Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (2) 1984, S. 133 – 152

Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями II[1])

У. Ё. Райтум

Für das Steuerungsproblem der Koeffizienten einer elliptischen Differentialgleichung in Divergenzform mit nichtlinearen niedrigsten Gliedern werden notwendige Optimalitätsbedingungen hergeleitet. Es wird der Fall betrachtet, daß die Menge der zulässigen Steuerfunktionen nicht konvex ist, die höchsten Koeffizienten der Gleichung von den Steuerfunktionen abhängen und zusätzliche Einschränkungen durch Gleichungen oder Ungleichungen mit Funktionalen in Integralform vorhanden sind.

Для задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений дивергентного вида второго порядка с нелинейными младшими членами выводятся необходимые условия оптимальности. Рассматривается случай, когда множество допустимых управляющих функций не является выпуклым, старшие коэффициенты уравнения зависят от управляющих функций и присутствуют дополнительные ограничения в виде равенств и неравенств с интегральными функционалами.

This paper considers necessary conditions of optimality for systems governed by second elliptic differential equations in divergence form with nonlinear terms. The set of admissible controls is not assumed to be convex, control appears in all coefficients of operator and the case with integral constraints is considered.

4.

В первой части работы [1] было получено представление для главной части приращения решения уравнения состояния системы при игольчатых вариациях. В последующем при помощи результатов [1] будет дано представление для главной части приращения функционалов и выведены необходимые условия оптимальности.

Напомним постановку задачи и основные результаты из первой части работы.

В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ ($n \geqq 2$) с элементами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ задана ограниченная строго липшицева область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$, $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$, где Γ состоит из конечного числа компонент связности, которые являются открытыми множествами с границей, имеющей нулевую меру (по $(n-1)$-мерной мере Лебега на $\partial\Omega$). Заданы также ограниченные множества $Q_1 \subset \mathbf{R}^{n_1}$, $Q_2 \subset \mathbf{R}^{n_2}$, константа $r > n$ и функции

$$a_0 = a_0(x, u, z, y_1, \ldots, y_n), \qquad \varkappa = \varkappa(x', v, z),$$

$$a_{i0} = a_{i0}(x, u, z), \qquad a_{ij} = a_{ij}(x, u), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$F_k = F_k(x, u, z, y_1, \ldots, y_n), \qquad \Phi_k = \Phi_k(x', v, z),$$

$$k = 0, 1, \ldots, k_0, k_0 + 1, \ldots, k_0 + m_0, \qquad k_0 \geqq 0, \qquad m_0 \geqq 0,$$

определенные для $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $u \in \mathbf{R}^{n_1}$, $v \in \mathbf{R}^{n_2}$, $z \in \mathbf{R} \equiv R^1$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Вектор-функция $(a_{10}, \ldots, a_{n0})$ будет в дальнейшем обозначаться через a, т. е.

[1]) Часть I работы была опубликована в №. 2 (1984) этого журнала.

$a \equiv (a_{10}, \ldots, a_{n0})$. Множества Q_1 и Q_2 определяют множество Σ допустимых управлений $\sigma = (u, v)$, содержащее все те и только те пары измеримых на Ω и Γ соответственно вектор-функций $u = (u_1, \ldots, u_{n_1})$, $v = (v_1, \ldots, v_{n_2})$ таких, что для всех $x \in \Omega$ и $x' \in \Gamma$ $u(x) \in Q_1$ и $v(x') \in Q_2$. Множество Σ рассматривается в топологии, порожденной прямой суммой соответствующего числа пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$.

При помощи константы r определяются пространства

$$\mathsf{L}(r) \equiv L_{\frac{2r}{r-2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n} \times L_{\frac{2(r-1)}{r-2}}(\Gamma),$$

$$\mathsf{L}^*(r) \equiv L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n} \times L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma)$$

с элементами

$$g \equiv (g_0, g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}) \in \mathsf{L}(r), \qquad f \equiv (f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) \in \mathsf{L}^*(r)$$

и билинейной формой

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle \equiv \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} f_i g_i \, dx + \int_\Gamma f_{n+1} g_{n+1} \, d\Gamma,$$

соответствующей двойственности между $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$. Определяется также подпространство $\mathsf{W} \subset \mathsf{L}(r)$,

$$\mathsf{W} \equiv \{w \in \mathsf{L}(r) : w = (z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}, z),\ z \in W_2^1(\Omega), z|_{\Gamma_0} = 0\}$$

и оператор проектирования $\mathsf{P} : \mathsf{L}(r) \to \mathsf{W}$, который каждому элементу $g \in \mathsf{L}(r)$ сопоставляет элемент $w = \mathsf{P}g$, сообщающий минимум функционалу

$$\langle\langle w, w\rangle\rangle - 2\langle\langle f, w\rangle\rangle$$

по $w \in \mathsf{W}$. Сопряженный к P оператор P', действующий из $\mathsf{L}^*(r)$ в $\mathsf{L}^*(r)$, также является ограниченным линейным оператором проектирования и соотношение $\langle\langle f, \eta\rangle\rangle = 0 \quad \forall\, \eta \in \mathsf{W}$ эквивалентно соотношению $\mathsf{P}'f = 0$.

Функции a_0, a_{i0}, a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$ для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ определяют оператор $\mathsf{A}(\sigma) : \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$,

$$\mathsf{A}(\sigma)\, g \equiv \Big(a_0(x, u, g), \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x, u)\, g_j + a_{10}(x, u, g_0), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x, u)\, g_j + a_{n0}(x, u, g_0), \varkappa(x', v, g_{n+1})\Big). \tag{4.1}$$

При помощи функций F_k, Φ_k определяются функционалы

$$I_k : \Sigma \times \mathsf{L}(r) \to \mathbf{R}, \qquad k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0,$$
$$I_k(\sigma, g) \equiv \int_\Omega F_k(x, u, g)\, dx + \int_\Gamma \Phi_k(x', v, g_{n+1})\, d\Gamma. \tag{4.2}$$

В формулах (4.1) и (4.2) и в дальнейшем применяется введенная в первой части работы упрощенная запись зависимости функций от аргументов.

Рассматривается следующая задача.

Vs. at Задача 2

Задача 1: Минимизировать функционал $I_0(\sigma, w)$ по $\sigma \in \Sigma$, $w \in \mathsf{W}$ при ограничениях

$$I_k(\sigma, w) = \begin{cases} \leq 0, & k = 1, \ldots, k_0 \\ 0, & k = k_0 + 1, \ldots, k_0 + m_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

когда σ и w связаны соотношением

$$\langle\langle \mathsf{A}(\sigma)\, w, \eta\rangle\rangle = 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathsf{W} \tag{4.4}$$

или, что то же самое, уравнением

$$\mathsf{P}'\mathsf{A}(\sigma)\, w = 0. \tag{4.5}$$

В первой части работы уже было отмечено, что вариационное равенство (4.4) в ряде конкретных случаев соответствует определению обобщенного решения [2] краевых задач для эллиптического уравнения. Результаты работы [2] по свойствам обобщенных решений будут часто использованы в дальнейшем.

Предполагается выполнение следующих **условий А**:

А 1. Функции $a_0, a_{i0}, a_{ij}\ (i, j = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$, F_k, $\Phi_k\ (k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ удовлетворяют условию Каратеодори.

А 2. Матрицы $A(x, u) \equiv \big(a_{ij}(x, u)\big)\ (i, j = 1, \ldots, n)$ являются симметрическими и равномерно по $(x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}^{n_1}$ ограниченными и положительно определенными.

А 3. Существуют функции $h_1 \in L_2(\Omega)$, $h_2 \in L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega)$, $h_3 \in L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma)$ такие, что для всех $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $u \in \overline{\text{co}}\, Q_1$, $v \in \overline{\text{co}}\, Q_2$

$$|a_{i0}(x, u, 0)| \leqq h_1(x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$|a_0(x, u, 0, 0)| \leqq h_2(x), \qquad |\varkappa(x', v, 0)| \leqq h_3(x).$$

А 4. Функции $a_0, a_{i0}\ (i = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$ имеют первые частные производные по (z, y) и существуют константы $\mu_0 \geqq 0$, $\mu_1 \geqq 0$, $0 \leqq p, q < 1$ функции $h_4 \in L_r(\Omega)$, $h_5 \in L_{r-1}(\Gamma)$ и непрерывные монотонно возрастающие функции

$$\gamma_1 = \gamma_1(t), \qquad \gamma_2 = \gamma_2(t), \qquad t \in \mathbf{R}, \qquad \gamma_1(0) = 0, \qquad \gamma_2(0) = 0,$$

$$|\gamma_1(t)| \leqq \mu_1 \left(1 + |t|^{\frac{2(1-q)}{r-2}}\right), \qquad |\gamma_2(t)| \leqq \mu_1 \left(1 + |t|^{\frac{2(1-p)}{r}}\right), \qquad t \in \mathbf{R},$$

такие, что для всех $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, $u \in \overline{\text{co}}\, Q_1$, $v \in \overline{\text{co}}\, Q_2$, $z, z', z'' \in \mathbf{R}$, $y, y', y'' \in \mathbf{R}^n$ имеют место оценки $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_{i0}(x, u, z)\right| \leqq \mu_0 \left[h_4(x) + |z|^{\frac{2}{r-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_0(x, u, z, y)\right| \leqq \mu_0 \left[h_4(x) + |z|^{\frac{2}{r-2}} + |y|^{\frac{2}{r}}\right]^2,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} a_0(x, u, z, y)\right| \leqq \mu_0 \left[h_4(x) + |z|^{\frac{2}{r-2}} + |y|^{\frac{2}{r}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} \varkappa(x', v, z)\right| \leqq \mu_0 \left[h_5(x') + |z|^{\frac{2}{r-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_{i0}(x, u, z') - \frac{\partial}{\partial z} a_{i0}(x, u, z'')\right| \leqq \mu_0 \left[h_4(x) + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}}\right]^q \times \gamma_1(|z' - z''|),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_0(x, u, z', y') - \frac{\partial}{\partial z} a_0(x, u, z'', y'')\right| \leqq \mu_0\, [G_1]^{1+q}\, \gamma_1(|z' - z''|) + \mu_0 [G_1]^{1+p}\, \gamma_2(|y' - y''|),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} a_0(x, u, z', y') - \frac{\partial}{\partial y_i} a_0(x, u, z'', y'')\right| \leqq \mu_0[G_1]^q \gamma_1(|z' - z''|) + \mu_0[G_1]^p \gamma_2(|y' - y''|),$$

$$G_1 \equiv h_4(x) + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}} + |y'|^{\frac{2}{r}} + |y''|^{\frac{2}{r}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} \varkappa(x', v, z') - \frac{\partial}{\partial z} \varkappa(x', v, z'')\right| \leqq \mu_0 \left[h_5(x') + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}}\right]^q \gamma_1(|z' - z''|).$$

А 5. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любых $f \in \mathsf{L}^*(r)$ уравнение

$$\mathsf{P}'\mathsf{A}(\sigma)\, w = \mathsf{P}' f$$

однозначно разрешимо относительно $w \in \mathsf{W}$ и тем самым определяет неявную функцию $w = \mathsf{D}(\sigma) f$.

Кроме того, существуют определенные на $\mathbf{R}$ непрерывные монотонно возрастающие функции γ_3 и γ_4 такие, что для всех $\sigma \in \Sigma$, f, f^1, $f^2 \in \mathsf{L}^*(r)$

$$\|\mathsf{D}(\sigma) f\| \leqq \gamma_3(1 + \|\mathsf{P}' f\|),$$

$$\|\mathsf{D}(\sigma) f^1 - \mathsf{D}(\sigma) f^2\| \leqq \gamma_4(1 + \|\mathsf{P}' f^1\| + \|\mathsf{P}' f^2\|)\, \|\mathsf{P}'(f^1 - f^2)\|.$$

А 6. Функции F_k, Φ_k $(k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ имеют первые частные производные по (z, y) и существуют константа $\mu_2 \geqq 0$ и функции

$$h_6 \in L_1(\Omega), \quad h_7 \in L_1(\Gamma), \quad h_8 \in L_2(\Omega), \quad h_9 \in L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma), \quad h_{10} \in L_r(\Omega),$$
$$h_{11} \in L_{r-1}(\Gamma)$$

такие, что для всех

$$x \in \Omega, \quad x' \in \Gamma, \quad u \in \overline{\mathrm{co}}\, Q_1, \quad v \in \overline{\mathrm{co}}\, Q_2, \quad z, z', z'' \in \mathbf{R}, \quad y, y', y'' \in \mathbf{R}^n$$

имеют место оценки $(i = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$:

$$|F_k(x, u, 0, 0)| \leqq h_6(x), \qquad |\Phi_k(x', v, 0)| \leqq h_7(x'),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} F_k(x, u, z, y)\right| \leqq \mu_2 \left[h_8(x) + |z|^{\frac{r}{r-2}} + |y|\right]^{\frac{r+2}{r}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} F_k(x, u, z, y)\right| \leqq \mu_2 \left[h_8(x) + |z|^{\frac{r}{r-2}} + |y|\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} \Phi_k(x', v, z)\right| \leqq \mu_2 \left[h_9(x) + |z|^{\frac{r}{r-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} F_k(x, u, z', y') - \frac{\partial}{\partial z} F_k(x, u, z'', y'')\right| \leqq \mu_2[G_2]^2\, |z' - z''| + \mu_2[G_2]\, |y' - y''|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} F_k(x, u, z', y') - \frac{\partial}{\partial y_i} F_k(x, u, z'', y'')\right| \leqq \mu_2[G_2]\, |z' - z''| + \mu_2\, |y' - y''|,$$

$$G_2 \equiv h_{10}(x') + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}} + |y'|^{\frac{2}{r}} + |y''|^{\frac{2}{r}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\Phi_k(x', v, z') - \frac{\partial}{\partial z}\Phi_k(x', v, z'')\right| \leqq \mu_2\left[h_{11}(x') + |z'|^{\frac{2}{r-2}} + |z''|^{\frac{2}{r-2}}\right]|z' - z''|.$$

В дальнейшем будут применены также дополнительные условия.

А 7. Существует константа c, которая неотрицательна при $n \geqq 4$, такая, что для всех $x' \in \Gamma$, $v \in \overline{\text{co}}\, Q_2$, $z \in \mathbf{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\varkappa(x', v, z) \geqq c.$$

А 8. При $n \geqq 4$ функции a_{i0} $(i = 1, \ldots, n)$ являются аффинными по z.

В дальнейшем решение уравнения (4.5), соответствующее выбранному $\sigma \in \Sigma$, будет обозначаться через $w(\sigma)$.

Условия **А 1—А 6** обеспечивают, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ оператор $\mathsf{A}(\sigma)$ и функционалы $I_k(\sigma, \cdot)$ $(k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ имеют первую производную Фреше по $g \in \mathsf{L}(r)$. Эти производные, вычисленные на элементе $g \in \mathsf{L}(r)$, будут обозначаться через $L\mathsf{A}(\sigma, g)$ и $LI_k(\sigma, g)$ $(k = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ соответственно. В силу условия **А 5** для каждых $\sigma \in \Sigma$, $g \in \mathsf{L}(r)$ оператор

$$\mathsf{P}'L\mathsf{A}(\sigma, g)\colon \mathsf{W} \to \mathsf{L}^*(r)$$

является ограниченным и имеет ограниченный обратный оператор. То же самое свойство имеет оператор $\mathsf{P}'L^*\mathsf{A}(\sigma, g)$, где через $L^*\mathsf{A}(\sigma, g)$ обозначается сопряженный к $L\mathsf{A}(\sigma, g)$ оператор (согласно билинейной формы $\langle\langle\cdot, \cdot\rangle\rangle$.

Поскольку $r > n$ и область Ω является строго липши—цевой, то на основе результатов [2] нетрудно показать, что, если выполнены условия **А 1—А 5**, **А 7** и w является решением уравнения

$$\mathsf{P}'L^*\mathsf{A}(\sigma, g)\, w = \mathsf{P}'f,$$

$$f_0 \in L_{\frac{n}{2}+\varepsilon}(\Omega), \quad f_i \in L_{n+\varepsilon}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n, \quad f_{n+1} \in L_{n-1+\varepsilon}(\Gamma), \qquad \varepsilon > 0,$$

то элемент w имеет представление, согласно определению пространства W, при помощи функции $z \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\alpha > 0$.

Пусть теперь элементы $\sigma^0 = (u^0, v^0) \in \Sigma$, $w^0 \equiv w(\sigma^0)$ фиксированы и выбран набор $\mathfrak{B}$ параметров

$$\mathfrak{B} \equiv \{\sigma^0, \delta_0, x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m, C_1, \ldots, C_s,$$
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, u^1, \ldots, u^s, v^1, \ldots, v^m\}, \tag{4.6}$$

где $0 < \delta_0 \leqq 1$, попарно различные точки x^k и x'^k принадлежат Ω и Γ соответственно, постоянные матрицы C_k являются симметричными и положительно определенными, константы α_k положительны и u^k, v^k — точки множеств Q_1 и Q_2 соответственно. Переменные параметры ε и β выбираются из множеств $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 — достаточно малое положительное число, $\beta \in B(\delta_0)$, где

$$B(\delta_0) \equiv \left\{\beta \in \mathbf{R}^{s+m}\colon \delta_0 \leqq \beta_i \leqq \frac{1}{\delta_0} \quad (i = 1, \ldots, s + m)\right\}.$$

Семейство управлений $\{\sigma^\varepsilon(\beta)\} \subset \Sigma$ определяется следующим образом

$$\sigma^\varepsilon(\beta) = \left(u^\varepsilon(\beta), v^\varepsilon(\beta)\right),$$

$$u^\varepsilon(\beta)(x) \equiv \begin{cases} u^k, x \in E(k, \varepsilon, \beta), k = 1, \ldots, s, \\ u^0(x), x \bar{\in} \bigcup\limits_k E(k, \varepsilon, \beta), \end{cases}$$

$$v^\varepsilon(\beta)(x') \equiv \begin{cases} v^k, x' \in S(k, \varepsilon, \beta), k = 1, \ldots, m, \\ v^0(x'), x' \bar{\in} \bigcup\limits_k S(k, \varepsilon, \beta), \end{cases} \tag{4.7}$$

$$E(k, \varepsilon, \beta) \equiv \left\{x \in \mathbf{R}^n : \beta_k \langle C_k(x - x^k), x - x^k\rangle < \varepsilon^{\frac{2}{n}}\right\}, k = 1, \ldots, s,$$

$$S(k, \varepsilon, \beta) \equiv \left\{x' \in \Gamma : \beta_{s+k}\alpha_k |x' - x'^k| < \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}\right\}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

В первой части работы [1] было показано, что существуют множества $\Omega' \subset \Omega$, $\Gamma' \subset \Gamma$, полной меры в Ω и Γ соответственно такие, что, если попарно различные точки x^k и x'^k принадлежат множествам Ω' и Γ' соответственно, то разность $w\left(\sigma^\varepsilon(\beta)\right) - w^0$ имеет представление

$$w\left(\sigma^\varepsilon(\beta)\right) - w^0 = \sum_{k=1}^{s} \omega^k(\varepsilon, \beta) + \delta g, \tag{4.8}$$

где

$$\|\delta g\| = o\left(\sqrt{\varepsilon}\right), \sum_{k=1}^{s} \|\omega^k(\varepsilon, \beta)\| = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \tag{4.9}$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$, и

$$\omega^k(\varepsilon, \beta) = \omega^k\left(\frac{x - x^k}{\varepsilon^{1/n}} \sqrt{\beta_k}\right),$$

$$\omega_0{}^k = 0, \quad \omega^k_{n+1} = 0, \quad \omega^k(\varepsilon, \beta)(x) = \omega^k(0), \quad x \in E(k, \varepsilon, \beta), \tag{4.10}$$

$$|\omega^k(\varepsilon, \beta)(x)| \leqq c_1 \frac{\varepsilon}{|x - x^k|^n}, \qquad x \bar{\in} E(k, \varepsilon, \beta), \qquad k = 1, \ldots, s,$$

где константа c_1 не зависит от ε и β и

$$\omega^k \equiv \nabla z(A_1{}^k, A_2{}^k, C_k, b^k), \qquad k = 1, \ldots, s. \tag{4.11}$$

Здесь и в дальнейшем матрицы $A_1{}^k$, $A_2{}^k$, вектора b^k определяются согласно формулам (3.11) из [1], а зависимость функции z от $A_1{}^k$, $A_2{}^k$, C_k, b^k_i — согласно формулам (3.4)—(3.7) из [1].

5.

Для выбранных набора $\mathfrak{B}$ и $\beta \in B(\delta_0)$ для каждого функционала I_i определим величину

$$I_i'(\mathfrak{B}, \beta)$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{s} \beta_k{}^{-(n/2)} E'(k) \left[F_i\left(x^k, u^k, w^0(x^k) + \omega^k(0)\right) - F_i\left(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(0)\right)\right]$$
$$+ \sum_{k=1}^{s} \beta_k{}^{-(n/2)} \int\limits_{R^n} \left[F_i\left(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(x)\right) - F_i\left(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\right)\right.$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} F_i\bigl(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\bigr) \omega_j^k(x)\Bigr] dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} (\beta_{s+k}\alpha_k)^{1-n} S_{n-1}\bigl[\Phi_i\bigl(x'^k, v^k, w^0_{n+1}(x'^k)\bigr) - \Phi_i\bigl(x'^k, v^0(x'^k), w^0_{n+1}(x'^k)\bigr)\bigr]$$

$$- \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{-(n/2)} E'(k) \Bigl\{\bigl\langle\bigl(A(x^k, u^k) - A(x^k, u^0(x^k))\bigr)\bigl(w^0(x^k) + \omega^k(0)\bigr), \nabla\psi^i(x^k)\bigr\rangle$$

$$+ \bigl\langle a\bigl(x^k, u^k, w_0{}^0(x^k)\bigr) - a\bigl(x^k, u^0(x^k), w_0{}^0(x^k)\bigr), \nabla\psi^i(x^k)\bigr\rangle$$

$$+ \bigl[a_0\bigl(x^k, u^k, w^0(x^k) + \omega^k(0)\bigr) - a_0\bigl(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(0)\bigr)\bigr] \psi^i(x^k)\Bigr\}$$

$$- \sum_{k=1}^{m} (\beta_{s+k}\alpha_k)^{1-n} S_{n-1}\bigl[\varkappa\bigl(x'^k, v^k, w^0_{n+1}(x'^k)\bigr) - \varkappa\bigl(x'^k, v^0(x'^k), w^0_{n+1}(x'^k)\bigr)\bigr] \psi^i(x'^k)$$

$$- \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{-(n/2)} \int_{\mathbf{R}^n} \Bigl[a_0\bigl(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(x)\bigr) - a_0\bigl(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\bigr)$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} a_0\bigl(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\bigr) \omega_j^k(x)\Bigr] \psi^i(x^k)\, dx,$$

$$i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \tag{5.1}$$

где $w^0 = w(\sigma^0)$, $w^{*i} \equiv (\psi^i, \psi^i_{x_1}, \ldots, \psi^i_{x_n}, \psi^i) \in \mathsf{W}$ — решение вариационного равенства

$$\langle\langle w, L\mathsf{A}(\sigma, w^0)\eta\rangle\rangle - \langle\langle LI_i(\sigma^0, w^0), \eta\rangle\rangle = 0 \quad \forall\, \eta \in \mathsf{W},$$
$$i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \tag{5.2}$$

S_{n-1} — объем единичного шара в $\mathbf{R}^{n-1}$, $E'(k) \equiv \int\limits_{\langle C_k x, x\rangle < 1} dx$, а элементы ω^k $(k = 1, \ldots, s)$ определены согласно формуле (4.11). Если все $\beta_i = 1$ $(i = 1, \ldots, s + m)$, то величина $I_i'(\mathfrak{B}, \beta)$ будет обозначаться через $I_i'(\mathfrak{B})$. Величины $I_i'(\mathfrak{B}, \beta)$ определены при произвольном распределении точек $x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m$, если только они являются точками Лебега [3] для всех встречающихся в (3.11) и (5.2) функциях.

Пусть теперь заданы наборы

$$\mathfrak{B} \equiv \{\sigma^0, \delta_0, x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m, C_1, \ldots, C_s,$$
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, u^1, \ldots, u^s, v^1, \ldots, v^m\},$$
$$\mathfrak{B}^* \equiv \{\sigma^0, \delta_0, x^{*1}, \ldots, x^{*s}, x'^{*1}, \ldots, x'^{*m}, C_1{}^*, \ldots, C_s{}^*,$$
$$\alpha_1{}^*, \ldots, \alpha_m{}^*, u^1, \ldots, u^s, v^1, \ldots, v^m\}$$

с одинаковым числом точек и одинаковыми значениями управлений. Функции $z(A_1{}^k, A_2{}^k, C_k, b^k)$, определяющие элементы ω^k, непрерывно зависят от матриц $A_1{}^k$, $A_2{}^k$, C_k и векторов b^k, которые, в свою очередь, определяются при помощи значений в точке $x = x^k$ вполне определенных фиксированных интегрируемых функций. Из условий **А1—А6** (свойства непрерывной зависимости по (z, y)) и того, что область Ω является строго липшицевой следует существование множеств $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$ полной меры в Ω и Γ соответственно таких, что точки этих множеств являются точками Лебега для функций

$$a_{i0}(\cdot, u^k, z),\ a_{i0}\bigl(\cdot, u^0(\cdot), z\bigr),\ a_0(\cdot, u^k, z, y),\ a_0\bigl(\cdot, u^0(\cdot), z, y\bigr),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} a_0(\cdot, u^0(\cdot), z, y), \ \frac{\partial}{\partial y_i} F_j(\cdot, u^0(\cdot), z, y),$$

$$F_j(\cdot, u^k, z, y), \ F_j(\cdot, u^0(\cdot), z, y), \ i = 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \ k = 1, \ldots, s,$$

$$\varkappa(\cdot, v^k, z), \ \varkappa(\cdot, v^0(\cdot), z), \ \Phi_j(\cdot, v^k, z), \ \Phi_j(\cdot, v^0(\cdot), z),$$

$$j = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

при любых фиксированных $z \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^n$. Поэтому, в силу условий **A 4**, **A 6**, свойств точек Лебега, соотношений (3.8), (3.9) и представления (5.1)—(5.2), существуют множества $\Omega'' \subset \Omega$, $\operatorname{mes} \Omega'' = \operatorname{mes} \Omega$, $\Gamma'' \subset \Gamma$, $\operatorname{mes} \Gamma'' = \operatorname{mes} \Gamma$ такие, что, если точки $x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m$ из набора $\mathfrak{B}$ принадлежат Ω'' и Γ'' соответственно (эти точки не обязательно должны быть попарно различными), то множества

$$E(\delta) \equiv \left\{x \in \Omega : \min_k |x - x^k| < \delta\right\}, \quad S(\delta) \equiv \left\{x' \in \Gamma : \min_k |x' - x'^k| < \delta\right\}$$

содержат множества $E'(\delta)$, $S'(\delta)$ такие, что

$$\frac{\operatorname{mes}(E(\delta) \setminus E'(\delta))}{\operatorname{mes} E(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0, \qquad \frac{\operatorname{mes}(S(\delta) \setminus S'(\delta))}{\operatorname{mes} S(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \tag{5.3}$$

и что

$$|I_i'(\mathfrak{B}^*, \beta^*) - I_i'(\mathfrak{B}, \beta)| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \tag{5.4}$$

как только точки $x^{*1}, \ldots, x^{*s}$ принадлежат $E'(\delta)$, точки $x'^{*1}, \ldots, x'^{*m}$ принадлежат $S'(\delta)$ и

$$|\beta^* - \beta| \to 0, \qquad |\alpha_k^* - \alpha_k| \to 0 \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

$$\|C_k^* - C_k\| \to 0 \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

когда $\delta \to 0$. В самом деле, рассмотрим, например, величину $F_i(x^k, u^k, w^0(x^k) + \omega^k(0))$. Согласно результатам первой части работы величина $\omega^k(0)$ имеет аналогичные (5.4) свойства. Элемент w^0 фиксирован, поэтому, если точка x^k является точкой Лебега для элемента w^0, то величина $w^0(x^{*k})$ также имеет аналогичные (5.4) свойства. Таким образом достаточно рассмотреть поведение величины $F_i(x^{*k}, u^k, z^*, y^*)$, когда $z^* \to z$, $y^* \to y$ и $\delta \to 0$. В силу условия **A 6** при достаточно малых $|z^* - z|$, $|y^* - y|$ мы имеем, что

$$|F_i(x^{*k}, u^k, z^*, y^*) - F_i(x^k, u^k, z, y)|$$

$$\leqq 2\mu_2 \left[h_8(x^{*k}) + |z|^{\frac{r}{r-2}} + |y| + 1\right]^{\frac{r+2}{r}} [|z^* - z| + |y^* - y|]$$

$$+ |F_i(x^{*k}, u^k, z, y) - F_i(x^k, u^k, z, y)|.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к нулю потому, что вблизи точки Лебега функции h_8 значения $h_8(x^{*k})$ равномерно ограничены в множествах типа $E'(\delta)$, а второе слагаемое стремится к нулю потому, что точка x^k выбирается как точка Лебега функции $F_i(\cdot, u^k, z, y)$ для всех z и y.

Вполне аналогично, с учетом свойств непрерывной зависимости элементов ω^k от параметров (см. [1]) и скорости убывания на бесконечности функций $|\omega^k|$, рассматриваются интегралы по $\mathbf{R}^n$.

Теорема 5.1: *Пусть выполнены условия* **А1—А8**, $\sigma^0 = (u^0, v^0) \in \Sigma$, $w^0 = w(\sigma^0)$, *семейство* $\{\sigma^\varepsilon(\beta)\}$ *и набор* $\mathfrak{B}$ *определены по формулам* (4.6), (4.7), *соответственно. Если*

а) *константа* p *из условия* **А4** *равна нулю и константа* q *из того же условия не превосходит* $1/2$;

б) *существует константа* c_2 *такая, что функции* γ_1 *и* γ_2 *из условия* **А4** *имеют оценку*

$$|\gamma_1(t)| \leqq c_2 |t|, \ |\gamma_2(t)| \leqq c_2 |t|, \ t \in \mathbf{R};$$

в)
$$\frac{\partial}{\partial y_j} F_i(\cdot, u^0(\cdot), w^0(\cdot)) \in L_r(\Omega),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_i(\cdot, u^0(\cdot), w^0(\cdot)) \in L_{\frac{r}{2}}(\Omega),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_i(\cdot, v^0(\cdot), w^0_{n+1}(\cdot)) \in L_{r-1}(\Gamma),$$

$$(j = 1, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0),$$

то существуют множества $\Omega''' \subset \Omega$, $\Gamma''' \subset \Gamma$ *полной меры в* Ω *и* Γ *соответственно такие, что для попарно различных точек* $x^1, \ldots, x^s \in \Omega'''$, $x'^1, \ldots, x'^m \in \Gamma'''$ *имеют место соотношения*

$$I_i(\sigma^\varepsilon(\beta), w(\sigma^\varepsilon(\beta))) = I_i(\sigma^0, w^0) + \varepsilon J_i'(\mathfrak{B}, \beta) + o_i(\varepsilon), \tag{5.5}$$
$$i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0,$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$, *где величины* $I_i'(\mathfrak{B}, \beta)$ *определяются по формулам* (5.1), (5.2), (4.11).

Доказательство: Теорему достаточно доказать только для одного функционала

$$I(\sigma, g) \equiv \int_\Omega F(x, u, g)\, dx + \int_\Gamma \Phi(x', v, g_{n+1})\, d\Gamma,$$

где функции F и Φ удовлетворяют условиям **А1**, **А6** и условию в) настоящей теоремы.

Разность $\delta I \equiv I(\sigma^\varepsilon(\beta), w(\sigma^\varepsilon(\beta))) - I(\sigma^0, w^0)$ имеет представление

$$\delta I = J_1 + J_2 - J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7,$$

$$J_1 \equiv I(\sigma^\varepsilon(\beta), w^0 + g^1) - I(\sigma^0, w^0 + g^1),$$

$$J_2 \equiv \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} \int\limits_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^k, w^0 + g^1 + \tau\delta g)\, \delta g_j \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} F(x, u^k, w^0 + g^1 + \tau\delta g)\, \delta g_0 \right] d\tau\, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{S(k,\varepsilon,\beta)} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x', v^k, w^0_{n+1} + \tau\delta g_{n+1})\, \delta g_{n+1}\, d\tau\, d\Gamma,$$

$$J_3 \equiv \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} \int\limits_0^1 \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0, w^0 + g^1 + \tau\delta g)\, \delta g_j$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} F(x, u^0, w^0 + g^1 + \tau\delta g)\, \delta g_0 \Bigg] d\tau\, dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{S(k,\varepsilon,\beta)} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x, v^0, w^0_{n+1} + \tau\delta g_{n+1})\, \delta g_{n+1}\, d\tau\, d\Gamma,$$

$$J_4 \equiv \langle\langle LI(\sigma^0, w^0), w(\sigma^\varepsilon(\beta)) - w^0 \rangle\rangle,$$

$$J_5 \equiv I(\sigma^0, w^0 + g^1) - I(\sigma^0, w^0) - \langle\langle LI(\sigma^0, w^0), g^1 \rangle\rangle,$$

$$J_6 \equiv \int\limits_0^1 \langle\langle LI(\sigma^0, w^0 + \tau(g^1 + \delta g)) - LI(\sigma^0, w^0 + \tau g^1), g^1 + \delta g \rangle\rangle\, d\tau,$$

$$J_7 \equiv \int\limits_0^1 \langle\langle LI(\sigma^0, w^0 + \tau g^1) - LI(\sigma^0, w^0), \delta g \rangle\rangle\, d\tau,$$

где $g^1 \equiv \sum\limits_{k=1}^{s} \omega^k(\varepsilon, \beta)$.

Покажем, что функционалы J_2, J_3, J_6, J_7 оцениваются по модулю как $o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Все слагаемые функционалов J_2 и J_3 оцениваются одним и тем же способом, поэтому проведем оценку только для одного из них. Существенным здесь является то, что все интегралы в J_2 и J_3 определены на множествах, мера которых имеет порядок $O(\varepsilon)$. Из условия А 6 и неравенства Гельдера следует, что

$$\left| \int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial y_1} F(x, u^k, w^0 + g^1 + \tau\delta g)\, \delta g_1\, d\tau\, dx \right|$$

$$\leqq c_3 \left(\int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} \left[h_8 + |w^0| + |g^1| + |w_0{}^0|^{\frac{r}{r-2}} + |\delta g| + |\delta g_0|^{\frac{r}{r-2}} \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\delta g\|,$$

где константа c_3 зависит только от r и μ_2. Согласно неравенству (4.9) норма $\|\delta g\| = o(\sqrt{\varepsilon})$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Интеграл по $E(k, \varepsilon, \beta)$ на основе неравенства Минковского оценивается так, чтобы один слагаемый содержал известные функции h_8, w^0. Если x^k — точка Лебега для соответствующих функций, то этот слагаемый оценивается через $O(\sqrt{\varepsilon})$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Слагаемое, содержащее $|g^1|$, в силу соотношения (4.10) также оценивается через $O(\sqrt{\varepsilon})$. Наконец

$$\left(\int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} \left(|\delta g| + |\delta g_0|^{\frac{r}{r-2}} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \|\delta g\| + \|\delta g_0\|^{\frac{r}{r-2}}_{L_{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)} = o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Поэтому $J_2 = o(\varepsilon)$; $J_3 = o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$, когда точки $x^1, \ldots, x^s \in \Omega'$, $x'^1, \ldots, x'^m \in \Gamma'$ и являются точками Лебега конечного числа известных функций. В рассмотренном примере это $|h_8|^2$, $|w^0|^2$, $|w_0{}^0|^{\frac{2r}{r-2}}$.

В силу условия **А6** производная $LI(\sigma^0, \hat{g})$ удовлетворяет условию Липшица на любом фиксированном ограниченном множестве из $\mathsf{L}(r)$. Отсюда и из оценок (4.9) следует, что $J_6 = o(\varepsilon)$, $J_7 = o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$.

Поскольку область Ω является строго липшицевой, множество Γ имеет простую структуру, то относительно свойств точек Лебега функции, определенные на Γ, имеют такие же свойства, как функции, определенные на Ω, в частности, для почти всех $x'^0 \in \Gamma$

$$\int\limits_{|x'-x'^0|<\alpha^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{n-1}}} d\Gamma = \alpha^{1-n} S_{n-1}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Таким образом для точек $x'^1, \ldots, x'^m \in \Gamma'$, принадлежащих некоторому множеству полной меры в Γ, имеет место соотношение

$$J_{12} \equiv \int\limits_{\Gamma} \left[\Phi\left(x', v^\varepsilon(\beta), w^0_{n+1}\right) - \Phi(x', v^0, w^0_{n+1})\right] d\Gamma$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (\beta_{s+k}\alpha_k)^{1-n}\, S_{n-1}\varepsilon\left[\Phi\left(x'^k, v^k, w^0_{n+1}(x'^k)\right) - \Phi\left(x'^k, v^0(x'^k), w^0_{n+1}(x'^k)\right)\right] + o(\varepsilon)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$.

Так как точки $x^1, \ldots, x^s$ попарно различны, то, согласно оценкам (4.10), в каждом $E(k, \varepsilon, \beta)$

$$|g^1(x) - \omega^k(0)| = \left|\sum_{\substack{k'=1\\ k'\neq k}}^{s} \omega^{k'}(\varepsilon, \beta)\right| = O(\varepsilon) \tag{5.6}$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Отсюда, из условия **А6** и того, что подинтегральная функция в функционале

$$J_{11} \equiv \int\limits_{\Omega} \left[F\left(x, u^\varepsilon(\beta), w^0 + g^1\right) - F(x, u^0, w^0 + g^1)\right] dx$$

отлична от нуля только в множествах $E(k, \varepsilon, \beta)$, следует, что

$$J_{11} = \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{E(k,\varepsilon,\beta)} \left[F\left(x, u^k, w^0 + \omega^k(0)\right) - F\left(x, u^0, w^0 + \omega^k(0)\right)\right] dx + o(\varepsilon)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. В свою очередь, в силу условия **А6**, существует множество полной меры в Ω такое, что ее точки являются точками Лебега для функций $F\left(\cdot, u^0(\cdot), w^0(\cdot) + \xi\right)$, $F\left(\cdot, u^k, w^0(\cdot) + \xi\right)$ $(k = 1, \ldots, s)$ для произвольных $\xi = (z, y) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Поэтому, если точки x^k принадлежат этому множеству, то

$$J_{11} = \varepsilon \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{\frac{n}{2}} E'(k) \left[F\left(x^k, u^k, w^0(x^k) + \omega^k(0)\right) - F\left(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \omega^k(0)\right)\right] + o(\varepsilon)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Таким образом функционал J_1 имеет требуемое, согласно формулам (5.1), представление.

Функционал J_5 имеет вид

$$J_5 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{1} \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0, w^0 + \tau g^1) - \frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0, w^0)\right) g_j^1\right] d\tau\, dx$$

и, в силу условия А6 и соотношений (4.9), (4.10), (5.6),

$$J_5 = \sum_{k=1}^{s} \int_{\Omega} \int_{0}^{1} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0, w^0 + \tau \omega^k(\varepsilon, \beta)) - \frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0, w^0) \right) w_j^k(\varepsilon, \beta) \right] \times d\tau \, dx + o(\varepsilon)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Обозначим для $\xi \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\xi \equiv (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_0 = 0$,

$$F^j(x, \xi) \equiv \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0(x), w^0(x) + \tau\xi) - \frac{\partial}{\partial y_j} F(x, u^0(x), w^0(x)) \right) d\tau,$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

В силу условия А6 и того, что $\xi_0 = 0$, имеет место оценки

$$|F^j(x, \xi)| \leqq \mu_2 |\xi|, \qquad |F^j(x, \xi') - F^j(x, \xi'')| \leqq \mu_2 |\xi' - \xi''|. \tag{5.7}$$

Поэтому существует множество полной меры в Ω' такое, что для каждой точки x^k из этого множества и каждой константы $\delta > 0$ существует функция $\psi(x^k, \delta; \cdot)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, монотонно возрастающая и непрерывная с $\psi(x^k, \delta; 0) = 0$ такая, что

$$\sup_{\substack{g \in L(r) \\ g_0 = 0,\ |g(x)| \leq \delta}} \int_{|x - x^k| < \alpha} |F^j(x, g(x)) - F^j(x^k, g(x))|^2 \, dx \leqq \alpha^n \psi(x^k, \delta; \alpha^n), \tag{5.8}$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

В этом легко убедится при помощи аппроксимации функций F^j отрезками рядов вида

$$F^j \sim \sum_l F^j(x, \xi^l) F^{jl}(\xi).$$

Для заданных x^k, $\delta > 0$, $\mu > 0$ определим для $\varepsilon > 0$ функцию $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ как решение уравнения

$$\varphi \cdot [\psi(x^k, \delta; \mu\varepsilon\varphi)]^{1/2} = [\psi(x^k, \delta; \mu \sqrt{\varepsilon})]^{1/4}.$$

Легко проверить, что функция φ существует (функция ψ является монотонной) и

$$\varphi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty, \qquad \varepsilon\varphi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, \qquad \varepsilon\varphi(\varepsilon)\, \psi(x^k, \delta; \mu\varepsilon\varphi(\varepsilon))\, \varepsilon\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^2). \tag{5.9}$$

В силу оценки (5.7) имеем, что

$$\left| \int_{\Omega} \left(F^j(x, \omega^k(\varepsilon, \beta)) - F^j(x^k, \omega^k(\varepsilon, \beta)) \right) \omega_j^k(\varepsilon, \beta) \, dx \right|$$
$$\leqq 2\mu_2 \int_{\Omega \setminus E(k, \varepsilon\varphi(\varepsilon), \beta)} |\omega^k(\varepsilon, \beta)|^2 \, dx$$
$$+ \left(\int_{E(k, \varepsilon\varphi(\varepsilon), \beta)} |F^j(x^k, \omega^k(\varepsilon, \beta)) - F^j(x, \omega^k(\varepsilon, \beta))|^2 \, dx \right)^{1/2}$$
$$\times \left(\int_{E(k, \varepsilon\varphi(\varepsilon), \beta)} |\omega_j^k(\varepsilon, \beta)|^2 \, dx \right)^{1/2} \equiv J_{51} + J_{52} \times J_{53}.$$

Определим теперь константу δ как

$$\delta = \sup_{\substack{x \in \Omega,\ \varepsilon > 0, \\ \beta \in B(\delta_0)}} |\omega^k(\varepsilon, \beta)(x)|$$

и константу μ так, чтобы для всех $\beta \in B(\delta_0)$, $t > 0$

$$E(k, t, \beta) \subset \left\{x \in \mathbf{R}^n : |x - x^k| < \mu^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Согласно оценкам (4.10) и положительной определенностью матрицы C_k, константы δ и μ существует. Тогда из оценок (4.10) и соотношений (5.9) следует, что

$$J_{51} = o(\varepsilon), \qquad J_{53} \leqq \delta \sqrt{\varepsilon\varphi(\varepsilon) \frac{S_{n-1}}{n}},$$

$$J_{52} \leqq \sqrt{\mu\varepsilon\varphi(\varepsilon)\, \psi(x^k, \delta; \mu\varepsilon\varphi(\varepsilon))}, \qquad J_{52} \cdot J_{53} = o(\varepsilon)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Таким образом

$$J_5 = \sum_{k=1}^{s} \int_{\Omega} \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} F\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \tau\omega^k(\varepsilon, \beta)\big) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial y_j} F\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\big)\right) \omega_j{}^k(\varepsilon, \beta)\right] d\tau\, dx + o(\varepsilon)$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. Полученное выражение для J_5 при помощи условия **A6**, преобразования координат и свойств элементов $\omega^k(\varepsilon, \beta)$ (соотношения (4.10), (4.11)) легко приводится к виду

$$J_5 = \varepsilon \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \Big[F\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(x)\big) - F\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\big)$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} F\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\big)\, \omega_j{}^k(x)\Big]\, dx + o(\varepsilon),$$

где $o(\varepsilon)$ не зависит от $\beta \in B(\delta_0)$ и интеграл по $\mathbf{R}^n$ может быть заменен интегралом по Ω.

Таким образом в представлении разности δI величины J_2, J_3, J_6, J_7 оценены через $o(\varepsilon)$ и величины J_1 и J_5 приведены к требуемому виду, если только попарно различные точки $x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m$ принадлежат некоторым множествам полной меры в Ω и Γ соответственно.

Функционал

$$J_4 = \langle\langle LI(\sigma^0, w^0), w(\sigma^\varepsilon(\beta)) - w^0 \rangle\rangle$$

является линейным по приращению $w\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big) - w^0$ и поэтому может быть преобразован при помощи свойств решений уравнений с сопряженными операторами к следующему виду

$$J_4 = -\langle\langle f^1, w^* \rangle\rangle - \langle\langle f^2, w^* \rangle\rangle - \langle\langle f^3, w^* \rangle\rangle,$$

$$f^1 \equiv \mathsf{A}\big(\sigma^\varepsilon(\beta)\big)\,(w^0 + g^1) - \mathsf{A}(\sigma^0)\,(w^0 + g^1),$$

$$f^2 \equiv \int_0^1 \big(L\mathsf{A}(\sigma^\varepsilon(\beta), w^0 + g^1 + \tau\delta g) - L\mathsf{A}(\sigma^0, w^0 + g^1 + \tau\delta g)\big)\, \delta g\, d\tau,$$

$$f^3 \equiv \mathsf{A}(\sigma^0)\,(w^0 + g^1 + \delta g) - \mathsf{A}(\sigma^0)\, w^0 - L\mathsf{A}(\sigma^0, w^0)\,(g^1 + \delta g),$$

где w^* является решением уравнения

$$\mathsf{P}'L^*\mathsf{A}(\sigma^0, w^0)\, w = \mathsf{P}'LI(\sigma^0, w^0)$$

относительно $w \in \mathsf{W}$.

Из условия в) и условия **А7** следует, что $w^* = (\psi^*, \psi^*_{x_1}, \ldots, \psi^*_{x_n}, \psi^*)$, где $\psi^* \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ с некоторым $\alpha > 0$. Так как функция ψ^* не зависит от ε и β, элемент f^1 отличен от нуля только в множествах $E(k, \varepsilon, \beta)$, $S(k, \varepsilon, \beta)$ и там не зависит от ε и β (соотношение (4.10)), то, вполне аналогично как при выводе представления для функционала J_1 показывается, что

$$\begin{aligned}
&\langle\langle f^1, w^*\rangle\rangle \\
&= \varepsilon \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{-\frac{n}{2}} E'(k) \Big\{\Big\langle\big(A(x^k, u^k) - A(x^k, u^0(x^k))\big)\big(w^0(x^k) + \omega^k(0)\big), \nabla\psi^*(x^k)\Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle a\big(x^k, u^k, w_0{}^0(x^k)\big) - a\big(x^k, u^0(x^k), w_0{}^0(x^k)\big), \nabla\psi^*(x^k)\Big\rangle \\
&\quad + \big[a_0\big(x^k, u^k, w^0(x^k) + \omega^k(0)\big) - a_0\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(0)\big)\big]\,\psi^*(x^k)\Big\} \\
&\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} (\beta_{s+k}\alpha_k)^{1-n} S_{n-1}\big[\varkappa\big(x'^k, v^k, w^0_{n+1}(x'^k)\big) - \varkappa\big(x'^k, v^0(x'^k), w^0_{n+1}(x'^k)\big)\big]\,\psi^*(x'^k) \\
&\quad + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$.

В силу условия **А4** и оценок (4.9) норма элемента f^2 в пространстве $\mathsf{L}(r)$ оценивается через $o(\sqrt{\varepsilon})$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. В то же время элемент отличен от нуля только в множествах $E(k, \varepsilon, \beta)$ и $S(k, \varepsilon, \beta)$. Поэтому, применяя неравенство Гельдера и переходя к точкам Лебега в интегралах по $E(k, \varepsilon, \beta)$ от $|w_j{}^*|^2$, интегралы от $f_j{}^2 w_j{}^*$, $(j = 1, \ldots, n)$ оцениваются через $o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$. В свою очередь при помощи условия **А4** интегралы от $f_0{}^2 w_0{}^*$ и $f^2_{n+1} w^*_{n+1}$ оцениваются также через $o(\varepsilon)$. В самом деле, рассмотрим, например, интеграл от $f^2_{n+1} w^*_{n+1}$ (для интеграла от $f_0{}^2 w_0{}^*$ требуются более длинные выкладки). Мы имеем

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Gamma f^2_{n+1}\psi^*\, d\Gamma\Big| \leqq \sum_{k=1}^{m} \int_{S(k,\varepsilon,\beta)} 2\mu_0 \Big[h_5 + |w^0_{n+1}| + \delta g_{n+1}|\Big]^{\frac{2}{r-2}} |\delta g_{n+1}|\, |\psi^*|\, d\Gamma \\
&\leqq 2\mu_0 c(r) \sum_{k=1}^{m} \Bigg(\int_{S(k,\varepsilon,\beta)} |\psi^*|^{\frac{2(r-1)}{r-2}} d\Gamma\Bigg)^{\frac{r-2}{2(r-1)}} \Bigg[\Bigg(\int_{S(k,\varepsilon,\beta)} \Big(|h_5|^{r-1} + |w^0_{n+1}|^{\frac{2(r-1)}{r-2}}\Big) d\Gamma\Bigg)^{\frac{1}{r-1}} \\
&\quad + \Bigg(\int_{S(k,\varepsilon,\beta)} |\delta g_{n+1}|^{\frac{2(r-1)}{r-2}} d\Gamma\Bigg)^{\frac{1}{r-1}}\Bigg] \|\delta g\| = o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

после перехода к точкам Лебега известных функций.

Отметим, что до сих пор условия **А7**, **А8**, а)—в) не были применены.

Величина $\langle\langle f^3, w^*\rangle\rangle$ может быть представлена в виде

$$\langle\langle f^3, w^*\rangle\rangle \equiv J_{41} + J_{42} + J_{43} + J_{44} + J_{45},$$

$$J_{41} \equiv \int_\Omega \langle a(x, u^0, w_0{}^0 + \delta g_0) - a(x, u^0, w_0{}^0) - \frac{\partial}{\partial z} a(x, u^0, w_0{}^0)\, \delta g_0, \nabla\psi^*\rangle\, dx,$$

$$J_{42} \equiv \int\limits_{\Omega} \left[a_0(x, u^0, w^0 + g^1) - a_0(x, u^0, w^0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} a_0(x, u^0, w^0)\, g_j^1\right] \psi^* \, dx,$$

$$J_{43} \equiv \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y_i} a_0(x, u^0, w^0 + g^1 + \tau\delta g) - \frac{\partial}{\partial y_i} a_0(x, u^0, w^0)\right) \delta g_i \, d\tau\right] \psi^* \, dx,$$

$$J_{44} \equiv \int\limits_{\Gamma} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \varkappa(x', v^0, w^0_{n+1} + \tau\delta g_{n+1}) - \frac{\partial}{\partial z} \varkappa(x', v^0, w^0_{n+1})\right) \delta g_{n+1} \, d\tau\psi^* \, d\Gamma,$$

$$J_{45} \equiv \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial z} a_0(x, u^0, w^0 + g^1 + \tau\delta g) - \frac{\partial}{\partial z} a_0(x, u^0, w^0)\right) \delta g_0 \, d\tau\psi^* \, dx.$$

При $n \geqq 4$ величина J_{41} тождественно равна нулю в силу условия А8, а при $n \leqq 3$ подинтегральная функция оценивается по модулю сверху через $h(x)\, |\nabla\psi^*(x)|$, где

$$h(x) \equiv c_4 n\mu_0 \left[h_4(x) + |w_0{}^0|^{\frac{2}{r-2}} + |\delta g_0|^{\frac{2}{r-2}}\right]^q c_2\, |\delta g_0|^2.$$

Согласно соотношениям (4.8)—(4.11) и теоремам вложения [4] для любого $t > n$

$$\|\delta g_0\|_{L_{\frac{2t}{t-2}}(\Omega)} = o(\sqrt{\varepsilon}), \qquad \|\delta g_{n+1}\|_{L_{\frac{2(t-1)}{t-2}}(\Gamma)} = o(\sqrt{\varepsilon}). \tag{5.10}$$

Поэтому

$$\|h\|_{L_1(\Omega)} \leqq c_5\, \|\delta g_0\|^2_{L_{\frac{4r}{r-2q}}(\Omega)} = o(\varepsilon)$$

при

$$q < \frac{r}{6},\ n = 3, \qquad q < \frac{r}{2}, \qquad n = 2, \tag{5.11}$$

что выполняется для $q \in [0, {}^1/_2]$. Таким образом величина J_{41} оценивается через $o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$.

Вполне аналогично показывается, что величина $J_{44} = o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$, если

$$q < \frac{r-1}{4},\ n = 3, \qquad q \leqq 1, n = 2, \tag{5.12}$$

что выполняется при $q \in [0, {}^1/_2]$.

Совершенно так же $J_{45} = o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$, если $n = 2, 3$, выполняются соотношения (5.11) и функция a_0 не зависит от y.

Отметим, что эти оценки получены без привлечения условий А7 и в), т. е. при $n \leqq 3$ величины, независящие от нелинейностей по y могут быть оценены при более слабых предположениях. Пусть теперь выполнены условия А7 и условия а), б), в). Тогда $\psi^* \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ и, в силу этого, величины J_{44} и J_{45} имеют требуемую оценку через $o(\varepsilon)$ при $q \in [0, {}^1/_2]$ для всех $n \geqq 2$.

Поскольку $\psi^* \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, то функция $a_0(x, u, z, y)\, \psi^*(x)$ удовлетворяет теми же условиями, что функция F, поэтому севершенно так же как при исследовании функционалов J_5, J_7 показывается, что

$$J_{42} = \varepsilon \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \Big[a_0\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k) + \omega^k(x)\big) - a_0\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\big)$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} a_0\big(x^k, u^0(x^k), w^0(x^k)\big)\, \omega_j^k(x) \Big] \psi^*(x^k)\, dx + o(\varepsilon),$$

$J_{43} = o(\varepsilon)$ равномерно по $\beta \in B(\delta_0)$.

Из полученных представлений и оценок следует утверждение теоремы ▮

Следствие 5.1: *Утверждения теоремы сохраняют силу, если условия* **А7**, **А8**, а), б), в) *заменить на условие, что функции* $a_0 a_{i0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *являются аффинными по* (z, y).

Следствие 5.2: *Утверждения теоремы сохраняют силу, если* $n \leqq 3$, *выполнены условия* **А1—А3**, *условие* **А4** *для функций* a_{i0} $(i = 1, \ldots, n)$, $\varkappa$, *условия* **А5**, **А6**, *условие* б) *теоремы* 5.1, *функция* a_0 *является аффинной по* y, *т. е.*,

$$a_0(x, u, z, y) \equiv a_{00}(x, u, z) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(x, u, z)\, y_i,$$

и

1. *функции* a_{0i} $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условию* Каратеодори *и для почти всех* $x \in \Omega$ *и всех* $u \in \overline{\mathrm{co}}\, Q_1$ *имеют непрерывные первые частные производные по* z;

2. *константа* $q \in [0, 1)$ *из условия* **А4** *при* $n = 3$ *не превосходит* $\min\left(\frac{r}{6}, \frac{r-1}{4}\right)$;

3. *существуют константы* $\tau > n$, $c_6 \geqq 0$ *и функция* $h \in L_\tau(\Omega)$ *такие, что для почти всех* $x \in \Omega$ *и всех* $u \in \overline{\mathrm{co}}\, Q_1$, $z, z', z'' \in \mathbf{R}$ *имеют место соотношения* $(i = 1, 2)$

$$|a_{00}(x, u, z)| \leqq c_6 \left[h(x) + |z|^{\frac{2}{\tau-2}}\right]^{\frac{\tau+2}{2}},$$

$$|a_{0i}(x, u, z)| \leqq c_6 \left[h(x) + |z|^{\frac{2}{\tau-2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_{00}(x, u, z)\right| \leqq c_6 \left[h(x) + |z|^{\frac{2}{\tau-2}}\right]^2,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_{0i}(x, u, z)\right| \leqq c_6 \left[h(x) + |z|^{\frac{2}{\tau-2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} a_{00}(x, u, z') - \frac{\partial}{\partial z} a_{00}(x, u, z'')\right| \leqq c_6 \left[h(x) + |z'|^{\frac{2}{\tau-2}} + |z''|^{\frac{2}{\tau-2}}\right] |z' - z''|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} (a_{0i}(x, u, z') - \frac{\partial}{\partial z} a_{0i}(x, u, z'')\right|$$

$$\leqq \begin{cases} c_6 |z' - z''|, & n = 3, \\ c_6 \left[h(x) + |z'|^{\frac{2}{\tau-2}} + |z''|^{\frac{2}{\tau-2}}\right] |z' - z''|, & n = 2. \end{cases}$$

В самом деле, справедливость следствия 5.1 непосредственно вытекает из того, что в силу аффинности оператора $\mathsf{A}(\sigma^0)$ величина $\langle\langle f^3, w^* \rangle\rangle$ в доказательстве теоремы 5.1 тождественно равна нулю.

Справедливость утверждения следствия 5.2 требует более детального рассмотрения, поскольку теперь функция a_0 может не удовлетворить условию **А4** и функция ψ^* может быть неограниченной. Поскольку в оценках условия **A5** входят только величины $\mathsf{P}'f$, то необходимы только свойства дифференцируемости $(\mathsf{A}(\sigma)(\cdot))_0$ как оператора, действующего из W в пространство $L_{\frac{2\tau}{\tau+2}}(\Omega)$ с некоторым $\tau > n$, что имеет место в рассматриваемом случае. Таким образом условия 1, 3 обеспечивают существование производной Фреше оператора $\mathsf{A}(\sigma)$ и необходимые свойства функции a_0 в доказательстве теоремы 3.1 из первой части работы (изменения надо внести только в оценке нормы элемента $f_0^{2\varepsilon}$). Поэтому утверждения первой части работы сохраняют силу и в рассматриваемом случае.

В доказательстве теоремы 5.1 было отмечено, что условия **A7**, **A8**, а), в) необходимы только для оценки величины $\langle\langle f^3, w^* \rangle\rangle$ (условия 1 и 3 обеспечивают представление и оценки для остальных величин). Так же было показано, что при выполнении соотношений (5.11) и (5.12) функционалы J_{41} и J_{42} имеют требуемую оценку без привлечения условий **A7**, **A8**, в). Из аффинности функции a_0 по y следует, что $J_{42} \equiv 0$. Таким образом необходимо еще только оценить функционалы J_{43} и J_{45}, но эти оценки непосредственно следуют из условий 1, 3, соотношений (4.9)—(4.11), (5.10) и неравенства Гельдера.

6.

Теорема 6.1: *Пусть выполнены или условия теоремы* 5.1, *или условия следствия* 5.2 *или следствия* 5.1 *и* (σ^0, w^0), $w^0 \equiv w(\sigma^0)$, *является решением задачи* 1.

Тогда существуют константы λ_i $(i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$, *не все равные нулю, такие, что*

1. $\lambda_i \geqq 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k_0;$

2. $\sum\limits_{i=1}^{k_0} \lambda_i I_i(\sigma^0, w^0) = 0;$

3. *для почти всех* $x^0 \in \Omega$, $x'^0 \in \Gamma$, *всех положительно определенных симметрических постоянных матриц* C *размерности* $n \times n$, *всех* $\alpha > 0$, *всех* $u \in Q_1$, $v \in Q_2$

$$\sum_{i=0}^{k_0+m_0} \lambda_i I_i'(\mathfrak{B}^0) \geqq 0, \tag{6.1}$$

где $\mathfrak{B}^0 \equiv \{\sigma^0, 1, x^0, x'^0, C, \alpha, u, v\}$ *и величины* $I_i'(\mathfrak{B})$ *определяются по формулам* (5.1)—(5.2), (4.11).

Доказательство: При помощи формул (5.1)—(5.2), (4.11) каждому набору $\mathfrak{B}$ вида (4.6) можно сопоставить вектор

$$Y \equiv (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{k_0+m_0}) \in \mathbf{R}^{k_0+m_0+1},$$

$$Y_i \equiv I_i'(\mathfrak{B}), \qquad i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0.$$

Векторы Y определены также для наборов $\mathfrak{B}$, у которых точки $x^1, \ldots, x^s, x'^1, \ldots, x'^m$ не обязательно попарно различны. Множество всевозможных таких векторов, когда точки $x^k \in \Omega'' \cap \Omega'''$, $x'^k \in \Gamma'' \cap \Gamma'''$ обозначим через K. В силу формул (5.1)—(5.2), (4.11) множество K является выпуклым конусом с вершиной в нуле.

Для справедливости утверждений 1 и 3 теоремы достаточно, чтобы существовал ненулевой вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0+m_0})$ такой, что

$$\sum_{i=0}^{k_0+m_0} \lambda_i Y_i \geqq 0 \quad \forall Y \in K, \qquad \lambda_i \geqq 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k_0. \tag{6.2}$$

Допустим обратное, что ненулевой вектор со свойствами (6.2) не существует. Тогда, согласно свойствам отделимости выпуклых конусов [5], существуют векторы $Y^l \in K$ $(l = 0, 1, \ldots, m_0)$ такие, что

$$\begin{aligned} &Y_i^l < 0, && i = 0, 1, \ldots, k_0, && l = 0, 1, \ldots, m_0, \\ &Y_i^l = 0, && i \neq k_0 + l, && l = 1, \ldots, m_0, \\ &\left.\begin{aligned} &Y_i^l = \delta', && i = k_0 + l, && l = 1, \ldots, m_0, \\ &Y_i^0 = -\delta', && i = k_0 + 1, \ldots, k_0 + m_0 \end{aligned}\right\} && (\delta' > 0). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Из формул (5.1)—(5.2) и соотношений (5.3)—(5.4) вытекает существование наборов $\mathfrak{B}^l$ $(l = 0, 1, \ldots, m_0)$ с попарно различными (не только внутри набора, но и между наборами) точками из множеств Ω''' и Γ''' соответственно таких, что

$$\begin{gathered} |Y_i^l - I_i'(\mathfrak{B}^l)| \leqq \frac{1}{32} \min_{\substack{j=0,1,\ldots,k_0 \\ l=0,1,\ldots,m_0}} |Y_j^l| \frac{1}{(1 + m_0)^2} \equiv \delta_1 > 0, \\ i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \ l = 0, 1, \ldots, m_0. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Поскольку все точки из наборов $\mathfrak{B}^l (l = 0, 1, \ldots, m_0)$ попарно различны, то путем перехода к набору

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\xi) \equiv \Big\{&\sigma^0, 1, x^{01}, \ldots, x^{0s}, \ldots, x^{m_01}, \ldots, x^{m_0s}, x'^{01}, \ldots, x'^{0m}, \\ &\ldots, x'^{m_01}, \ldots, x'^{m_0m}, \xi_0^{-\frac{n}{2}} C_{01}, \ldots, \xi_0^{-\frac{n}{2}} C_{0s}, \ldots, \xi_{m_0}^{-\frac{n}{2}} C_{m_0s}, \\ &\xi_0^{\frac{1}{1-n}} \alpha_{01}, \ldots, \xi_0^{\frac{1}{n-1}} \alpha_{0m}, \ldots, \xi_{m_0}^{\frac{1}{n-1}} \alpha_{m_0m}, u^{01}, \ldots, u^{m_0s}, v^{01}, \ldots, v^{m_0m}\Big\}, \end{aligned}$$

определяемому при помощи объединения всех точек из наборов $\mathfrak{B}^l$, в силу формул (3.8), (5.1)—(5.2), теоремы 5.1 и примечания к теореме 3.1, получаем существование семейства управлений

$$\{\sigma(\varepsilon, \xi)\}, \ \varepsilon > 0, \ \xi \equiv (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m_0}) \in \mathbf{R}^{m_0+1}, \ \xi_l > 0, \ l = 0, 1, \ldots, m_0,$$

таких, что

$$\begin{aligned} &I_i\big(\sigma(\varepsilon, \xi), w(\sigma(\varepsilon, \xi))\big) \\ &= I_i(\sigma^0, w^0) + \varepsilon \sum_{l=0}^{m_0} \xi_l I_i'(\mathfrak{B}^l) + \varepsilon \psi_i(\varepsilon, \xi), \quad i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где функции $\psi_i(\varepsilon, \xi)$ непрерывны по (ε, ξ) и $\varepsilon\psi_i(\varepsilon, \xi) = o(\varepsilon)$ $(i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$, равномерно по ξ, если только $\delta_2 \leqq \xi_l \leqq \delta_2^{-1}$ $(l = 0, 1, \ldots, m_0)$, где δ_2 — произвольное фиксированное число ис интервала (0,1). Отсюда и из соотношений (6.3) и (6.4) следует, что при $\delta_2 = 1/4$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, где ε_1 достаточно мало, существует вектор-функция $\xi = \xi(\varepsilon)$ такая, что

$$\sum_{l=0}^{m_0} \xi_l(\varepsilon) I_i'(\mathfrak{B}^l) + \psi_i\big(\varepsilon, \xi(\varepsilon)\big) = \begin{cases} < 0, & i = 0, 1, \ldots, k_0 \\ 0, & i = k_0 + 1, \ldots, k_0 + m_0. \end{cases}$$

Поэтому в силу соотношений (6.5) пара $\big(\sigma(\varepsilon, \xi(\varepsilon)), w(\sigma(\varepsilon, \xi(\varepsilon)))\big)$ удовлетворяет всем ограничениям задачи 1 и сообщает функционалу I_0 значение, меньшее, чем $I_0(\sigma^0, w^0)$. Полученное противоречие с оптимальностью пары (σ^0, w^0) показывает, что ненулевой вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0+m_0})$ со свойствами (6.2) существует.

Наконец, утверждение 2 теоремы непосредственно следует из того, что в приведенном доказательстве утверждений 1 и 3 использованы только свойства локального минимума пары (σ^0, w^0) ∎

При помощи условий **А1—А6** нетрудно показать (см. также [6]), что, если множество

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathsf{A}\colon \mathsf{A} = \mathsf{A}(\sigma),\ \sigma \in \Sigma\}$$

допустимых операторов выпукло и функционалы I_i $(i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ не зависят от σ, то необходимое условие оптимальности имеет следующий вид:

Если (σ^0, w^0) — решение задачи 1, то существуют константы λ_i $(i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$, не все равные нулю такие, что

1. $\lambda_i \geqq 0,\ i = 0, 1, \ldots, k_0;$
2. $\sum\limits_{i=1}^{k_0} \lambda_i I_i(\sigma^0, w^0) = 0;$
3. $\sum\limits_{i=0}^{k_0+m_0} \lambda_i \langle\langle \mathsf{A}(\sigma^0)\, w^0 - \mathsf{A} w^0, w^{*i} \rangle\rangle \geqq 0 \quad \forall\ \mathsf{A} \in \mathfrak{A},$ (6.6)

где w^{*i} — решения вариационных равенств

$$\langle\langle w, L\mathsf{A}(\sigma^0, w^0)\, \eta \rangle\rangle - \langle\langle LI(\sigma^0, w^0), \eta \rangle\rangle = 0 \quad \forall\ \eta \in \mathsf{W},$$
$$i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0, \tag{6.7}$$

относительно $w \in \mathsf{W}$.

Полученное в теореме 6.1 необходимое условие оптимальности (6.1) отличается от условия (6.6) присутствием элементов ω и дополнительными слагаемыми в виде интегралов по $\mathbf{R}^n$ (если $\omega \equiv 0$, то эти интегралы тождественно равны нулю). Наличие элементов ω обусловлено зависимостью главной части операторов $\mathsf{A}(\sigma)$ от управлений, а наличие интегралов по $\mathbf{R}^n$ — нелинейностями по ∇z в операторе или функционалах. Приведенные в первой части работы примеры 1 и 2, которые отражают влияние нелинейностей по ∇z, и различный вид необходимых условий оптимальности указывает на то, что в достаточно общих ситуациях расширение исходной задачи путем перехода к выпуклой оболочке множества допустимых операторов возможно только тогда, когда функции a_0, F_i $(i = 0, 1, \ldots, k_0 + m_0)$ являются аффинными по y.

В предположении, что в расширенной задаче имеет место аналог условий **А1—А8**, приведем несколько случаев, когда такое расширение сохраняет точную нижнюю грань минимизируемого функционала на допустимых по всем ограничениям задачи парам (σ, ω).

Случай 1: *Если*

1. $m_0 = k_0 = 0$,
2. функционал I_0 не зависит от σ, является слабо непрерывным по $w \in \mathsf{W}$ и функция F_0 аффинна по y,
3. функция a_0 аффинна по y,
4. функции a_0, a_{i0} $(i = 1, \ldots, n)$ не зависят от σ,
5. множество Q_1 состоит из двух точек u^1 и u^2 и для каждого $x \in \Omega$ матрица $A(x, u^1) - A(x, u^2)$ является или положительно определенной или отрицательно определенной,

то переход от $\mathfrak{A}$ к выпуклой оболочке множества $\mathfrak{A}$ сохраняет точную нижнюю грань минимизируемого функционала.

Случай 2: *Если*

1. $m_0 = k_0 = 0$,

2. функции a_{ij}, a_{i0} $(i, j = 1, \ldots, n)$, F_0, Φ_0 не зависят от σ,

то переход от $\mathfrak{A}$ к выпуклой оболочке множества $\mathfrak{A}$ сохряняет точную нижнюю грань минимизируемого функционала.

Случай 3. *Если*

1. выполнены условия 1—4 случая 1,

2. множество M всех матриц $A = A(\cdot, u(\cdot))$, $\sigma = (u, v) \in \Sigma$, таково, что

а) из принадлежности множеству M матриц A^1 и A^2 следует, что для любого измеримого множества $E \subset \Omega$ множество M содержит матрицу A^3 такую, что

$$A^3(x) = \begin{cases} A^1(x), x \in E, \\ A^2(x), x \in \Omega \setminus E; \end{cases}$$

б) из $A \in M$ следует, что множество M содержит также все симметрические матрицы, собственные значения которых совпадают с собственными значениями матрицы A,

то переход от $\mathfrak{A}$ к выпуклой оболочке множества $\mathfrak{A}$ сохраняет точную нижнюю грань минимизируемого функционала.

Исследование случая 1 проводится по той же схеме, как для близкой задачи в [7] путем сравнения необходимых условий оптимальности в форме (6.1) и в форме (6.6). Свойства случая 2 являются почти непосредственными следствием из условия A5 и свойств вполне непрерывности оператора вложения из $W_2{}^1(\Omega)$ в $L_{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)$ и в $L_{\frac{2(r-1)}{r-2}}(\Gamma)$. Наконец, случай 3 рассматривается с привлечением методики работы [8] и свойств случая 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Райтум, У. Е.: Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями I. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization (публикуется).

[2] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд-во Наука: Москва 1973.

[3] Стейн, И.: Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Изд-во Мир: Москва 1973.

[4] Бесов, О. В., Ильин, В. П., и С. М. Никольский: Интегральные представления функций и теоремы вложения. Изд-во Наука: Москва 1975.

[5] Болтянский, В. Г.: Свойство отделимости системы выпуклых конусов. Изв. АН Арм. ССР 7 (1972), 250—257.

[6] Райтум, У. Е.: Некоторые следствия из необходимых условий экстремума в задачах оптимального управления для эллиптических уравнений. Латв. мат. ежегодник (Рига) 25 (1981), 71—80.

[7] Райтум, У. Е.: Экстремальные задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка. Латв. мат. ежегодник (Рига) 19 (1976), 198—213.

[8] Райтум, У. Е.: Расширение экстремальных задач, связанных с линейным эллиптическим уравнением. Докл. АН СССР 243 (1978), 281—283.

Manuskripteingang: 16. 11. 1982

VERFASSER:

Проф. д-р У. Е. Райтум
Вычислительный центр Латвийского Государственного университета им. П. Стучки
СССР-226250 **Рига**, бульв. Райниса 29