(t - \tau) - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(t - \tau - b)$, wobei $t - \tau - b$ die Anzahl der geraden Zahlen von $k_{\tau+1}, \ldots, k_t$ ist. Somit lassen sich die vorhergehenden Argumente wiederholen, wobei lediglich ungerade durch gerade zu ersetzen ist, da in (15) dann $\beta_i - u_i - \delta_i = \operatorname{sign} s - \delta_i$ wegen $\operatorname{sign} s = \operatorname{sign} \delta = \operatorname{sign} \delta_i$ kleiner als Eins ist. Damit ist der Zusatz bewiesen. ∎

Bemerkungen: 1⁰. Zur Lösung (13) gelangt man, indem man das Maximum der quadratischen Zielfunktion (11) unter den angegebenen Nebenbedingungen zunächst mit Hilfe des Satzes von KUHN—TUCKER für reelle Variable ermittelt und diese anschließend durch ganzzahlige Werte approximiert.

2⁰. Bei der Anwendung von Hilfssatz 2 beginne man mit $\tau = 0$, setze $\varepsilon = \operatorname{sign} u$ und überprüfe, ob (8) erfüllt ist. Andernfalls berechne man aus (8) ein neues τ und iteriere diesen Vorgang.

3⁰. Sind alle k_i gerade und ist $l = \frac{1}{2} K_t$, so sind (7) und (8) mit $u = \tau = 0$ erfüllt, und es gilt $\beta_i = u_i = \frac{1}{2} k_i$ für alle i.

4⁰. Sind alle $k_i = k$ von i unabhängig und größer als 1 und ist $l = mt$ mit einer natürlichen Zahl $m < k$, so sind (7) und (8) für $\tau = 0$ erfüllt, und es gilt $u = m - \frac{k}{2}$ sowie $\beta_i = u_i = m$ für alle i.

5⁰. Ist $\tau = t - 1$, so läßt sich (7) in der Form $u = l - \frac{1}{2}\left(k_t + (1 + \varepsilon)\,K_\tau\right)$ schreiben, und es gilt $u_t = l - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\,K_\tau$.

6⁰. In den drei letzten Fällen sind stets alle $\delta_i = 0$ mit $i > \tau$, so daß (10) dann wegen (14) ebenfalls erfüllt ist.

7⁰. Die Bedingung (8) kann für mehrere Werte von τ erfüllt sein, diese seien τ und $\tau + 1$. Wegen der Eindeutigkeit der β_i in (13) muß dann $u_{\tau+1} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\,k_{\tau+1}$

sein. In diesem Fall folgt unter Beachtung der aus (7) und (14) hervorgehenden Gleichung

$$\sum_{i=\tau+1}^{t} \delta_i = l - \frac{1}{2}(1+\varepsilon) K_\tau - \sum_{i=\tau+1}^{t} u_i ,$$

daß sich die linke Seite von (10) bei Ersetzung von τ durch $\tau + 1$ nicht ändert.

Beispiele für $t = 2$ und $\tau = 0$ sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen:

			$l = 1$					$l = 2$				
k_1	k_2	K_t	u	u_1	u_2	δ_1	δ_1	u	u_1	u_2	δ_1	δ_2
2	2	4	$-\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	0
2	4	6	-1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	2	3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	3	5	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	3	4	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3	3	6	-1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0

Vier Beispiele mit $t = 2$ und $\tau = 1$ lauten:

			$l = 1$				$l = 7$			
k_1	k_2	K_t	u	u_1	u_2	δ_2	u	u_1	u_2	δ_2
2	6	8	-2	-1	1	0	2	3	5	0
1	7	8	$-\frac{5}{2}$	-2	1	0	$\frac{5}{2}$	3	6	0

3. Abschätzung der Randelemente

Im folgenden bezeichnen wir die voneinander verschiedenen Nullstellen von (1) mit $\lambda_{-r}, \ldots, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ und die zugehörigen Vielfachheiten mit $k_{-r}, \ldots, k_s$, so daß $k_{-r} + \cdots + k_s = p + q$ gilt. Dabei sollen die Nullstellen folgendermaßen geordnet sein:

$$|\lambda_{-r}| \leqq \cdots \leqq |\lambda_0| < |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_t| < |\lambda_{t+1}| \leqq \cdots \leqq |\lambda_s| . \tag{16}$$

Wir setzen stets $t \geqq 1$ voraus, lassen aber die Grenzfälle $r = -1$ und $s = t$ zu, in denen die ersten bzw. letzten Nullstellen wegfallen. Weiterhin setzen wir voraus, daß sich die Nullstellen nicht in q betragsmäßig kleinere und p betragsmäßig größere trennen lassen. Dann gibt es eine natürliche Zahl $l < K_t = k_1 + \cdots + k_t$ mit

$$p = l + k_{t+1} + \cdots + k_s. \tag{17}$$

Wir kommen jetzt zur asymptotischen Abschätzung der Elemente $x_n = d_{n1}$ der ersten Spalte von A^{-1}, die wir in Anlehnung an [1] durchführen. Bekanntlich lassen sie sich als Lösung des Randwertproblems

$$a_p x_{n+p} + \cdots + a_0 x_n + \cdots + a_{-q} x_{n-q} = 0, \tag{18a}$$

$$x_{1-q} = -\frac{1}{a_{-q}},\; x_{2-q} = \cdots = x_{-1} = x_0 = x_{N+1} = \cdots = x_{N+p} = 0 \tag{18b}$$

auffassen. Damit sind sie eine Linearkombination

$$x_n = \sum_{j=1}^{p+q} c_j x_n^{(j)} \tag{19}$$

der linear unabhängigen Lösungen $x_n^{(j)} = n^{\varkappa_j} \lambda_{\mu_j}^n$ von (18a) mit $\varkappa_j < k_{\mu_j}$.

Satz 1: *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 bezüglich der Vielfachheiten der Nullstellen von* (1) *mit* (16) *und* (17) *existiert die Lösung* (19) *des Randwertproblems* (18) *für hinreichend große N, und der Anteil*

$$x_n' = \sum c_j x_n^{(j)} \tag{20}$$

von x_n, wobei über die q Werte j mit $\mu_j \leqq t$ und $\varkappa_j < k_i - \beta_i$ mit (13) *im Fall $\mu_j = i \geqq 1$ zu summieren ist, konvergiert bei festem n für $N \to \infty$ gegen*

$$v_n = \sum b_j x_n^{(j)}, \tag{21}$$

wobei über dieselben j zu summieren ist. Die v_n genügen den Randbedingungen

$$v_{1-q} = -\frac{1}{a_{-q}},\; v_{2-q} = \cdots = v_{-1} = v_0 = 0. \tag{22}$$

Beweis: Setzt man den Ansatz (19) in (18b) ein, so entsteht ein Gleichungssystem zur Bestimmung der c_j mit der Systemdeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{1-q}^{(1)} & x_{1-q}^{(2)} & \cdots & x_{1-q}^{(p+q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \cdots & x_0^{(p+q)} \\ x_{N+1}^{(1)} & x_{N+1}^{(2)} & \cdots & x_{N+1}^{(p+q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N+p}^{(1)} & x_{N+p}^{(2)} & \cdots & x_{N+p}^{(p+q)} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Um später den Laplaceschen Entwicklungssatz anwenden zu können, betrachten wir zunächst die Unterdeterminanten p-ter Ordnung, die aus den p letzten Zeilen von Δ gebildet werden können, und suchen unter diesen diejenige mit der größten asymptotischen Ordnung für $N \to \infty$. Zu diesem Zweck betrachten wir diejenige dieser Unterdeterminanten, wir bezeichnen sie mit Δ_0, die alle Spalten $x_{N+m}^{(j)} = (N+m)^{\varkappa_j} \lambda_{\mu_j}^{N+m}$, $m = 1, \ldots, p$, mit $\mu_j > t$ enthält sowie bei vorgegebenen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ mit

$\beta_1 + \cdots + \beta_t = l$ im Fall $\mu_j = i$ mit $1 \leqq i \leqq t$ die β_i Spalten mit den größten Potenzen von N

$$(N+m)^{k_i-\beta_i}\lambda_i^{N+m}, \ldots, (N+m)^{k_i-1}\lambda_i^{N+m}.$$

Auf Grund von Hilfssatz 1 liefern diese β_i Spalten nach Bildung geeigneter Linearkombinationen zum asymptotischen Verhalten von Δ_0 den Beitrag

$$N^{(k_i-\beta_i)\beta_i}\lambda_i^{N\beta_i}$$

und die Spalten $x_{N+m}^{(j)}$ mit festem $\mu_j > t$ den Beitrag $\lambda_{\mu_j}^{Nk_j}$. Hieraus ergibt sich für $N \to \infty$

$$\Delta_0 \sim C V_p N^Q (\lambda_1^{\beta_1} \ldots \lambda_t^{\beta_t} \lambda_{t+1}^{k_{t+1}} \ldots \lambda_s^{k_s})^N \tag{24}$$

mit (11), wobei C eine nicht verschwindende Konstante und V_p eine verallgemeinerte Vandermondesche Determinante ist, die ebenfalls nicht verschwindet. Auf Grund von Hilfssatz 2 ist Q maximal, wenn für die β_i die Werte (13) gewählt werden. Wegen (24), (16),

$$|\lambda_1^{\beta_1} \ldots \lambda_t^{\beta_t}| = |\lambda_1|^l$$

und Hilfssatz 2 besitzt jede andere der zuvor betrachteten Unterdeterminanten für $N \to \infty$ eine kleinere Ordnung als Δ_0. Denken wir uns jetzt die $x_n^{(i)}$ so numeriert, daß die Unterdeterminante Δ_0 gerade aus den letzten p Zeilen und Spalten besteht, so ist nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\Delta \sim \Delta_0 \begin{vmatrix} x_{1-q}^{(1)} & \cdots & x_{1-q}^{(q)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^{(1)} & \cdots & x_0^{(q)} \end{vmatrix}, \tag{25}$$

wobei die hier auftretende Unterdeterminante ebenfalls bis auf einen nicht verschwindenden Faktor eine verallgemeinerte Vandermondesche Determinante und damit von Null verschieden ist. Für hinreichend große N ist damit $\Delta \neq 0$ und somit die Existenz der x_n bewiesen. Da die Unterdeterminante in (25) gleichzeitig die Systemdeterminante bei der Bestimmung der b_j in (21) aus den Randbedingungen (22) ist, kann schließlich unter Anwendung der Cramerschen Regel auf die Konvergenz der c_j in x_n' gegen die b_j und damit auf die Konvergenz von x_n' gegen v_n für $N \to \infty$ geschlossen werden ∎

Satz 2: *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 *gilt für den Anteil*

$$x_n'' = \sum_{\mu_j \leq t} c_j x_n^{(j)} \tag{26}$$

der Lösung x_n von (18) *für $N \to \infty$ die asymptotische Abschätzung*

$$x_n'' = O(n^{k_t-\beta_t-1}\lambda_1^n) \tag{27}$$

gleichmäßig für $1 \leqq n \leqq N$, wobei β_t in (13) *festgelegt wurde. Bei festem n gilt außerdem $x_n'' \to v_n$ mit* (21) *für $N \to \infty$.*

Beweis: Aus (14) folgt $k_i - u_i = \frac{1}{2} k_i - u + \delta_i$, so daß $k_i - u_i$ in i monoton wachsend ist. Wegen $k_\tau - \beta_\tau \leqq k_\tau - u_\tau$ für $\beta_\tau = 0$ und $k_\tau - \beta_\tau \leqq k_{\tau+1} - \beta_{\tau+1}$ für $\beta_\tau = k_\tau$ ist auch $k_i - \beta_i$ monoton wachsend, so daß $k_t - \beta_t = \mathrm{Max}\,(k_i - \beta_i)$ ist. Aus Satz 1 ist daher ersichtlich, daß die Abschätzung (27) für v_n und damit auch für den Anteil x_n' von x_n'' gilt.

Zur Abschätzung des restlichen Anteils schreiben wir x_n'' in der Form

$$x_n'' = x_n' + \sum_{i=1}^{t} \sum_{\sigma=1}^{\beta_i} b_{i\sigma} n^{k_i-\beta_i+\sigma-1} \lambda_i^n \tag{28}$$

mit (13). Die $b_{i\sigma}$ sind spezielle c_j und daher durch dasselbe Gleichungssystem wie zuvor mit der Systemdeterminante (23) bestimmt. Berechnen wir die $b_{i\sigma}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel, so ist die Spalte mit den Elementen $n^{k_i-\beta_i+\sigma-1}\lambda_i^n$ zu streichen. Durch diese Streichung verliert die Unterdeterminante Δ_0 aus dem Beweis von Satz 1 bis auf die Potenzen von λ_i, die später wieder ausgeglichen werden, einerseits die Potenz $N^{k_i-\beta_i}$, andererseits kommt unter Beachtung von Hilfssatz 1 der Faktor $N^{\beta_i-\sigma}$ hinzu, so daß sich die Ordnung zunächst um $N^{-k_i+2\beta_i-\sigma}$ ändert. Bei Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes wird die gestrichene Spalte maximal durch eine Spalte mit den Elementen $n^{k_j-\beta_j-1}\lambda_j^n$ mit $\beta_j < k_j$ ersetzt. Dadurch kommt jetzt zur Ordnung der Unterdeterminante einerseits der Faktor $N^{k_j-\beta_j-1}$ hinzu und andererseits verliert sie nach erneuter Anwendung von Hilfssatz 1 im Fall $i \neq j$ den Faktor N^{β_j} bzw. im Fall $i = j$ den Faktor N^{β_j-1}, so daß sich die Ordnung insgesamt um

$$N^{-k_i+2\beta_i-\sigma+k_j-2\beta_j-1} \quad \text{bzw.} \quad N^{-\sigma}$$

ändert. Wegen (13) und (14) gilt

$$-k_i + 2\beta_i + k_j - 2\beta_j = \begin{cases} 2u - 2\delta_i + k_j & \text{für} \quad \beta_i < k_i,\ \beta_j = 0, \\ 2\delta_j - 2\delta_i & \text{für} \quad \beta_i < k_i,\ \beta_j > 0, \\ k_i - 2u + 2\delta_j & \text{für} \quad \beta_i = k_i,\ \beta_j > 0. \end{cases}$$

Die übrigen Fälle brauchen wir nicht zu betrachten, da es im Fall $\beta_i = 0$ in (28) keinen zugehörigen Summanden gibt und der Fall $\beta_i = k_i$, $\beta_j = 0$, wie wir bereits wissen, nicht vorkommen kann. Wegen (8) kann $k_j \leqq -2u$ für $\beta_j = 0$ und $k_i \leqq 2u$ für $\beta_i = k_i$ angenommen werden, so daß wegen $2\,|\delta_i|$, $2\,|\delta_j|$, $2\,|\delta_j - \delta_i| \leqq 1$ in jedem Fall

$$b_{i\sigma} = O(N^{-\sigma})$$

gilt. Somit folgt aus (28) wegen $\sigma \geqq 1$ und Satz 1 einerseits die Behauptung $x_n'' \to v_n$ und andererseits wegen $b_{i\sigma} n^\sigma = O(1)$ auch die Behauptung (27) ∎

Satz 3: *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt für den Rest $x_n - x_n''$ mit (19) und (28)*

$$x_n - x_n'' = O\big(N^{\gamma-1}(N - n + 1)^{k_+-1}\, \lambda_1^N \lambda_{t+1}^{n-N}\big) \tag{29}$$

für $1 \leqq n \leqq N$ mit $\gamma = \operatorname{Max}_{\tau<j\leqq t} (k_j - 2\beta_j)$ und $k_+ = \operatorname{Max} k_\mu$ für $|\lambda_\mu| = |\lambda_{t+1}|$. Bei festem n gilt außerdem $x_n \to v_n$ mit (21) für $N \to \infty$.

Beweis: In Abänderung von (19) schreiben wir jetzt x_n in der Form

$$x_n = x_n'' + \sum_{\mu_j > t} b_j x_{n-N}^{(j)}.$$

Die Unterdeterminante Δ_0 aus dem Beweis von Satz 1 hat dann an Stelle von (24) ein asymptotisches Verhalten der Form

$$\Delta_0 \sim C V_p N^Q (\lambda_1^{\beta_1} \ldots \lambda_t^{\beta_t})^N,$$

wobei C und V_p eine analoge Bedeutung wie zuvor haben und Q nach wie vor durch (11) mit (13) festgelegt ist. Wie zuvor sei weiterhin $x_m^{(j)} = m^\varkappa \lambda_\mu^m$ mit $\mu = \mu_j$ und $\varkappa = \varkappa_j < k_\mu$ sowie $m = n - N$. Bei der Berechnung von b_j nach der Cramerschen

Regel wird dann die Spalte mit den Elementen $m^{\varkappa}\lambda_\mu^m$ gestrichen. Nach Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes tritt hierfür maximal eine Spalte mit den Elementen $n^{k_i-\beta_i-1}\lambda_i^n$ mit $\beta_i < k_i$ auf, so daß nach Hilfssatz 1 die Ordnung der Unterdeterminante sich um den Faktor $N^{k_i-2\beta_i-1}\lambda_i^N$ ändert. Wegen $|\lambda_1| = |\lambda_i|$ bedeutet dies $b_j = O(N^{\gamma-1}\lambda_1^N)$, so daß die Richtigkeit der Behauptung (29) unmittelbar ersichtlich ist.

Schließlich erkennt man aus (29) bei festem n für $N \to \infty$, daß $x_n - x_n'' \to 0$ konvergiert, so daß nach Satz 2 auch die letzte Behauptung $x_n \to v_n$ bewiesen ist ∎

Es sei noch erwähnt, daß aus (13) und (14) die Gleichung $k_j - 2\beta_j = 2\delta_j - 2u$ folgt, also $k_j - 2\beta_j$ höchstens zwei verschiedene Werte annehmen kann und $\gamma - 1 < -2u$ gilt.

Beispiel: Wählen wir für (1) das Polynom $(x-a)(x+1)(x-1)^2$ mit $|a| \neq 1$, so besitzt die Differenzengleichung (18a) das Fundamentalsystem

$$a^n,\ (-1)^n,\ 1,\ n.$$

Wegen $t = 2$, $k_1 = 1$ und $k_2 = 2$ sind die Voraussetzungen von Satz 1 bis Satz 3 auf Grund der vorhergehenden Tabelle sowohl für $l = 1$ als auch für $l = 2$ erfüllt. Wir wählen $p = q = 2$ und betrachten zunächst den Fall $|a| > 1$. In (16) ist dann $r = -1$, $s = 3$, und in (17) ist $k_3 = 1$, $l = 1$, so daß die Determinante (23) für gerade N

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & a^{-1} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & N+1 & a^{N+1} \\ 1 & 1 & N+2 & a^{N+2} \end{vmatrix} = 2(N+2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & a^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a^{N+1} \\ 1 & 0 & 1 & a^{N+2} \end{vmatrix}$$

$$= 2(N+2)\left(a^{N+2} + a^{N+1} - 1 - \frac{1}{a}\right)$$

lautet. Nach Vertauschung einiger Spalten ist dies auch die Determinante (23) im Fall $|a| < 1$ mit $r = 0$, $s = 2$ und $k_0 = 1$, $l = 2$. Wegen $a^{N+3} + a^{N+2} - a - 1 = (a^{N+2} - 1)(a+1)$ verschwindet sie für keinen Wert von N, während Satz 1 dieses Nichtverschwinden lediglich für hinreichend große N liefert. Die Richtigkeit von (25) mit (24) läßt sich jetzt unmittelbar überprüfen, da der Maximalwert von

$$Q = (1-\beta_1)\beta_1 + (2-\beta_2)\beta_2 = l - l^2 + (2l+1)\beta_2 - 2\beta_2^2$$

für ganzzahlige β_i in den beiden Fällen $l = 1$ und $l = 2$ für $\beta_2 = 1$ angenommen wird und gleich 1 ist.

4. Abschätzung der inneren Elemente

Wir kommen jetzt zu den Hauptergebnissen, wobei zunächst mit Hilfe von (2) eine schwächere und danach mit Hilfe von (4) eine schärfere asymptotische Abschätzung bewiesen werden soll. Das abschließende Beispiel deutet an, daß eine noch weitere Verschärfung denkbar ist.

Satz 4: *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 bezüglich der Vielfachheiten der Nullstellen von* (1) *mit* (16) *und* (17) *existiert für hinreichend große N die Inverse $A^{-1} = (d_{nm})$ der Toeplitzschen Matrix $A = (a_{m-n})$ der Ordnung N mit $a_i = 0$ für*

$i > p$ sowie für $i < -q$, und ihre Elemente besitzen für $N \to \infty$ die asymptotische Abschätzung

$$d_{nm} = O(N^{k_t-1}\lambda_1^{n-m}) \tag{30}$$

gleichmäßig für $1 \leqq n, m \leqq N$.

Beweis: Wegen $|\lambda_1| < |\lambda_{t+1}|$ gilt

$$(N-n+1)^{k_t-1}\lambda_1^N\lambda_{t+1}^{n-N} = O(\lambda_1^n),$$

so daß wir wegen $k_j - 2\beta_j \leqq k_j - \beta_j \leqq k_t - \beta_t$ die Aussagen (27) und (29) zu

$$x_n = O(N^{k_t-\beta_t-1}\lambda_1^n) \tag{31}$$

abschwächen können. Die Lösungen des Randwertproblems (18) sind, wie wir wissen, die Elemente $x_n = d_{n1}$. Die Elemente $y_n = d_{1n}$ sind die Lösungen des adjungierten Randwertproblems, bei dem die Nullstellen λ_μ durch die reziproken Werte zu ersetzen sind und l durch $K_t - l$. Zunächst soll gezeigt werden, daß unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 diese auch sinngemäß für das adjungierte Problem erfüllt bleiben mit

$$u^* = -u, \qquad \varepsilon^* = -\varepsilon, \qquad \tau^* = \tau, \qquad \beta_i^* = k_i - \beta_i,$$

wenn die entsprechenden Größen des adjungierten Problems durch einen Stern gekennzeichnet werden. Aus (7) folgt nämlich durch Einsetzen von $l = K_t - l^*$, $\tau = \tau^*$, $\varepsilon = -\varepsilon^*$

$$u = \frac{-1}{t-\tau^*}\left(l - \frac{1}{2}\,(K_t + \varepsilon^* K_{\tau^*})\right),$$

so daß $u^* = -u$ abgelesen werden kann und die Voraussetzung (8) auch für die Werte mit einem Stern erhalten bleibt. Aus (9) folgt jetzt wegen $|\delta_i| < \frac{1}{2}$

$$u_i^* = \left[\frac{1}{2}\,(k_i+1) - u\right] = k_i - u_i$$

und hieraus wegen (13) die Behauptung $\beta_i^* = k_i - \beta_i$. Aus (14) folgt schließlich $\delta_i^* = -\delta_i$, so daß auch die Voraussetzung (10) für das adjungierte Problem erhalten bleibt.

Folglich können wir von (31) zu

$$y_n = O(N^{\beta_t-1}\lambda_1^{-n}) \tag{32}$$

übergehen. Da für $N \to \infty$ nach Satz 3 insbesondere $x_1 \to v_1$ gilt, v_1 aber wegen der Randbedingungen (22) nicht verschwindet, kann auch x_1 für hinreichend große N nicht verschwinden. Somit ist für diese N die Folge x_1^{-1} beschränkt und nach (2) die Existenz von A^{-1} gesichert. Durch Anwendung von (2), (31) und (32) gelangen wir jetzt unmittelbar zu

$$d_{nm} = O\big((n \wedge m)\, N^{k_t-2}\lambda_1^{n-m}\big),$$

womit sogar eine leichte Verschärfung der Behauptung (30) bewiesen wurde ∎

Satz 5: *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 besitzen die Elemente der Inversen $A^{-1} = (d_{nm})$ der Toeplitzschen Matrix A für $N \to \infty$ die asymptotische Abschätzung*

$$d_{nm} = O\big((n \wedge m)\, n^{k_t-\beta_t-1} m^{\beta_t-1}\lambda_1^{n-m}\big) \tag{33}$$

gleichmäßig für $1 \leqq n, m \leqq N$.

Beweis: Wegen $|\lambda_1| < |\lambda_{t+1}|$ und $\gamma \leqq k_t - \beta_t$ gilt

$$N^{\gamma-1}(N - n + 1)^{k_t-1} \lambda_1{}^N \lambda_{t+1}^{n-N} = O(n^{k_t-\beta_t-1}\lambda_1{}^n),$$

wie man sofort erkennt, wenn man die Fälle $1 \leqq n \leqq \frac{N}{2}$ und $\frac{N}{2} \leqq n \leqq N$ getrennt betrachtet. Wegen Satz 2 und Satz 3 folgt hieraus

$$x_n = O(n^{k_t-\beta_t-1}\lambda_1{}^n), \qquad y_n = O(n^{\beta_t-1}\lambda_1{}^{-n}), \tag{34}$$

wobei sich die zweite Aussage wie beim Beweis von Satz 4 durch Übergang zum adjungierten Problem ergibt. Ebenfalls wie beim vorhergehenden Beweis ist die Folge der x_1^{-1} für hinreichend große N beschränkt. Ist x_1^{-1} für alle N beschränkt, so finden wir durch Anwendung der Darstellungsformel (4)

$$\begin{aligned} d_{nm} &= O\left(\sum_{i=n\vee m}^{N} (i - m + 1)^{k_t-\beta_t-1} (i - n + 1)^{\beta_t-1} \lambda_1{}^{n-m}\right) \\ &= O\big((N - m + 1)^{k_t-\beta_t-1} (N - n + 1)^{\beta_t-1} (N - n \vee m + 1) \lambda_1^{n-m}\big), \end{aligned}$$

und wegen der Persymmetrie der Elemente $d_{nm} = d_{N-m+1, N-1+n}$ folgt hieraus unmittelbar die Behauptung (33).

Ist die Beschränktheit von x_1^{-1} nur für $N \geqq N_0$ vorhanden, so kann auch die Formel (4) nur für $n \vee m > N_0$ verwendet werden. Für $n \vee m \leqq N_0$ läßt sie sich aber durch

$$d_{nm} = d_{nm}^{(N_0)} + \sum_{i=N_0+1}^{N} \frac{x_{i-m+1}^{(i)} y_{i-n+1}^{(i)}}{x_1{}^{(i)}}$$

ersetzen, wobei $d_{nm}^{(N_0)}$ die Elemente von A^{-1} im Fall $N = N_0$ bezeichnet. Wegen $N - N_0 < N - n \vee m + 1$ gelangen wir damit zu den gleichen Abschätzungen wie zuvor ∎

Beispiel: Hat das auf der linken Seite von (1) stehende charakteristische Polynom der Differenzengleichung (18a) die einfache Gestalt $(\lambda - 1)^{p+q}$, so läßt sich die Lösung des Randwertproblems (18) in geschlossener Form angeben:

$$x_n = (-1)^q \frac{n(n + 1) \ldots (n + q - 2) (N + 1 - n) \ldots (N + p - n)}{(q - 1)! (N + q) \ldots (N + p + q - 1)}.$$

Hieraus und durch Vertauschung von p und q ergibt sich

$$x_n = O\big(n^{q-1}(N + 1 - n)^p N^{-p}\big), \qquad y_n = O\big(n^{p-1}(N + 1 - n)^q N^{-q}\big). \tag{35}$$

Wegen $x_1 \neq 0$ für alle N erhalten wir unter Beachtung von (4)

$$\begin{aligned} d_{nm} &= O\left(\sum_{i=n\vee m}^{N} (i - m + 1)^{q-1} m^p i^{-p-q} (i - n + 1)^{p-1} n^q\right) \\ &= O\left(m^p n^q (N - m + 1)^{q-1} (N - n + 1)^{p-1} N^{2-p-q} \sum_{i=n\vee m}^{N} i^{-2}\right) \end{aligned}$$

und wegen

$$\sum_{i=n\vee m}^{N} i^{-2} = O\left(\frac{N + 1 - n \vee m}{N(n \vee m)}\right)$$

sowie $(n \vee m)(n \wedge m) = nm$ schließlich

$$\begin{aligned} d_{nm} = O\big(&(n \wedge m) m^{p-1} n^{q-1} (N + 1 - n \vee m) \\ &\times (N - m + 1)^{q-1} (N - n + 1)^{p-1} N^{1-p-q}\big). \end{aligned} \tag{36}$$

Vermutung: Es ist zu vermuten, daß unter den Voraussetzungen von Satz 4 an Stelle von (34) wie in (35) sogar

$$x_n = O\left(n^{k_t-\beta_t-1}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)^{\beta_t}\lambda_1^n\right),$$

$$y_n = O\left(n^{\beta_t-1}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)^{k_t-\beta_t}\lambda_1^{-n}\right)$$

gilt und damit an Stelle von (33) sogar die asymptotische Abschätzung (36) mit $p = \beta_t$ und $q = k_t - \beta_t$ multipliziert mit λ_1^{n-m}.

LITERATUR

[1] Berg, L.: Asymptotische Abschätzung inverser Matrizen mit einer Anwendung auf partielle Differentialgleichungen. ZAMM **60** (1980), 453–458.

[2] Berg, L.: Ein Grenzfall beim Goursatschen Anfangswertproblem. Rostock. Math. Kolloq. **16** (1981), 75–80.

[3] Berg, L.: Die Invertierung von Matrizen aus Binomialkoeffizienten. ZAMM **63** (1983), 639–642.

[4] Berg, L.: Lineare Gleichungssysteme mit Bandstruktur und ihr asymptotisches Verhalten. VEB DVW: Berlin (in Vorbereitung).

[5] Гохберг, И. Ц., и А. А. Семенцул: Об обращении конечных тёплицевых матриц и их континуальных аналогов. Мат. исследования **7** (1972), 201–223.

[6] Iohvidov, I. S.: Hankel and Toeplitz Matrices and Forms: Algebraic Theory (Übers. a. d. Russ.). Birkhäuser-Verlag: Boston–Basel–Stuttgart 1982.

[7] Faddejew, D. K., und W. N. Faddejewa: Numerische Methoden der linearen Algebra (Übers. a. d. Russ.). VEB DVW: Berlin 1978.

[8] Pomp, A.: Normabschätzungen für die Inversen von Toeplitz-Matrizen. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 175–187.

[9] Trench, W. F.: Inversion of Toeplitz band matrices. Math. Comp. **28** (1974), 1089–1095.

Manuskripteingang: 07. 10. 1983

VERFASSER:

Prof. Dr. Lothar Berg
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1