Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (3) (1984), S. 203–211

Eine Verallgemeinerung der Lambert-Transformation (II)[1])

H.-J. GLAESKE und K. STALLKNECHT

Für die von den Verfassern im ersten Teil der Arbeit eingeführte verallgemeinerte Lambert-Transformation wird eine Umkehrformel bewiesen. Hilfsmittel dazu ist eine Darstellung dieser Transformation als Laplace-Stieltjes-Transformation und die Darstellung der Laplace-Stieltjes-Transformation als Summe verallgemeinerter Lambert-Transformationen und umgekehrt, d. h. die Darstellung der verallgemeinerten Lambert-Transformation als Summe von Laplace-Stieltjes-Transformationen.

Для введенного авторами в первой части работы обобщенного преобразования Ламберта доказывается формула обращения. При этом используется представление этого преобразования в виде преобразования Лапласа-Стилтьеса, представление преобразования Лапласа-Стилтьеса в виде суммы обобщенного преобразования ламберта, и наоборот.

In this paper an inversion formula is proved for the generalized Lambert-transformation which was introduced by the authors in part (I). The proof is possible by means of the representation of this transformation as a Laplace-Stieltjes-transformation, the representation of the Laplace-Stieltjes-transformation as a sum of generalized Lambert transformations and reverse.

1.

Im ersten Teil dieser Arbeit [2] wurden die Konvergenzeigenschaften der *verallgemeinerten Lambert-Transformation*

$$\Lambda_k[\alpha](z) = \Lambda_k(z) = \int_0^\infty k(e^{-zt})\, d\alpha(t) \tag{1.1}$$

untersucht. Als Kern der Transformation waren beliebige (aber feste) Funktionen aus der Menge $\tilde{A}_E$ zugelassen. Die Elemente der Menge $\tilde{A}_E$ sollten die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $k \in A_E$, $k(0) = 0$, $k'(0) \neq 0$.
2. Es gibt ein $\varrho > 1$, so daß $k(z)$ in $1 \leqq |z| < \varrho$ höchstens endlich viele Singularitäten z_j $(j = 1, \ldots, n)$ der Form

$$k(z) = O[(z - z_j)^{-p_j} \log^{q_j}(z - z_j)] \quad \text{für} \quad z \to z_j$$

mit $p_j, q_j \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}(q_j) \geqq 0$ besitzt.
Hatte $k(z)$ speziell im Punkt 1 eine Singularität der Form

$$k(z) = O[(z - 1)^{-p} \log^q (z - 1)] \quad \text{für} \quad z \to 1,$$

[1]) Teil I dieses Beitrages erschien in H. 2 (1984) dieser Zeitschrift.

so wählten wir als Originalfunktionen R-C-Funktionen $a(t)$ aus dem Raum $V^c_{p,q}[0, \infty)$, dessen Elemente den Bedingungen

1. $a(t)$ ist von beschränkter Variation, in jedem Intervall $[0, R]$ mit $R > 0$,
2. $a(t)$ ist rechtsseitig stetig in $[0, \infty)$, $a(0) = 0$,
3. $$\int\limits_0^1 |a(t)|\, t^{-\mathrm{Re}(p)-1}\, |\log t|^{\mathrm{Re}(q)}\, dt < \infty$$

genügten.

Weiterhin wurden bestimmte Spezialfälle dieser Transformation betrachtet.

Im folgenden sollen Beziehungen zur *Laplace-Stieltjes-Transformation*

$$\Lambda[a]\,(z) = A(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}\, da(t) \tag{1.2}$$

hergeleitet werden, die es dann ermöglichen mit Hilfe der bekannten Umkehrformeln für (1.2) zu Umkehrformeln für die Transformation (1.1) zu gelangen.

2.

Zunächst führen wir einige abkürzende Bezeichnungen ein und beweisen einige Hilfssätze.

Definition 2.1: Es seien $\{k_j\}$ und $\{\varkappa_l\}$ zwei Folgen komplexer Zahlen. Erfüllen diese Folgen die Eigenschaft

$$\sum_{d/m} k_d \varkappa_{m/d} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = 1 \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

dann wird das durch die Schreibweise $\{k_j\} \approx \{\varkappa_l\}$ ausgedrückt.

Definition 2.2: $C_{r,s}$ bezeichne die Menge der Folgen $\{k_j\}$ mit

1. $k_1 \neq 0$,
2. $k_j = O(j^{r-1} \log^s j)$ für $j \to \infty$.

Für die weiteren Betrachtungen wird oft das asymptotische Verhalten der folgenden Summen benötigt.

Hilfssatz 2.1: *Es sei $r > -1$ und $s \geqq 0$, dann gilt für $t \to +0$*

$$\sum_{n=2}^\infty n^r \log^s n\, e^{-nt} = O\left(t^{-r-1} \log^s \left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Beweis: Wir setzen $\hat{a}(x) = \sum\limits_{n=2}^{[x]} n^r \log^s n$. Dann ist

$$\sum_{n=2}^\infty n^r \log^s n\, e^{-nt} = t \int\limits_1^\infty \hat{a}(x)\, e^{-xt}\, dx$$

und es gilt die Abschätzung

$$\hat{a}(x) \leqq \log^s x \sum_{n=2}^{[x]} n^r \sim \frac{x^{r+1}}{r+1} \log^s x \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Die Aussage folgt nun aus einem entsprechenden Satz für die Laplace-Transformation (siehe [1: S. 460]) ∎

Hilfssatz 2.2: *Es sei $r > -1$, $s \geqq 0$ und $\sigma \geqq 0$, dann ist*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} n^r l^r \log^s n \log^\sigma l \, e^{-nlt} = O\left(t^{-r-1} \log^{s+\sigma+1} \left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad \text{für} \quad t \to +0.$$

Beweis: Mit derselben Methode wie im Beweis zu Hilfssatz 2.1 kann auch die Doppelsumme umgeformt und abgeschätzt werden:

$$S := \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} n^r l^r \log^s n \log^\sigma l \, e^{-nlt} = t^2 \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} xy\hat{a}(x)\, \hat{b}(y)\, e^{-xyt} \, dx\, dy$$

$$\leqq Mt^2 \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} x^{r+2} y^{r+2} \log^s x \log^\sigma y \, e^{-xyt} \, dx\, dy.$$

Dabei ist $\hat{b}(x) = \sum_{l=2}^{[x]} l^r \log^\sigma l$ und $\hat{a}(x)$ bezeichnet dieselbe Funktion wie im Beweis zu Hilfssatz 2.1. Durch die Substitution $y = w^u$ und $x = w^{1-u}$ ist eine weitere Umformung des im letzten Ausdruck enthaltenen Doppelintegrals möglich:

$$S \leqq M\beta(s+1, \sigma+1)\, t^2 \int_1^{\infty} w^{r+2} \log^{s+\sigma+1} w \, e^{-wt} \, dw.$$

Da die erhaltene Abschätzung ein Laplace-Integral enthält folgt die Behauptung aus den bekannten asymptotischen Aussagen für die Laplace-Transformation (siehe [1: S. 460]) ∎

Im folgenden verwenden wir die Aussagen der Hilfssätze 2.1 und 2.2 zur Abschätzung spezieller Integrale.

Hilfssatz 2.3: *Ist $r > -1$, $s \geqq 0$, $\{k_j\} \in C_{r,s}$ und $a(t) \in V_{r,s}^c[0, \infty)$ mit $a(t) = O(e^{z_0 t})$ für $t \to \infty$ $(\mathrm{Re}\,(z_0) > 0)$, so konvergiert das Integral*

$$\int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |jk_j \, e^{-jtz} a(t)| \, dt \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z_0).$$

Beweis: Es sei $\mathrm{Re}(z) > 0$. Wegen der Voraussetzung $\{k_j\} \in C_{r,s}$ und Hilfssatz 2.1 ist

$$\int_0^{1/3} \sum_{j=2}^{\infty} |jk_j| \, e^{-jt\mathrm{Re}(z)} \, |a(t)| \, dt$$

$$\leqq M \int_0^{1/3} \sum_{j=2}^{\infty} j^r \log^s j \, e^{-jt\mathrm{Re}(z)} \, |a(t)| \, dt$$

$$\leqq M \int_0^{1/3} \big(t \,\mathrm{Re}\,(z)\big)^{-r-1} \, |\log\,[t \,\mathrm{Re}\,(z)]|^s \, |a(t)| \, dt$$

$$\leqq M \frac{(1 + |\log \mathrm{Re}\,(z)|)^s}{[\mathrm{Re}\,(z)]^{r+1}} \int_0^{1/3} |a(t)| \, t^{-r-1} \, |\log t|^s \, dt < \infty.$$

Das letzte Integral ist konvergent, da $a(t)$ nach Voraussetzung aus $V_{r,s}^c[0, \infty)$ ist.

Für den anderen Teil des Integrals ergibt sich wegen

$$\sum_{j=1}^{\infty} jk_j \, e^{-jtz} \sim k_1 \, e^{-tz} \quad \text{und} \quad a(t) = O(e^{z_0 t}) \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

die Abschätzung

$$\int_{1/3}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |jk_j| \, e^{-jt\mathrm{Re}(z)} \, |a(t)| \, dt \leqq M \int_{1/3}^{\infty} e^{-t(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0))} \, dt < \infty$$

für $\mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z_0)$ ∎

Hilfssatz 2.4: *Es sei* $a(t) \in V^c_{r,s+\sigma+1}[0, \infty)$ *und genüge zusätzlich der Bedingung* $a(t) = O(e^{z_0 t})$ *für* $t \to \infty$ *und* $\mathrm{Re}\,(z_0) > 0$, *dann konvergiert das Integral*

$$\int_0^{\infty} |a(t)| \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} n^r l^r \log^s n \log^{\sigma} l \, e^{-nlt\mathrm{Re}(z)} \, dt$$

für alle z *mit* $\mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z_0)$.

Verwendet man die Abschätzung des Hilfssatzes 2.2, so verläuft der Beweis im übrigen analog zu dem von Hilfssatz 2.3.

Für die Herleitung von Beziehungen zur Laplace-Transformation muß die Kernfunktion der verallgemeinerten Lambert-Transformation in eine Taylorreihe im Punkt $z = 0$ entwickelt werden:

$$k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j z^j .$$

In den im nächsten Abschnitt geführten Beweisen werden Abschätzungen dieser Taylorkoeffizienten benötigt. Die Kernfunktion soll so beschaffen sein, daß die Folge ihrer Taylorkoeffizienten zu einer Klasse $C_{r,s}$ gehört. Der folgende Hilfssatz, der hier ohne Beweis angegeben werden soll, zeigt, daß die Menge $\tilde{A}_E$ zumindest eine Teilmenge der Funktionen ist, die diese Bedingung erfüllen.

Hilfssatz 2.5: *Es sei* $k \in \tilde{A}_E$. *Auf dem Rand des Einheitskreises habe* k *die Singularitäten* z_l, $l = 1, 2, \ldots, N$. *In diesen Punkten sei*

$$k(z) = O[(z - z_l)^{-p_l} \log^{q_l} (z - z_l)] \quad \textit{für} \quad z \to z_l .$$

Dann ist die Folge der Taylorkoeffizienten $\{k_j\} \in C_{r,s}$ mit

$$r = \max_l \{\mathrm{Re}\,(p_l); 0\} \quad \text{und} \quad s = \max_{\substack{l \\ \mathrm{Re}(p_l)=r}} \{\mathrm{Re}\,(q_l); 0\} + 1 .$$

Den Beweis dieses Hilfssatzes findet man in [5].
Im weiteren haben r und s immer die im Hilfssatz 2.5 angegebene Bedeutung.

3.

Wir leiten nun eine Darstellung der verallgemeinerten Lambert-Transformation (1.1) durch eine Summe von Laplace-Stieltjes-Transformationen (1.2) her.

Satz 3.1: *Für* $k(z) \in \tilde{A}_E$ *und* $a(t) \in V^c_{r,s}[0, \infty)$ *sei* $\Lambda_k[a](z)$ (s. (1.1)) *konvergent für* $z = z_0$ *mit* $\operatorname{Re}(z_0) > 0$. *Dann gilt für* $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ *die Darstellung*

$$\Lambda_k[a](z) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \Lambda[a](jz),$$

wobei die Reihe absolut konvergiert.

Beweis: Nach Satz 3.1 aus Teil (I) gilt für $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ die Darstellung

$$\Lambda_k[a](z) = z \int_0^{\infty} k'(e^{-zt})\, a(t)\, e^{-zt}\, dt.$$

Entwickelt man nun $k'(z)$ in eine Taylorreihe im Punkt $z = 0$, so erhält man durch Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation die im Satz behauptete Beziehung:

$$\begin{aligned}\Lambda_k[a](z) &= z \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} jk_j\, e^{-zjt} a(t)\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} k_j zj \int_0^{\infty} e^{-zjt} a(t)\, dt \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} k_j \int_0^{\infty} e^{-zjt}\, da(t) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \Lambda[a](jz).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Auf analoge Weise zeigt man die absolute Konvergenz der Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |k_j \Lambda[a](jz)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| k_j zj \int_0^{\infty} e^{-zjt} a(t)\, dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |k_j zj| \int_0^{\infty} |e^{-zjt} a(t)|\, dt = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |k_j zj\, e^{-zjt} a(t)|\, dt < \infty.\end{aligned}$$

Da nach Hilfssatz 2.5 $\{k_j\} \in C_{r,s}$ ist, folgt die Konvergenz des letzten Integrals aus Hilfssatz 3.1 im Teil I und aus Hilfssatz 2.3. In beiden Fällen läßt sich mit diesem Hilfssatz auch die Vertauschung von Summe und Integral rechtfertigen ∎

Für eine weitere Darstellung der verallgemeinerten Lambert-Transformation durch die Laplace-Stieltjes-Transformation bilden wir aus dem Urbild $a(t)$ eine neue Funktion

$$b(t) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j a\left(\frac{t}{j}\right). \tag{3.2}$$

Im folgenden Hilfssatz werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $b(t)$ zur Menge der Originalfunktionen der Laplace-Stieltjes-Transformation (1.2) gehört. $V_a(t)$ bezeichne wie üblich die totale Variation der Funktion $a(t)$ auf dem Intervall $0 \leq u \leq t$.

Hilfssatz 3.1: *Gehört* $V_a(t)$ *zur Menge* $V^c_{r,s}[0, \infty)$, *so ist die Summe*

$$b(t) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j a\left(\frac{t}{j}\right)$$

absolut und auf jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergent. Die Funktion $b(t)$ *ist rechtsseitig stetig in* $[0, \infty)$ *und von beschränkter Variation in jedem Intervall* $[0, R]$ *mit* $R > 0$. *Weiterhin gilt* $\lim_{t \to +0} b(t) = 0$.

Bemerkung: Wegen $|a(t)| = |a(t) - a(0)| \leqq V_a(t)$ folgt aus $V_a(t) \in V^c_{r,s}[0, \infty)$ auch $a(t) \in V^c_{r,s}[0, \infty)$.

Beweis von Hilfssatz 3.1: Im folgenden Beweis bezeichne $\alpha(x)$ die Treppenfunktion

$$\sum_{j=2}^{[x]} j^{r-1} \log^s j \quad \text{für} \quad x \geqq 2.$$

Diese Funktion ist rechtsseitig stetig. Für eine geeignet gewählte Konstante C gilt die Abschätzung

$$\alpha(x) \leqq \log^s x \sum_{j=2}^{[x]} j^{r-1} \leqq \begin{cases} C x^r \log^s x & \text{für } r > 0 \\ C \log^{s+1} x & \text{für } r = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Wir beweisen den Hilfssatz für $r > 0$, im Fall $r = 0$ verläuft der Beweis analog. Es sei $m > n > 1$ und $t \leqq R$. Dann ist

$$\sum_{j=n+1}^{m} \left| k_j a\left(\frac{t}{j}\right)\right| \leqq M \sum_{j=n+1}^{m} j^{r-1} \log^s j \, V_a\left(\frac{R}{j}\right).$$

Die rechte Summe kann man nun leicht als Stieltjes-Integral $\int\limits_n^m V_a\left(\frac{R}{x}\right) d\alpha(x)$ schreiben. Zweimalige partielle Integration und Anwendung der Abschätzung (3.3) führt zur Abschätzung durch

$$C_1 V_a\left(\frac{R}{h}\right) \log^s n \cdot n^r + C_2 \int\limits_n^m x^{r-1} \log^s x \, V_a\left(\frac{R}{x}\right) dx.$$

Das Integral wird nun mit der Substitution $\frac{R}{x} = u$ umgeformt und weiter abgeschätzt. Für $R \leqq \frac{n}{3}$ erhält man

$$\sum_{j=n+1}^{m} \left| k_j a\left(\frac{t}{j}\right)\right|$$
$$\leqq C_1 V_a\left(\frac{R}{n}\right) n^r \log^s n + C_2 R^r (1 + \log R)^s \int\limits_0^{R/n} V_a(u)\, u^{-r-1} \, |\log u|^s \, du.$$

Da aus der Voraussetzung $V_a(t) \in V^c_{r,s}[0, \infty)$ auch folgt

$$V_a(t) = o(t^r \, |\log t|^{-s-1}) \quad \text{für} \quad t \to +0,$$

lassen sich die beiden Summanden für $n > n_0 \geqq 3R$ beliebig klein machen. Hieraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3.2) auf jedem Intervall $[0, R]$ mit $R > 0$. Wegen $a(t) \in V^c_{r,s}[0, \infty)$ ist somit auch $b(t)$ rechtsseitig stetig und $b(0) = 0$.

Es sei nun $t_1 = 0, t_2, \ldots, t_N, t_{N+1} = R$ eine Zerlegung des Intervalles $[0, R]$. Wir bilden die Variation von $b(t)$ für diese Zerlegung:

$$\sum_{l=1}^{N} |b(t_{l+1}) - b(t_l)| = \sum_{l=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{\infty} k_j a\left(\frac{t_{l+1}}{j}\right) - \sum_{j=1}^{\infty} k_j a\left(\frac{t_l}{j}\right)\right|$$
$$= \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |k_j| \left| a\left(\frac{t_{l+1}}{j}\right) - a\left(\frac{t_l}{j}\right)\right|.$$

Die folgende Umordnung der Summe wird nachträglich durch den Nachweis der Konvergenz gerechtfertigt:

$$\sum_{l=1}^{N} |b(t_{l+1}) - b(t_l)| = \sum_{j=1}^{\infty} |k_j| \sum_{l=1}^{N} \left| a\left(\frac{t_{l+1}}{j}\right) - a\left(\frac{t_l}{j}\right)\right| \leqq \sum_{j=1}^{\infty} |k_j|\, V_a\left(\frac{R}{j}\right).$$

Da die totale Variation von $V_a(u)$ auf dem Intervall $0 \leqq u \leqq t$ wieder $V_a(t)$ ist, kann der erste Teil des Beweises anstelle von $a(t)$ auch auf $V_a(t)$ angewendet werden. Daraus folgt die Konvergenz der rechts stehenden Summe und damit die beschränkte Variation von $b(t)$ ∎

Da $b(t)$ von beschränkter Variation ist, können wir Stieltjes-Integrale mit $b(t)$ im Differential bilden.

Satz 3.2: *Für $k \in \tilde{A}_E$ und $V_a \in V^c_{r,s}[0, \infty)$ sei das Integral* (1.1) *konvergent für $z = z_0$ mit* $\operatorname{Re}(z_0) > 0$. *Dann kann die* verallgemeinerte Lambert-Transformation *für* $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ *als* Laplace-Stieltjes-Transformierte *der Funktion $b(t)$* (*siehe* (3.2)) *dargestellt werden:*

$$\Lambda_k[a](z) = \Lambda[b](z) := \int_0^\infty e^{-zt}\, db(t). \tag{3.4}$$

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Darstellung (3.1), der Substitution $jt = \tau$ und der anschließenden Vertauschung von Summation und Integration (die wegen Hilfssatz 3.1 aus Teil I, Hilfssatz 2.3 und [4: S. 76–81] erlaubt ist). Man erhält die Darstellung der verallgemeinerten Lambert-Transformation durch ein absolut konvergentes Laplace-Integral

$$\Lambda_k[a](z) = z \int_0^\infty e^{-z\tau}\, b(\tau)\, d\tau.$$

Da aus der absoluten Konvergenz des rechten Integrals die Aussage $b(t) = o(e^{zt})$ folgt und $b(t)$ von beschränkter Variation ist, kann das Laplace-Integral durch partielle Integration in ein Laplace-Stieltjes-Integral umgeformt werden, und man erhält

$$\Lambda_k[a](z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, db(t) \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0).$$

Im Satz 3.1 wurde die verallgemeinerte Lambert-Transformation durch eine Summe von Laplace-Stieltjes-Transformationen dargestellt. Unser nächstes Ziel ist die Darstellung der Laplace-Stieltjes-Transformation (1.2) durch eine Summe von verallgemeinerten Lambert-Transformationen (1.1).

Satz 3.3: *Es sei*

1. $k \in \tilde{A}_E$,
2. $\{k_l\} \approx \{\varkappa_l\}$ *mit* $\{\varkappa_l\} \in C_{r,\sigma}$ $(\sigma \geqq 0)$,
3. $a \in V^c_{r,s+\sigma+1}[0, \infty)$,
4. $\Lambda_k[a](z)$ *konvergent für* $z = z_0$ *mit* $\operatorname{Re}(z_0) > 0$.

Dann ist

$$\Lambda[a](z) = \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \Lambda_k[a](lz) \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0). \tag{3.5}$$

Beweis: Setzt man die Formel (3.1) aus Satz 3.1 in (3.5) ein und ordnet die entstehende Doppelsumme um, so erhält man sofort das behauptete Resultat (siehe Möbiussche Umkehrformel [3: Abschnitt 16.4]):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \Lambda_k[a]\,(lz) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_l k_j \Lambda[a]\,(ljz) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d/m} \varkappa_{m/d} k_d \Lambda[a]\,(mz) = \Lambda[a]\,(z).$$

Es muß nur noch die absolute Konvergenz der Doppelsumme nachgewiesen werden, damit die Umordnung möglich ist. Der Nachweis gelingt durch die Abschätzung des Ausdrucks

$$S = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} |\varkappa_l k_j \Lambda[a]\,(ljz)| \leqq M \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} j^r l^r \log^s j \log^\sigma l\, |z| \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ljt\,\mathrm{Re}(z)}\, |a(t)|\, dt.$$

Nach der Vertauschung der Summen mit dem Integral, die nachträglich durch den Nachweis der Konvergenz gerechtfertigt wird, ergibt sich

$$S \leqq M\, |z| \int_0^{\infty} |a(t)| \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} j^r l^r \log^s j \log^\sigma l\, \mathrm{e}^{-ljt\,\mathrm{Re}(z)}\, dt.$$

Aus der Voraussetzung 4 folgt zusammen mit dem Hilfssatz 3.1 aus Teil I die Beziehung $a(t) = o(\mathrm{e}^{z_0 t})$ für $t \to +\infty$. Deshalb kann der Hilfssatz 2.4 angewendet werden, und das letzte Integral ist für $\mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z_0)$ konvergent. Eine analoge Abschätzung für den verbleibenden Rest der Doppelsumme unter Anwendung von Hilfssatz 2.3 zeigt die Richtigkeit der obigen Umformung für $\mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z_0)$ ∎

4.

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt bewiesenen Beziehungen können nun Umkehrformeln für die verallgemeinerte Lambert-Transformation aufgestellt werden.

Satz 4.1: *Es sei*

1. $k \in \tilde{A}_E$,
2. $\{k_j\} \approx \{\varkappa_l\}$ *mit* $\{\varkappa_l\} \in C_{r,\sigma}$ $(\sigma \geqq 0)$,
3. $a \in V^c_{r,s+\sigma+1}[0, \infty)$,
4. $\Lambda_k[a]\,(z)$ *konvergent für* $z = z_0$ *mit* $\mathrm{Re}\,(z_0) > 0$.

Dann gilt für die verallgemeinerte Lambert-Transformation die Umkehrformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z} \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \Lambda_k[a]\,(lz)\, dz = \begin{cases} \frac{1}{2}\,[a(t) + a(t-0)] & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leqq 0 \end{cases}$$

mit $c > \mathrm{Re}\,(z_0)$.

Zum Beweis braucht man nur die komplexe Umkehrformel für die Laplace-Transformation auf die Formel (3.5) anzuwenden.

Satz 4.2: *Ersetzt man in den Voraussetzungen zu Satz 4.1 die Voraussetzung 3 durch die schärfere Bedingung $V_a \in V_{r,s+\sigma+1}[0,\infty)$, so gilt für die verallgemeinerte Lambert-Transformation die Umkehrformel*

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{z} e^{zt/l} \Lambda_k[a](z)\, dz = \begin{cases} \frac{1}{2}[a(t) + a(t-0)] & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leqq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

mit $c > \mathrm{Re}(z_0)$.

Beweis: Mit der Formel (3.4) erhält man aus (4.1) sofort den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \left(b\left(\frac{t}{l}\right) + b\left(\frac{t-0}{l}\right)\right) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \left[\sum_{j=1}^{\infty} k_j a\left(\frac{t}{jl}\right) + \lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{j=1}^{\infty} k_j a\left(\frac{t-\varepsilon}{jl}\right)\right].$$

Durch formales Herausziehen des Grenzwertes vor die Summe und Umordnen der Doppelsumme erhält man das behauptete Ergebnis:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l \left(b\left(\frac{t}{l}\right) + b\left(\frac{t-0}{l}\right)\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_l k_j \left[a\left(\frac{t}{jl}\right) + a\left(\frac{t-\varepsilon}{jl}\right)\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d/m} \varkappa_{m/d} k_d \left[a\left(\frac{t}{m}\right) + a\left(\frac{t-\varepsilon}{m}\right)\right] = \frac{1}{2}[a(t) + a(t-0)]. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Voraussetzung 3 kann man durch einige Abschätzungen leicht die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Summe $\sum_{l=1}^{\infty} \varkappa_l b\left(\frac{t}{l}\right)$ nachweisen und damit die obige Rechnung rechtfertigen ∎

LITERATUR

[1] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I. Birkhäuser Verlag: Basel 1950.
[2] Glaeske, H.-J., und K. Stallknecht: Eine Verallgemeinerung der Lambert-Transformation (I). Z. Anal. Anw. (im Druck).
[3] Hardy, G. H., and E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers (3. Ed.). Oxford 1954.
[4] Saks, S.: Theorie de L'integrale. Warschau 1933.
[5] Stallknecht, K.: Über das Wachstum der Taylorkoeffizienten einer Klasse analytischer Funktionen. Wiss. Z. FSU Jena, Math.-Nat. R. **31** (1982), 651–656.

Manuskripteingang: 11. 06. 1982; in revidierter Fassung: 18. 03. 1983

VERFASSER:

Prof. Dr. H.-J. Glaeske und Dipl.-Math. K. Stallknecht
Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena
DDR-6900 Jena, Universitätshochhaus 17. OG