Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (3) (1984), S. 213–226

Asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b, c; z)$ für $|a| \to \infty$ und konstante b, c, z

E. Wagner

Es werden asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a,b,c;z)$ für $|a| \to \infty$ bei festen komplexen Werten von b, c $(c \neq 0, -1, -2, \ldots)$ und z $(z \neq 0, |\mathrm{Arg}(1-z)| < \pi)$ hergeleitet.

Выводятся асимптотические разложения гипергеометрической функции $F(a, b, c; z)$ при $|a| \to \infty$ и постоянных комплексных значениях b, c $(c \neq 0, -1, -2, \ldots)$ и z $(z \neq 0, |\mathrm{Arg}\,(1-z)| < \pi)$.

Asymptotic expansions of the hypergeometric function $F(a, b, c; z)$ for $|a| \to \infty$ are derived where b, c $(c \neq 0, -1, -2, \ldots)$ and z $(z \neq 0, |\mathrm{Arg}\,(1-z)| < \pi)$ are fixed complex numbers.

1. Einleitung

In [5] wurden asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b, c; z)$ für $|a| \to \infty$ bei festen Werten b, c, z bzw. für $|b| \to \infty$ bei festen Werten a, c, z hergeleitet, die die in [1] und [2] angegebenen falschen Darstellungen richtigstellten.

In der vorliegenden Arbeit werden die asymptotischen Darstellungen aus [5] zu asymptotischen Entwicklungen nach fallenden Potenzen von a bzw. b verfeinert. Der Beweis lehnt sich naturgemäß eng an denjenigen in [5] an, so daß an manchen Stellen auf die entsprechenden Rechnungen in [5] verwiesen werden kann.

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$a_1 = \mathrm{Re}\,(a)$, $a_2 = \mathrm{Im}\,(a)$, $\alpha = \mathrm{Arg}\, a \in (-\pi, \pi]$ und entsprechend für b, c;
$x = \mathrm{Re}\,(z)$, $y = \mathrm{Im}\,(z)$;
$\mathfrak{G} = \{z \in \mathscr{C} : z \neq 0, z \notin [1, \infty)\}$;
$(b)_0 = 1$, $(b)_n = b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)$ für $n = 1, 2, \ldots$

Es bedeutet

$a_\nu = O_R(1)$, daß a_ν nach oben (rechts) beschränkt ist;
$a_\nu = O_L(1)$, daß a_ν nach unten (links) beschränkt ist.

Falls nicht ausdrücklich eine andere Regelung vereinbart ist, sollen für Potenzen stets die Hauptwerte genommen werden, d. h.

$$w^p = \exp\{p[\ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w]\} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Arg}\, w \in (-\pi, \pi]$$

für beliebige komplexe Zahlen w und p.

2. Hauptsatz

Satz 1: *Bei festen Werten $z \in \mathfrak{G}$, b und c mit $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ gelten für $|a| \to \infty$ die asymptotischen Entwicklungen*

$$\begin{aligned}\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = {} & \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,(b)_\nu\, a^{-\nu} + o(a^{-n})\right] \\ & + \lambda(1-z)^{c-b-a}\,\frac{(-az)^{b-c}}{\Gamma(b)}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(c-b, c; \frac{z}{z-1}\right)\right. \\ & \left.\times\,(c-b)_\nu\, a^{-\nu} + o(a^{-n})\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).\end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist

(I) $\lambda = e^{\pi i(b-c)}$ *und* $\arg(-az) \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *in folgenden Fällen:*

1. $y > 0$ *und* $a_1 = O_L(1)$, 2. $z < 0$ *und* $a_2 = O_R(1)$,
3. $y < 0$ *und* $a_1 = O_R(1)$, 4. $0 < z < 1$ *und* $a_2 = O_L(1)$;

(II) $\lambda = e^{-\pi i(b-c)}$ *und* $\arg(-az) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *in folgenden Fällen:*

5. $y > 0$ *und* $a_1 = O_R(1)$, 6. $z < 0$ *und* $a_2 = O_L(1)$,
7. $y < 0$ *und* $a_1 = O_L(1)$, 8. $0 < z < 1$ *und* $a_2 = O_R(1)$.

Die Koeffizienten c_ν sind die Taylor-Koeffizienten ihrer erzeugenden Funktion

$$g(s; b, c; z) = \left(\frac{e^s - 1}{s}\right)^{b-1}\left(\frac{e^s - 1 + z}{z}\right)^{c-b-1} e^s \tag{2}$$

im Nullpunkt:

$$g(s; b, c; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(b, c; z)\, s^\nu \qquad (|s| < r). \tag{3}$$

Am Ende dieser Arbeit werden ein Weg zur Berechnung der c_ν sowie explizite Darstellungen der ersten c_ν angegeben. Offenbar ist $c_0 = 1$.

3. Beweis des Hauptsatzes

Der Beweis von Satz 1 wird, ausgehend von der bekannten Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktionen

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}\,dt \qquad (c_1 > b_1 > 0,\ z \in \mathfrak{G}), \tag{4}$$

in folgenden Etappen (die nicht mit den Beweisschritten in [5] übereinstimmen) geführt:

1. Darstellung von F als Summe komplexer Kurvenintegrale unter den Voraussetzungen $a_1 \geqq 0$; $c_1 > b_1 > 0$, $0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$;
2. Abschätzung von Teilintegralen der erhaltenen Zerlegung;
3. Übertragung des erhaltenen Resultates auf den Fall $a_1 < 0$, $c_1 > b_1 > 0$, $0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$;
4. Gültigkeitsnachweis der erhaltenen Ergebnisse für alle $z \in \mathfrak{G}$ unter den Bedingungen $c_1 > b_1 > 0$;

5. Asymptotische Entwicklung des „Hauptintegrals“ für $a_1 \geqq 0$, $c_1 > b_1 > 0$, $z \in \mathfrak{G}$;

6. Beweis von (1) für $z \in \mathfrak{G}$ unter den Bedingungen $a_1 \geqq 0$, $c_1 > b_1 > 0$;

7. Beweis von (1) unter den Bedingungen $a_1 < 0$, $c_1 > b_1 > 0$ für $z \in \mathfrak{G}$;

8. Abschwächung der Trennbedingungen für die Fälle (I) und (II) auf einseitige Beschränktheitsbedingungen;

9. Eliminierung der Bedingungen $c_1 > b_1 > 0$.

Zur Abkürzung bezeichnen wir den Integranden in (4) mit $f = f(t; a, b, c; z)$.

Zu 1.: Wir setzen $a_1 \geqq 0$, $c_1 > b_1 > 0$ und $0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$ voraus. Wie in [5] sei φ ein fester Winkel, der folgenden Bedingungen genüge:

$$0 > \varphi > \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} & \text{für } \operatorname{Arg} z = \pi, \\ \max\left(-\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{Arg}\dfrac{z}{z-1}\right) & \text{für } y > 0, \end{cases} \quad \text{falls } a_2 \geqq 0, \tag{5}$$

$$0 < \varphi < \min\left(\frac{\pi}{4}, \operatorname{Arg} z\right), \quad \text{falls } a_2 < 0. \tag{6}$$

Dann folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz aus (4)

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \sum_{\nu=1}^{5} \int_{\mathfrak{C}_\nu} f\,dt, \tag{7}$$

wobei mit $\mathfrak{C}_\nu$ folgende Integrationswege bezeichnet sind [5]:

$\mathfrak{C}_1$: Geradlinige Verbindung von 0 bis $\varepsilon_1 = -|a|^{-3/4} e^{i\varphi}/z$;
$\mathfrak{C}_2$: Geradlinige Verlängerung von $\mathfrak{C}_1$ bis t_1 mit einem festen, hinreichend großen $|t_1|$;
$\mathfrak{C}_3$: Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $1/z$ und Radius R von t_1 bis $1 + t_2$ mit $\operatorname{Arg} t_2 = \operatorname{Arg}\dfrac{z-1}{z} + \varphi$;
$\mathfrak{C}_4$: Geradlinige Verbindung von $1 + t_2$ bis $1 + \varepsilon_2$ mit $|\varepsilon_2| = |a|^{-3/4}\left|\dfrac{z-1}{z}\right|$ und $\operatorname{Arg}\varepsilon_2 = \operatorname{Arg} t_2$;
$\mathfrak{C}_5$: Geradlinige Verlängerung von $\mathfrak{C}_4$ bis 1.

Wir führen die Bezeichnung

$$J(a, b, c; z) = \int_{\mathfrak{C}_1} f\,dt \qquad (c_1 > b_1 > 0,\ z \in \mathfrak{G}) \tag{8}$$

ein, wobei für $y < 0$ und $0 < z < 1$ in (5) und (6) die Terme z und $z/(z-1)$ zu vertauschen sind, und erhalten durch die Substitution $t = 1 - \tau$ leicht (es ist nur zu beachten, daß die Länge des Integrationsweges $\mathfrak{C}_5$ für hinreichend großes $|a|$ beliebig klein gemacht werden kann)

$$\int_{\mathfrak{C}_5} f\,dt = (1-z)^{-a}\, J\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right), \tag{9}$$

so daß (7) in folgender Gestalt geschrieben werden kann:

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \left\{ J(a, b, c; z) + (1-z)^{-a} J\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) + \sum_{\nu=2}^{4} \int_{\mathfrak{C}_\nu} f\,dt \right\} \quad (a_1 \geqq 0,\ c_1 > b_1 > 0,\ 0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi). \tag{10}$$

Zu 2.: Bei der Abschätzung der Integrale über $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{C}_4$ stützen wir uns auf die ausführlicheren Rechnungen in [5] und geben hier nur die wesentlichen Gesichtspunkte wieder. Wegen (5) und (6) können die Integrationswege $\mathfrak{C}_\nu$ ($\nu = 2, 3, 4$) weder durch den Nullpunkt noch durch den Punkt $t = 1$ gehen. Da außerdem $c_1 > b_1 > 0$ ist, erhält man die folgenden Abschätzungen, die gleichmäßig bezüglich aller $t \in \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4$ gelten:

$$t^{b-1} = \begin{cases} O(1) \;\forall\; t \in \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4 \\ O(|a|^{3/4}) \;\forall\; t \in \mathfrak{C}_2, \end{cases} \quad (1-t)^{c-b-1} = \begin{cases} O(1) \;\forall\; t \in \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \\ O(|a|^{3/4}) \;\forall\; t \in \mathfrak{C}_4 \end{cases} \quad (|a| \to \infty).$$

Aus ihnen folgt für den Zähler von f, gleichmäßig bez. $t \in \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4$,

$$t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} = O(|a|^{3/4}) \qquad (|a| \to \infty). \tag{11}$$

Für den Nenner von f wurden in [5] die folgenden, ebenfalls gleichmäßig bezüglich t geltenden Abschätzungen hergeleitet:

$$(1-tz)^{-a} = \begin{cases} O(\exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi|\}) & \forall\; t \in \mathfrak{C}_2, \\ O\big((1-z)^{-a}\exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi|\}\big) & \forall\; t \in \mathfrak{C}_4, \\ O(\exp\{-C\,|a|\}) \;\;\forall\; t \in \mathfrak{C}_3 \;\text{ und }\; a_2 \geqq 0, \\ O\big((1-z)^{-a}\exp\{-C\,|a|\}\big) \;\;\forall\; t \in \mathfrak{C}_3 \;\text{ und }\; a_2 < 0, \end{cases} \quad (|a| \to \infty) \tag{12}$$

wobei C eine von a und t unabhängige positive Konstante ist, falls man den Radius R des Kreisbogens $\mathfrak{C}_3$ bzw. $|t_1|$ hinreichend groß wählt.

Aus (11) und (12) erhält man, da die Längen der Integrationswege $\mathfrak{C}_\nu$ ($\nu = 2, 3, 4$) bezüglich a beschränkt sind,

$$\int_{\mathfrak{C}_2} f\,dt = O(|a|^{3/4}\exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi|\}),$$

$$\int_{\mathfrak{C}_4} f\,dt = O\big((1-z)^{-a}\,|a|^{3/4}\exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi|\}\big),$$

$$\int_{\mathfrak{C}_3} f\,dt = \begin{cases} O(\exp\{-C\,|a|\}), \;\text{ für }\; a_2 \geqq 0, \\ O\big((1-z)^{-a}\exp\{-C\,|a|\}\big) \;\text{ für }\; a_2 < 0, \end{cases}$$

woraus

$$\sum_{\nu=2}^{4}\int_{\mathfrak{C}_\nu} f\,dt = o(a^{-n}) + o\big((1-z)^{-a}\,a^{-n}\big) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

und somit für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\frac{F(a,b,c;z)}{\Gamma(c)} = \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} &\left\{J(a,b,c;z) + (1-z)^{-a}\,J\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right)\right. \\ &\left. + o(a^{-n}) + o\big((1-z)^{-a}\,a^{-n}\big)\right\}\end{aligned}$$

$$(a_1 \geqq 0,\; c_1 > b_1 > 0,\; 0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi) \tag{14}$$

folgt.

Zu 3.: Um den Fall $a_1 < 0$ zu behandeln, gehen wir von der bekannten Beziehung

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-b-a}\,F(c-a, c-b, c; z) \tag{15}$$

aus. Unter den Voraussetzungen $a_1 < 0$, $c_1 > b_1 > 0$, $0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$ kann in (15) für $F(c - a, c - b, c; z)$ die Zerlegung (14) eingesetzt werden. Man erhält

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(1-z)^{c-b-a}}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \Big\{ J(c-a, c-b, c; z) + (1-z)^{a-c}$$

$$\times J\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right) + o\big((c-a)^{-n}\big) + o\big((1-z)^{a-c}(c-a)^{-n}\big)\Big\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \Big\{ (1-z)^{c-b-a} J(c-a, c-b, c; z)$$

$$+ (1-z)^{-b} J\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right) + o\big((1-z)^{-a} a^{-n}\big) + o(a^{-n}) \Big\}$$

$$(a_1 < 0,\ c_1 > b_1 > 0,\ 0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi). \tag{16}$$

Zu 4.: Wir zeigen, daß (14) und (16) für alle $z \in \mathfrak{G}$ gilt. Dazu verwenden wir die bekannte Gleichung

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right). \tag{17}$$

Die Funktion $w = z/(z-1)$ bildet die Halbebene $\operatorname{Im}(z) < 0$ auf $\operatorname{Im}(w) > 0$ und das Intervall $(0, 1)$ der reellen z-Achse auf die negativ reelle w-Achse ab. Folglich kann $F\big(a, c-b, c; z/(z-1)\big)$ für $\operatorname{Im}(z) < 0$ und $z \in (0, 1)$ unter den Bedingungen $c_1 > b_1 > 0$ nach (14) oder (16) zerlegt werden. Setzt man diese Zerlegungen in (17) ein, so sieht man sofort, daß für $F(a, b, c; z)/\Gamma(c)$ wieder die Darstellungen (14) bzw. (16) erhalten werden. Lediglich die Summanden werden vertauscht.

Zu 5.: Mit der Substitution $s = \operatorname{Log}(1 - tz)$ bzw. $t = (1 - e^s)/z$ erhält man aus (8) für beliebige a, $c_1 > b_1 > 0$, $z \in \mathfrak{G}$

$$J(a, b, c; z) = -\frac{1}{z} \int_0^S \left(\frac{1-e^s}{z}\right)^{b-1} \left(\frac{e^s - 1 + z}{z}\right)^{c-b-1} e^s\, e^{-as}\, ds \tag{18}$$

mit

$$S = \operatorname{Log}(1 - \varepsilon_1 z) = \operatorname{Log}(1 + |a|^{-3/4} e^{i\varphi}) \sim |a|^{-3/4} e^{i\varphi} \qquad (|a| \to \infty). \tag{19}$$

Man überlegt sich leicht, daß der geradlinige Integrationsweg $\mathfrak{C}_1$ in einen (gekrümmten) Integrationsweg übergeht, dessen Anstiegswinkel im Nullpunkt gleich φ ist und der für $\varphi > 0$ konvex von oben bzw. für $\varphi < 0$ konvex von unten ist. Wegen (19) ist er in erster Näherung geradlinig, denn für hinreichend große $|a|$ weicht sein Anstieg in allen Punkten beliebig wenig von φ ab.

Mit der leicht nachprüfbaren Beziehung

$$\left(\frac{1-e^s}{z}\right)^{b-1} = e^{2m\pi i b}(-z)^{-b+1} \left(\frac{e^s - 1}{s}\right)^{b-1} s^{b-1}, \tag{20}$$

$$m = m(a, z) = \begin{cases} 0 \text{ für } \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } z < 0 \text{ oder } 0 < z < 1 \text{ mit } a_2 < 0, \\ 1 \text{ für } 0 < z < 1 \text{ mit } a_2 \geqq 0 \end{cases} \tag{21}$$

folgt aus (18) für alle a, $c_1 > b_1 > 0$, $z \in \mathfrak{G}$

$$J(a, b, c; z) = e^{2m\pi i b}(-z)^{-b} \int_0^S g(s; b, c; z)\, s^{b-1}\, e^{-as}\, ds, \tag{22}$$

wobei $g(s; b, c; z)$ durch (2) definiert wird. Setzt man $g(0; b, c; z) = 1$, so ist g bei beliebigen festen b, c, z $(z \neq 0)$ eine holomorphe Funktion von s in einer Kreisscheibe um den Nullpunkt mit einem von a, b, c unabhängigen Radius r, d. h., es gilt (3). Daraus folgt

$$g(s; b, c; z)\, s^{b-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(b, c; z)\, s^{\nu+b-1}, \qquad (|s| < r), \tag{23}$$

und der Integrationsweg von 0 nach S in (18) kann offenbar geradlinig gewählt werden. Für seinen Anstiegswinkel ψ gelten nach den obigen Überlegungen und unter Berücksichtigung von (5), (6) und (19) die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \psi = \varphi - o(1) \leqq \varphi < \dfrac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad a_2 < 0, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \varphi \leqq \psi = \varphi + o(1) < 0 \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0. \end{array}\right\} \tag{24}$$

Bezeichnet $\varrho = |\varrho|\, e^{i\psi}$, $|\varrho| < r$, eine von a unabhängige Zahl, so folgt nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Laplace-Transformation [4] aus (23) für $a_1 \geqq 0$, $|a| \to \infty$

$$\int_0^{\varrho} e^{-as} g(s; b, c; z)\, s^{b-1}\, ds = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\, \frac{\Gamma(\nu + b)}{a^{\nu+b}} + o(a^{-n-b}). \tag{25}$$

Bemerkung: Für $a_1 \geqq 0$ gilt nach (24) auf dem geradlinigen Integrationsweg von 0 nach ϱ

$$\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} < \psi \leqq \operatorname{Arg}(as) = \alpha + \psi \leqq \dfrac{\pi}{2} + \psi < \dfrac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2} + \psi \leqq \operatorname{Arg}(as) = \alpha + \psi \leqq \psi < \dfrac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad a_2 \leqq 0, \end{array} \tag{26}$$

und deshalb ist die für die Anwendung des erwähnten Abelschen Satzes erforderliche Bedingung $\operatorname{Arg}(as) \in [-\vartheta, \vartheta]$ mit $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ erfüllt.

Wir zeigen jetzt, daß in (25) die Integrationsgrenze ϱ durch S ersetzt werden kann. Es ist g wegen $|\varrho| < r$ auf dem Integrationsweg beschränkt ($|g| \leqq M$), also (mit $\sigma = |s|$)

$$\left| \int_S^{\varrho} e^{-as} g(s; b, c; z)\, s^{b-1}\, ds \right| \leqq M \int_{|S|}^{|\varrho|} e^{-|a|\sigma\cos(\alpha+\psi) - b_2\psi} \sigma^{b_1-1}\, d\sigma .$$

Nach (26) ist $\cos(\alpha + \psi) \geqq \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\psi|\right) = \sin|\psi| = \delta > 0$, so daß wir mit der Substitution $\sigma = \tau + |S|$

$$\left| \int_S^{\varrho} e^{-as} g(s; b, c; z)\, s^{b-1}\, ds \right| \leqq M e^{-b_2\psi - \delta|a|S} \int_0^{\infty} e^{-\delta|a|\tau} (\tau + |S|)^{b_1-1}\, d\tau \tag{27}$$

erhalten. Das Laplace-Integral auf der rechten Seite strebt für $|a| \to \infty$ gegen Null. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung von $|S| \sim |a|^{-3/4}$

$$\int_S^{\varrho} e^{-as} g(s; b, c; z)\, s^{b-1}\, ds = o(\exp\{-\delta\, |a|^{1/4}\}) = o(a^{-n}), \tag{28}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Aus (22), (25) und (28) folgt

$$J(a, b, c; z) = e^{2m\pi ib}(-z)^{-b}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,\frac{\Gamma(\nu + b)}{a^{\nu+b}} + o(a^{-n-b})\right] \tag{29}$$

$$(a_1 \geqq 0,\; c_1 > b_1 > 0,\; z \in \mathfrak{G}).$$

Zu 6.: Durch Einsetzen von (29) in (14) erhält man

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c - b)}\Bigg\{e^{2m\pi ib}(-z)^{-b}\,a^{-b}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,\frac{\Gamma(\nu + b)}{a^\nu} + o(a^{-n})\right]$$
$$+ (1 - z)^{-a}\,e^{2\tilde m\pi i(c-b)}\left(\frac{z}{1 - z}\right)^{b-c} a^{b-c}$$
$$\times\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(c - b, c; \frac{z}{z - 1}\right)\frac{\Gamma(\nu + c - b)}{a^\nu} + o(a^{-n})\right]\Bigg\},$$

$(a_1 \geqq 0,\; c_1 > b_1 > 0,\; z \in \mathfrak{G})$,

mit (vgl. (21))

$$\tilde m = \tilde m(a, z) = m\left(a, \frac{z}{z - 1}\right)$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ für } \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } 0 < z < 1 \text{ oder } z < 0 \text{ mit } a_2 < 0, \\ 1 \text{ für } z < 0 \text{ mit } a_2 \geqq 0. \end{cases} \tag{30}$$

Hieraus folgt unter den angegebenen Bedingungen durch einfache Rechnung (1), aber zunächst unter der Einschränkung, daß die Fälle (I) und (II) von Satz 1 durch das Vorzeichen von a_2 und nicht durch einseitige Beschränktheit von a_2 unterschieden werden.

Zu 7.: Nach (22) ist für beliebige a, $c_1 > b_1 > 0$, $z \in \mathfrak{G}$

$$J\left(c - a, b, c; \frac{z}{z - 1}\right) = e^{2m^*\pi ib}\left(\frac{z}{1 - z}\right)^{-b}\int_0^S g\left(s; b, c; \frac{z}{z - 1}\right) s^{b-1}\,e^{-cs}\,e^{as}\,ds \tag{31}$$

mit (vgl. (30))

$$m^* = \tilde m(c - a, z)$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ für } \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } 0 < z < 1 \text{ oder } z < 0 \text{ mit } a_2 > c_2, \\ 1 \text{ für } z < 0 \text{ mit } a_2 \leqq c_2. \end{cases} \tag{32}$$

Wegen

$$g\left(s; b, c; \frac{z}{z - 1}\right) e^{-cs} = \left(\frac{e^s - 1}{s}\right)^{b-1}\left[\frac{e^s(z - 1) + 1}{z}\right]^{c-b-1} e^s\,e^{-cs}$$
$$= \left(\frac{e^{-s} - 1}{-s}\right)^{b-1}\left[\frac{e^{-s} - 1 + z}{z}\right]^{c-b-1} e^{-s}$$
$$= g(-s; b, c; z)$$

folgt aus (31)

$$J\left(c - a, b, c; \frac{z}{z - 1}\right) = e^{2m^*\pi ib}\left(\frac{z}{1 - z}\right)^{-b}\int_0^S g(-s; b, c; z)\,s^{b-1}\,e^{-(-a)s}\,ds. \tag{33}$$

Das Integral auf der rechten Seite läßt sich für $a_1 < 0$ wie im vorangehenden Beweisschritt asymptotisch entwickeln. Man hat nur c_ν durch $(-1)^\nu c_\nu$ und a durch $-a$ zu ersetzen. Das liefert

$$J\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right)$$
$$= e^{2m^* \pi i b}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-b}\left[\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu c_\nu(b, c; z)\frac{\Gamma(\nu+b)}{(-a)^{\nu+b}} + o(a^{-n-b})\right] \tag{34}$$
$$(a_1 < 0,\ c_1 > b_1 > 0,\ z \in \mathfrak{G}).$$

Ersetzt man b durch $c-b$ und $z/(z-1)$ durch z bzw. äquivalent z durch $z/(z-1)$, erhält man aus (34)

$$J(c-a, c-b, c; z)$$
$$= e^{2\hat{m}\pi i(c-b)}(-z)^{b-c}\left[\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu c_\nu\left(c-b, c; \frac{z}{z-1}\right)\frac{\Gamma(\nu+c-b)}{(-a)^{\nu+c-b}} + o(a^{-n-c+b})\right] \tag{35}$$
$$(a_1 < 0,\ c_1 > b_1 > 0,\ z \in \mathfrak{G})$$

mit (vgl. (21))

$$\hat{m} = m(c-a, z) = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } z < 0 \text{ oder } 0 < z < 1 \text{ mit } a_2 > c_2, \\ 1 & \text{für } 0 < z < 1 \text{ mit } a_2 \leqq c_2. \end{cases} \tag{36}$$

Wenn man nun (34) und (35) in (16) einsetzt, errechnet man ohne Schwierigkeiten die Behauptung (1) unter den Voraussetzungen $a_1 < 0$, $c_1 > b_1 > 0$, $z \in \mathfrak{G}$, aber wiederum unter der Einschränkung, daß die Fälle (I) und (II) nicht durch einseitige Beschränktheit von a_2, sondern scharf durch Positivität oder Nichtpositivität von $a_2 - c_2$ unterschieden werden.

Zu 8.: Bisher wurde bewiesen: Unter den Bedingungen $c_1 > b_1 > 0$, $z \in \mathfrak{G}$ gilt die Entwicklung (1), und zwar der Fall (I) für $\{y > 0;\ a_1 \geqq 0\}$ oder $\{z < 0,\ a_2 \leqq c_2\}$ oder $\{y < 0,\ a_1 < 0\}$ oder $\{z \in (0, 1),\ a_2 > c_2\}$; und der Fall (II) für $\{y > 0,\ a_1 < 0\}$ oder $\{z < 0,\ a_2 > c_2\}$ oder $\{y < 0,\ a_1 \geqq 0\}$ oder $\{z \in (0, 1),\ a_2 \leqq c_2\}$.

Offenbar kann in (1) eine der beiden Summen weggelassen werden, wenn $(1-z)^{-a}$ entweder exponentiell wächst oder exponentiell fällt. Wegen

$$|(1-z)^{-a}| = \exp\{-a_1 \ln|1-z| + a_2 \operatorname{Arg}(1-z)\}$$

gilt in folgenden Fällen $(1-z)^{-a} = o(a^{-n})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

A) $a_1 = O(1)$ und $a_2 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } y > 0, \\ -\infty, & \text{falls } y < 0, \end{cases}$

B) $a_2 = O(1)$ und $a_1 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } z < 0, \\ -\infty, & \text{falls } 0 < z < 1. \end{cases}$

In beiden Fällen A) und B) folgt aus (1), unabhängig von den Vorzeichen von a_1 bzw. $a_2 - c_2$, d. h. sowohl bei (I) als auch (II), dieselbe asymptotische Entwicklung

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,(b)_\nu\, a^{-\nu} + o(a^{-n})\right] \tag{37}$$

mit $\arg(-az) \in (-\pi/2, \pi/2)$ für hinreichend großes $|a|$.

Es strebt $(1 - z)^{-a}$ exponentiell gegen Unendlich, wenn

C) $a_1 = O(1)$ und $a_2 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } y < 0, \\ -\infty, & \text{falls } y > 0, \end{cases}$

D) $a_2 = O(1)$ und $a_1 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } 0 < z < 1, \\ -\infty, & \text{falls } z < 0. \end{cases}$

In diesen beiden Fällen folgt aus (1), ebenfalls unabhängig von den Vorzeichen von a_1 bzw. $c_2 - a_2$, also sowohl unter (I) als auch unter (II), die Entwicklung

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = (1 - z)^{c-b-a} \frac{(az)^{b-c}}{\Gamma(b)} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \left(c - b, c; \frac{z}{z-1}\right) (c - b)_\nu a^{-\nu} + o(a^{-n}) \right] \tag{38}$$

mit $\arg (az) \in (-\pi/2, \pi/2)$ für hinreichend großes $|a|$.

Damit ist Satz 1 unter den Bedingungen $c_1 > b_1 > 0$ bewiesen.

Zu 9.: Es soll nun abschließend gezeigt werden, daß (1) auch dann gilt, wenn b und c beliebige komplexe Zahlen sind ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$). In [5] wurde, ausgehend von den in [3] angegebenen Formeln 9.137, 15 und 9.137, 18, folgende Rekursionsbeziehung hergeleitet:

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = c(c + 1 - a) \frac{F(a, b + 1, c + 2; z)}{\Gamma(c + 2)}$$

$$+ a [c - (c - b) z] \frac{F(a + 1, b + 1, c + 2; z)}{\Gamma(c + 2)}. \tag{39}$$

Ist $c_1 + 2 > b_1 + 1 > 0$, d. h.

$$c_1 > b_1 - 1, \qquad b_1 > -1, \tag{40}$$

so gilt für beide hypergeometrischen Funktionen auf der rechten Seite von (39) die Entwicklung (1), also

$$\frac{F(a, b + 1, c + 2; z)}{\Gamma(c + 2)} = \frac{-1}{z} \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c - b + 1)} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b + 1)_\nu a^{-\nu-1} + o(a^{-n-1}) \right]$$

$$+ \lambda \frac{1 - z}{z} (1 - z)^{c-b-a} \frac{(-az)^{b-c}}{\Gamma(b + 1)}$$

$$\times \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(2)} (c - b + 1)_\nu a^{-\nu-1} + o(a^{-n-1}) \right] \tag{41}$$

mit $c_\nu^{(1)} = c_\nu(b + 1, c + 2; z)$ und $c_\nu^{(2)} = c_\nu \left(c - b + 1, c + 2, \frac{z}{z-1}\right)$, und, indem man in der vorstehenden Entwicklung a durch $a + 1$ ersetzt,

$$\frac{F(a + 1, b + 1, c + 2; z)}{\Gamma(c + 2)}$$

$$= \frac{-[-(a + 1) z]^{-b}}{z\Gamma(c - b + 1)} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b + 1)_\nu (a + 1)^{-\nu-1} + o(a^{-n-1}) \right]$$

$$+ \lambda \frac{(1 - z)^{c-b-a+1} [-(a + 1) z]^{b-c}}{z\Gamma(b + 1)} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(2)} (c - b + 1)_\nu (a + 1)^{-\nu-1} + o(a^{-n-1}) \right]. \tag{42}$$

Setzt man (41) und (42) in (39) ein, erhält man

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b+1)} \Phi(a, b, c; z) + \lambda(1-z)^{c-b-a} \frac{(-az)^{b-c}}{\Gamma(b+1)} \Phi\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) \tag{43}$$

mit

$$\Phi(a, b, c; z) := \frac{-c(c+1-a)}{z} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b+1)_\nu a^{-\nu-1} + o(a^{-n-1})\right] - \frac{c-(c-b)z}{z} \times \left(1+\frac{1}{a}\right)^{-b} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b+1)_\nu a^{-\nu} \left(1+\frac{1}{a}\right)^{-\nu-1} + o(a^{-n})\right]. \tag{44}$$

Wir werden im folgenden nachweisen, daß für beliebige a, b, c und $z \in \mathfrak{G}$

$$\Phi(a, b, c; z) = (c-b)\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,(b)_\nu\, a^{-\nu} + o(a^{-n})\right] \quad (|a| \to \infty) \tag{45}$$

gilt. Durch Einsetzen von (45) in (43) folgt dann unmittelbar die Entwicklung (1) unter den Bedingungen (40).

Es ist

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{a}\right)^{-b} \left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b+1)_\nu a^{-\nu} \left(1+\frac{1}{a}\right)^{-\nu-1} + o(a^{-n})\right] \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b+1)_\nu \left[\sum_{\mu=0}^{n-\nu} \binom{-b-\nu-1}{\mu} a^{-\nu-\mu}\right] + o(a^{-n}) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} (b+1)_\nu a^{-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} c_k^{(1)} + o(a^{-n}).
\end{aligned} \tag{46}$$

Aus (44) und (46) folgt

$$\begin{aligned}
&z\left[\Phi(a, b, c; z) - (c-b) \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)(b)_\nu a^{-\nu} + o(a^{-n})\right] \\
&= -c(c+1)\left[\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu-1}^{(1)} (b+1)_{\nu-1} a^{-\nu}\right] + c\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(1)} (b+1)_\nu a^{-\nu}\right] \\
&\quad - [c-(c-b)z]\left[\sum_{\nu=0}^{n} (b+1)_\nu a^{-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} c_k^{(1)}\right] \\
&\quad - (c-b)z\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,(b)_\nu a^{-\nu}\right] + o(a^{-n}),
\end{aligned}$$

und, unter Berücksichtigung von $c_0 = 1$,

$$z\left[\Phi(a, b, c; z) - (c-b) \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(b, c; z)\,(b)_\nu a^{-\nu} + o(a^{-n})\right] = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (b+1)_{\nu-1} a^{-\nu} + o(a^{-n}) \tag{47}$$

mit

$$\lambda_\nu = -c(c+1)\, c_{\nu-1}^{(1)} + c(\nu+b)\, c_\nu^{(1)} - b(c-b)\, z c_\nu(b, c; z) - (\nu+b)[c-(c-b)z]\left[\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} c_k^{(1)}\right]. \tag{48}$$

Es gilt (45), wenn alle λ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) identisch verschwinden. Um das zu zeigen, betrachten wir die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu s^\nu = -c(c+1) \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu-1}^{(1)} s^\nu + c \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu^{(1)} s^\nu + bc \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(1)} s^\nu$$

$$-b[c-(c-b)z] \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} c_k^{(1)} \right] s^\nu$$

$$-[c-(c-b)z] \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} c_k^{(1)} \right] \nu s^\nu - b(c-b)z \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(b, c; z) s^\nu.$$

Daraus folgt unter Beachtung von (3)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu s^\nu = -c(c+1) s g(s; b+1, c+2; z) + cs \frac{d}{ds} g(s; b+1, c+2; z)$$

$$+ bc[g(s; b+1, c+2; z) - 1] - b[c-(c-b)z][e^{-s} g(s; b+1, c+2; z) - 1]$$

$$- [c-(c-b)z] s \frac{d}{ds} [e^{-s} g(s; b+1, c+2; z)] - b(c-b) \times z[g(s, b, c; z) - 1].$$

Setzt man in die rechte Seite dieser Gleichung die Darstellung (2) ein, so sieht man nach einiger Rechnung, daß sie identisch verschwindet, so daß alle λ_ν verschwinden, was zu beweisen war.

Damit haben wir die Gültigkeit von (1) unter den Bedingungen (40) bewiesen. Es ist klar, daß durch hinreichend oftmalige Wiederholung des Verfahrens jedes beliebige komplexwertige Zahlenpaar b, c ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) in den Gültigkeitsbereich der Entwicklung (1) einbezogen werden kann. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen ∎

4. Folgerungen

Im Beweisschritt 8 wurde gezeigt, daß in der Entwicklung (1) eine der Summen weggelassen werden kann, wenn a_1 oder a_2 beschränkt ist, denn dann strebt $(1-z)^{-a}$ exponentiell entweder gegen Null oder gegen Unendlich. Das gilt natürlich auch ohne die Einschränkung $c_1 > b_1 > 0$. Wir wollen dieses einfachere Resultat im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2: *Für beliebige feste komplexe Werte b, c ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) und $z \in \mathfrak{G}$ besitzt $F(a, b, c; z)$ bezüglich $|a| \to \infty$ die asymptotische Entwicklung*

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} \approx \frac{(1-z)^{c-b-a} (az)^{b-c}}{\Gamma(b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \left(c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) (c-b)_\nu a^{-\nu},$$

wenn

$a_1 = O(1), a_2 \to \infty$ *und* $y < 0$ *oder*

$a_1 = O(1), a_2 \to -\infty$ *und* $y > 0$ *oder*

$a_2 = O(1), a_1 \to \infty$ *und* $0 < z < 1$ *oder*

$a_2 = O(1), a_1 \to -\infty$ *und* $z < 0$ *ist.*

Es ist

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} \approx \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(b, c; z)\,(b)_\nu\, a^{-\nu},$$

wenn

$$\begin{array}{llll} a_1 = O(1),\ a_2 \to \infty & \textit{und} & y > 0 & \textit{oder} \\ a_1 = O(1),\ a_2 \to -\infty & \textit{und} & y < 0 & \textit{oder} \\ a_2 = O(1),\ a_1 \to -\infty & \textit{und} & 0 < z < 1 & \textit{oder} \\ a_2 = O(1),\ a_1 \to \infty & \textit{und} & z < 0 & \textit{ist.} \end{array}$$

Wegen $F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z)$ erhält man durch Vertauschung von a und b in den Sätzen 1 und 2 unmittelbar asymptotische Entwicklungen von $F(a, b, c; z)$ bezüglich $|b| \to \infty$ bei festen Werten von a, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ und $z \in \mathfrak{G}$. Auf eine detaillierte Formulierung dieses Ergebnisses kann hier verzichtet werden. In [5] ist der entsprechende Satz für die asymptotischen Darstellungen angegeben.

5. Berechnung der Koeffizienten c_ν

Die Koeffizienten $c_\nu(b, c; z)$ sind als Taylor-Koeffizienten der durch (2) gegebenen Funktion $g(s; b, c; z)$ zwar prinzipiell für beliebig hohe Indizes ν berechenbar, aber die Rechnungen werden schon für relativ kleine Indizes sehr aufwendig und unübersichtlich, so daß wir noch eine geschlossene Darstellung der c_ν angeben wollen.

Setzt man $g(s) = A(s)\, B(s)\, e^s$ mit

$$A(s) = \left(\frac{e^s - 1}{s}\right)^{b-1} = \left(1 + \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{3!} + \cdots\right)^{b-1} = [1 + r_1(s)]^{b-1}, \tag{49}$$

$$B(s) = \left(\frac{e^s - 1 + z}{z}\right)^{c-b-1} = \left(1 + \frac{s}{z} + \frac{s^2}{2!z} + \cdots\right)^{c-b-1} = [1 + r_2(s)]^{c-b-1}, \tag{50}$$

so erhält man nach der Leibnizschen Produktregel

$$c_\nu(b, c; z) = \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(0) = \frac{1}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} A^{(k)}(0)\, B^{(\mu-k)}(0)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{1}{(\nu-\mu)!} \sum_{k=0}^{\mu} \alpha_k \beta_{\mu-k}, \tag{51}$$

wobei α_k und β_k die Taylorkoeffizienten der Funktionen $A(s)$ bzw. $B(s)$ im Nullpunkt sind:

$$\alpha_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}, \quad \beta_k = \frac{B^{(k)}(0)}{k!}. \tag{52}$$

Sie können wie folgt berechnet werden. Für eine im Nullpunkt holomorphe Funktion $r(s) = a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$ und eine beliebige Konstante γ ist

$$[1 + r(s)]^\gamma = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\gamma}{\lambda} r^\lambda(s) = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{\gamma}{\lambda} r^\lambda(s) + O(s^{k+1}) \qquad (s \to 0). \tag{53}$$

Nach dem Polynomiallehrsatz gilt für jedes $\lambda \in (0, 1, 2, \ldots, k)$

$$r^\lambda(s) = [a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_k s^k]^\lambda + O(s^{k+1})$$
$$= \sum \frac{\lambda!}{\lambda_1! \ldots \lambda_k!} a_1^{\lambda_1} \ldots a_k^{\lambda_k} s^{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + k\lambda_k} + O(s^{k+1}),$$

wobei über alle k-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ nichtnegativer ganzer Zahlen zu summieren ist, deren Summe gleich λ ist und für welche $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + k\lambda_k \leqq k$ ist. Wir ordnen nach Potenzen von s und erhalten

$$r^\lambda(s) = \sum_{\mu=\lambda}^{k} C_{\lambda\mu}^{(k)} s^\mu + O(s^{k+1}) \tag{54}$$

mit

$$C_{\lambda\mu}^{(k)} = C_{\lambda\mu}^{(k)}(a_1, \ldots, a_k) = \sum \frac{\lambda!}{\lambda_1! \ldots \lambda_k!} a_1^{\lambda_1} \ldots a_k^{\lambda_k} \quad (1 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq k), \tag{55}$$

wobei die Summation bei vorgegebenem festen $k \geqq 1$ über alle nichtnegativen, ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k &= \lambda \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + k\lambda_k &= \mu \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq k) \tag{56}$$

zu erstrecken ist. Setzt man (54) in (53) ein, so ergibt sich nach Vertauschung der Summationsreihenfolge

$$[1 + r(s)]^\gamma = 1 + \sum_{\mu=1}^{k} \left[\sum_{\lambda=1}^{\mu} \binom{\gamma}{\lambda} C_{\lambda\mu}^{(k)}\right] s^\mu + O(s^{k+1}) \tag{57}$$

und damit

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [1 + r(s)]^\gamma|_{s=0} = \sum_{\lambda=1}^{k} \binom{\gamma}{\lambda} C_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{58}$$

mit

$$C_{\lambda k} = C_{\lambda k}^{(k)} = \sum \frac{\lambda!}{\lambda_1! \ldots \lambda_k!} a_1^{\lambda_1} \ldots a_k^{\lambda_k}, \qquad (1 \leqq \lambda \leqq k), \tag{59}$$

wobei die Summation über alle nichtnegativen, ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k &= \lambda \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + k\lambda_k &= k \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

zu erstrecken ist. Insbesondere erhält man daraus nach (49), (50) und (52) für $r(s) = r_1(s)$, $\gamma = b - 1$ bzw. $r(s) = r_2(s)$, $\gamma = c - b - 1$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 = 1, \alpha_k &= \sum_{\lambda=1}^{k} \binom{b-1}{\lambda} C_{\lambda k}\left(\frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{(k+1)!}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ \beta_0 = 1, \beta_k &= \sum_{\lambda=1}^{k} \binom{c-b-1}{\lambda} C_{\lambda k}\left(1, \ldots, \frac{1}{k!}\right) z^{-\lambda} \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Aus (51) und (59) bis (61) lassen sich nun die c_ν übersichtlich berechnen. So erhält man aus (59) und (60) leicht

$$\begin{aligned} &C_{1i} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \\ &C_{22} = a_1^2, \quad C_{23} = 2a_1a_2, \quad C_{24} = a_2^2 + 2a_1a_3, \\ &C_{33} = a_1^3, \quad C_{34} = 3a_1^2a_2, \quad C_{44} = a_1^4. \end{aligned}$$

Daraus lassen sich nach (61) α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ und schließlich aus (51) c_1 bis c_4

ermitteln. Wir geben aus Platzgründen nur die Koeffizienten c_0 bis c_3 an:

$$c_0 = 1, c_1 = 1 + \frac{b-1}{2} + \frac{c-b-1}{z},$$

$$c_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(b-1) + \frac{1}{4}\binom{b-1}{2} + \frac{c-b-1}{2z}(3+b-1) + \frac{1}{z^2}\binom{c-b-1}{2},$$

$$c_3 = \frac{1}{6} + \frac{11}{24}(b-1) + \frac{5}{12}\binom{b-1}{2} + \frac{1}{8}\binom{b-1}{3} + \frac{c-b-1}{12z}\left[14 + 11(b-1)\right.$$
$$\left. + 3\binom{b-1}{2}\right] + \frac{1}{2z^2}\binom{c-b-1}{2}[4+(b-1)] + \frac{1}{z^3}\binom{c-b-1}{3}.$$

LITERATUR

[1] ABRAMOWITZ, M., and I. A. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions. New York 1965.

[2] BATEMAN, H., and A. ERDÉLYI: Higher Transcendental Functions, Vol. 1. New York 1953.

[3] RYSHIK, I. M., und I. S. GRADSTEIN: Summen-, Produkt- und Integraltafeln (Übers. aus dem Russ.). 2. Aufl. Berlin 1963.

[4] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 2. Basel—Stuttgart 1955 (Nachdruck 1972).

[5] WAGNER, E.: Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktionen für große Werte eines Parameters. Z. Anal. Anw. 1 (1982) 3, 1—11.

Manuskripteingang: 08. 11. 1982

VERFASSER:

Doz. Dr. sc. EBERHARD WAGNER
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle, Universitätsplatz 6