Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (3) (1984), S. 227–236

Über Grundlösungen von Differenzenoperatoren

E. Pfeifer und A. Rauhöft

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, Methoden der Lösung von Gleichungen der mathematischen Physik auf Differenzengleichungen, die aus diesen Gleichungen hervorgehen, zu übertragen. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff der Grundlösung für die entsprechenden Operatoren. Die natürliche Einführung dieses Begriffes wird dadurch ermöglicht, daß Differenzengleichungen als Funktionalgleichungen in Distributionsräumen verstanden werden. Es gelingt, nachzuweisen, daß jeder durch Vorwärtsdifferenzen entstandene lineare Differenzenoperator mit konstanten Koeffizienten mindestens eine Grundlösung in S' besitzt, die, in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter, nahe an der Grundlösung des zugehörigen Differentialoperators liegt. Der Existenznachweis ist konstruktiv. Als Beispiel für die Anwendung und mögliche Bedeutung von Grundlösungen für Differenzenoperatoren dient eine Anfangswertaufgabe für eine diskrete eindimensionale Wärmeleitungsgleichung.

Хорошо известны методы решения уравнений математической физики с помощью фундаментальных решений. Спрашивается, есть ли возможность переносить эти методы на случай разностных уравнений, возникающих путем дискретизации из дифференциальных проблем. Для этого разностные уравнения рассматриваются как функциональные уравнения в некоторых пространствах обобщенных функций. Показывается, что взякий линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами, возникающий путем вперед взятых разностей, имеет фундаментальное решение медленного роста, близкое к фундаментальному решению соответствующего дифференциального оператора. Доказательство-конструктивное. В качестве примера применения и возможного значения фундаментальных решений для разностных операторов приводится одна смешанная краевая задача для дискретного одномерного уравнения теплопроводности.

The method to solve problems of the mathematical physics using the so-called fundamental solutions and its properties is well-known. There is the question how does it work in the case of finite difference equations approximating the mentioned problems. An answer can be given treating difference equations as functional equations in certain spaces of distributions. By a suitable construction it is shown that every linear forward difference operator with constant coefficients possesses a tempered fundamental solution in a neighbourhood (with respect to the discretisation parameter) of the fundamental solution of the corresponding differential operator. An initial-value problem for the one-dimensional equation of heat conduction as an example for an useful application of discrete fundamental solutions closes the paper.

0.

In der modernen mathematischen Physik erreichte die Theorie der Distributionen in den vergangenen Jahren eine umfangreiche Bedeutung. Dabei sei nur auf [13] verwiesen, wo man eine ausführliche Darlegung findet. Mit der wachsenden Anwendung von Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungsproblemen wirft sich die Frage auf, ob der Begriff der Distribution und damit verbundene Methoden auch in diesem Fall entsprechende Dienste leisten. Mit der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, einige grundlegende Techniken, die bei der Behandlung von Differentialgleichungen Anwendung finden, auf die Behandlung durch Diskretisierung entstandener Differenzengleichungen zu übertragen. Durch die aufgezeigten Zusammenhänge ist es möglich, Differential- und Differenzengleichungsprobleme unter ausgewählten Aspekten völlig analog zu behandeln. Die unten angeführten Resultate ordnen sich in ihrer Aussage zum Teil in bekannte Tatsachen ein (vgl. [9]), bieten aber wegen der Art ihrer Erlangung hinreichend viele Ansatzpunkte für weitergehende Untersuchungen.

1. Wir betrachten im weiteren den Differentialoperator

$$P(D) = \sum_{|k| \leq m} a_k D^k, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad k = (k_1, \ldots, k_n), \quad k_j \in \mathbf{N}.$$

Dabei sei P ein Polynom m-ten Grades in n Variablen und D stehe abkürzend für den Ausdruck $(D_1, \ldots, D_n)$ mit $D_j = \partial/\partial x_j$. Gesucht seien Näherungslösungen der Differentialgleichung

$$P(D)\, u = f \tag{1}$$

mit vorgegebener rechter Seite $f \in D'$ [1]) unter Verwendung von Differenzenverfahren. Mit $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ bzw. $\bar{\partial} = (\bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_n)$ werden die Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenoperatoren bezeichnet. Der Operator ∂_j wirkt auf eine Distribution $u \in D'$ nach der Vorschrift

$$(\partial_j u)\,(x) = \frac{u(x + h_j e_j) - u(x)}{h_j},$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor und h_j der j-te Diskretisierungsparameter sind. Entsprechend wird

$$(\bar{\partial}_j u)\,(x) = \frac{u(x) - u(x - h_j e_j)}{h_j}$$

vereinbart.

Aus der Definition einer durch Verschiebung entstandenen Distribution in D' folgt unmittelbar

$$(\partial^k u, \varphi) = (-1)^{|k|}\,(u, \bar{\partial}^k \varphi) \quad \text{bzw.} \quad (\bar{\partial}^k u, \varphi) = (-1)^{|k|}\,(u, \partial^k \varphi);\ \varphi \in D.$$

Durch die Approximation der Differentialoperatoren D_j mit Hilfe der Operatoren ∂_j geht (1) in die Funktionalgleichung

$$P(\partial)\, u^{(h)} = f \tag{2}$$

über, wobei der Index (h) auf die Abhängigkeit der Lösung vom Diskretisierungsparameter $h = (h_1, \ldots, h_n)$ verweist.

Definition 1: Eine Distribution $E^{(h)}$ aus D' heißt *Fundamentallösung* (oder *Grundlösung*) des Operators $P(\partial)$, wenn sie der Gleichung

$$P(\partial)\, E^{(h)} = \delta \tag{3}$$

genügt.

Bevor wir im zweiten Abschnitt zum Existenznachweis sowie zu Konstruktionsmöglichkeiten für Grundlösungen von $P(\partial)$ übergehen, einige Aussagen, die die Anwendung von Grundlösungen betreffen.

---

[1]) Bezüglich der Einzelheiten in Definitionen und Bezeichnungen siehe z. B. [13].

Satz 1: *Sei $E^{(h)}$ eine Grundlösung des Operators $P(\partial)$ und $f \in D'$. Unter der Voraussetzung, daß die Faltung $E^{(h)} * f$ existiert, ist $u^{(h)} = E^{(h)} * f$ eine Lösung der Funktionalgleichung* (2). *Diese Lösung ist eindeutig in der Menge der mit $E^{(h)}$ faltbaren Distributionen.*

Beweis: Existiert die Faltung $u * v$, $u, v \in D'$, dann existieren auch $(\partial^k u) * v$ und $u * (\partial^k v)$ und es gilt $\partial^k(u * v) = (\partial^k u) * v = u * (\partial^k v)$. Hieraus und aus der Linearität der Faltung folgt unmittelbar der erste Teil der Behauptung. Für den Beweis des zweiten Teils nehmen wir an, daß $v^{(h)}$ eine Lösung von (2) ist, deren Faltung mit $E^{(h)}$ existiert. Dann haben wir $u^{(h)} - v^{(h)} = (u^{(h)} - v^{(h)}) * \delta = (u^{(h)} - v^{(h)}) * P(\partial)\, E^{(h)} = P(\partial)\, (u^{(h)} - v^{(h)}) * E^{(h)} = 0$ ∎

Satz 2: *Seien $E^{(h)}$ und E Grundlösungen der Operatoren $P(\partial)$ bzw. $P(D)$ und gelte $\lim_{h\to 0} E^{(h)} = E$ in D'. Existieren die Faltungen $u^{(h)} = E^{(h)} * f$ und $u = E * f$, dann konvergiert auch die Folge der Lösungen $u^{(h)}$ von* (2) *gegen u in D' und somit gegen eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung* (1).

2. Es ist bekannt, daß jeder lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten mindestens eine Grundlösung in D' (sogar in S') besitzt (vgl. [13]). Eine analoge Aussage kann auch für die entsprechenden Differenzenoperatoren nachgewiesen werden. Dabei ist die Grundlösung im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Sie kann aber in jedem Fall so konstruiert werden, daß sie für kleine h in der Nähe der Grundlösung des zugehörigen Differentialoperators liegt. In der vorliegenden Arbeit werden die in [10] vorgestellten Möglichkeiten zur Gewinnung von Grundlösungen für $P(D)$ auf die Konstruktion von $E^{(h)}$ übertragen. Dazu einige vorbereitende Bemerkungen.

Die Fouriertransformation F, die auf D gemäß

$$(F\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,t)}\varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in D, \qquad (x, t) = \sum_{j=1}^{n} x_j t_j,$$

definiert ist, bildet den Raum D bijektiv auf den Raum $Z = \{F\varphi : \varphi \in D\}$ ab. Die inverse Fouriertransformation genügt der Beziehung

$$(F^{-1}\psi)(t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(t,x)}\psi(x)\, dx, \qquad \psi \in Z.$$

Definition 2: Unter der *Fouriertransformierten* einer Distribution $u \in D'$ verstehen wir die Distribution $Fu \in Z'$ gemäß

$$(Fu, F\varphi) = (2\pi)^n\, (u, \varphi), \qquad \varphi \in D.$$

Mit dieser erweiterten Fouriertransformation wird der Raum D' bijektiv auf Z' abgebildet, wobei die inverse Abbildung der Vorschrift

$$(F^{-1}v, \varphi) = (2\pi)^{-n}\, (v, F\varphi),\ v \in Z', \qquad \varphi \in D,$$

genügt.

Lemma 1: *Es gilt*

$$\big(F(\partial_j u)\big)(x) = \big((e^{-ih_j x_j} - 1)/h_j\big)\, (Fu)(x).$$

Für jeden Multiindex $k \in \mathbf{N}^n$ ergibt sich daraus

$$\big(F(\partial^k u)\big)(x) = \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h}\right)^k (Fu)(x)$$

mit

$$\left(\frac{e^{-ihx}-1}{h}\right)^k = \left(\frac{e^{-ih_1x_1}-1}{h_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{e^{-ih_nx_n}-1}{h_n}\right)^{k_n}.$$

Zur Verdeutlichung der weiteren Ausführungen sei ein Satz aus [10] zitiert.

Satz 3. *Für jedes Polynom der Form*

$$P(-ix) = (-ix_1)^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(-ix_2, \ldots, -ix_n)\,(-ix_1)^k$$

existiert eine beschränkte und meßbare Funktion $\sigma_0(x_2, \ldots, x_n)$, *so daß für vorgegebenes* $\eta > 0$

$$|\bar{P}(-ix + \sigma_0 e_1)| \geqq \eta$$

gilt.[2]) *Die inverse Fouriertransformierte der gemäß*

$$(FE, F\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{(F\varphi)\left(x_1 + i\sigma_0(\tilde{x}), \tilde{x}\right)}{\bar{P}(-ix_1 + \sigma_0(\tilde{x}), -i\tilde{x})}\, dx_1\, d\tilde{x}, \quad \tilde{x} = (x_2, \ldots, x_n);$$

definierten Distribution FE ist eine Grundlösung des Operators $P(D)$.

Seien $t_k = t_k(\tilde{x})$ die Nullstellen des Polynoms $\zeta \to \bar{P}(\zeta, -i\tilde{x})$. Dann sei die Funktion σ_0 durch

$$\sigma_0(\tilde{x}) = \inf \{\lambda \in \langle 0, 2\varepsilon\rangle : \operatorname{dist}\left(\lambda, \{\operatorname{Re} t_k(\tilde{x})\}_{k=1}^m\right) \geqq \varepsilon/m\},$$

$\varepsilon > 0$, $(\varepsilon/m)^m = \eta$, definiert.

Satz 4: *Jeder Differenzenoperator der Form*

$$P(\partial) = \sum_{|k| \leqq m} a_k\, \partial^k, \qquad a_k \in \mathbf{C}, \tag{4}$$

besitzt mindestens eine Grundlösung in D'. *Diese kann in Abhängigkeit von h so konstruiert werden, daß die entstehende Folge* $\{E^{(h)}\}$ *von Grundlösungen mit* $h \to 0$ *in* D' *gegen eine Grundlösung des zugehörigen Differentialoperators* $P(D)$ *konvergiert.*

Zur Vereinfachung der Schreibweise in den folgenden Betrachtungen führen wir die Variable $s = (s_1, \ldots, s_n)$ mit

$$s_j = s_j(x_j) = (e^{-ih_jx_j} - 1)/h_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

ein.

Die Aussage von Satz 4 läßt sich im wesentlichen auf den folgenden Sachverhalt zurückführen.

Satz 5: *Für jedes Polynom der Form*

$$P(s) = s_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s_2, \ldots, s_n)\, s_1^k \tag{5}$$

existieren gleichmäßig bezüglich h beschränkte und meßbare Funktionen $\sigma_h(\tilde{x})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \sigma_h = \sigma_0$,

(ii) *für vorgegebenes* $\eta > 0$ *gilt gleichmäßig bezüglich h die Beziehung*

$$\left|\bar{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)\right| \geqq \eta; \qquad \hat{s}_1(\sigma_h) = s_1(x_1 + i\sigma_h), \qquad \tilde{s} = (s_2, \ldots, s_n). \tag{6}$$

---

[2]) $\bar{P}$ entsteht aus P, indem man für a_k die konjugiert komplexen Koeffizienten $\bar{a}_k$ einsetzt.

Beweis: Wir legen zunächst $\eta > 0$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$ und $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$ fest. Unter Verwendung der Nullstellen $q_j(\tilde{x}, \tilde{h})$, $j = 1, \ldots, m$, $\tilde{h} = (h_2, \ldots, h_n)$ des Polynoms $\mathbf{C} \ni \zeta \to \overline{P}(\zeta, \tilde{s})$ läßt sich $\overline{P}$ in der Form

$$\overline{P}(s) = \left(s_1 - q_1(\tilde{x}, \tilde{h})\right) \cdot \cdots \cdot \left(s_1 - q_m(\tilde{x}, \tilde{h})\right)$$

darstellen. Für $x_1 \in \mathbf{R}$ liegen die Werte von s_1 auf dem Rand des Kreises $K^{(h_1)}$ mit dem Mittelpunkt $(-1/h_1, 0)$ und dem Radius $1/h_1$. Wir führen reelle Größen $d_k(\tilde{x}, h)$, $k = 1, \ldots, m$, mit

$$d_k(\tilde{x}, h) = \operatorname{dist}\left(q_k(\tilde{x}, \tilde{h}), \operatorname{Fr} K^{(h_1)}\right)$$

und

$$\operatorname{sign} d_k(\tilde{x}, h) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad q_k(\tilde{x}, \tilde{h}) \notin K^{(h_1)} \\ -1 & \text{für} \quad q_k(\tilde{x}, \tilde{h}) \in K^{(h_1)} \end{cases}$$

ein. Mit $\alpha_h(\tilde{x})$ bezeichnen wir die kleinste Zahl des Intervalls $\langle 0, 2\varepsilon \rangle$, deren Abstand von der Menge $\{d_k(\tilde{x}, h)\}_{k=1}^m$ nicht kleiner als ε/m mit $\varepsilon = m\eta^{1/m}$ ist.

Die Funktionen $\sigma_h(\tilde{x}) = \dfrac{1}{h_1} \ln\left(1 + h_1 \alpha_h(\tilde{x})\right)$ sind meßbar und erfüllen die geforderten Bedingungen. Tatsächlich folgt aus der für $k = 1, \ldots, m$ gültigen Abschätzung

$$|\hat{s}_1(\sigma_h) - q_k(\tilde{x}, \tilde{h})| = |s_1 + \alpha_h(\tilde{x})\, e^{-ix_1h_1} - q_k(\tilde{x}, \tilde{h})| \geqq |\alpha_h(\tilde{x}) - d_k(\tilde{x}, h)| \geqq \varepsilon/m$$

die Beziehung $\left|\overline{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)\right| \geqq \eta$ und unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen

$$\lim_{h_1 \to 0} d_k(\tilde{x}, h) = \operatorname{Re} q_k(\tilde{x}, \tilde{h}), \qquad \lim_{\tilde{h} \to 0} q_k(\tilde{x}, \tilde{h}) = t_k(\tilde{x})$$

und somit

$$\lim_{h \to 0} \alpha_h(\tilde{x}) = \lim_{h \to 0} \sigma_h(\tilde{x}) = \sigma_0(\tilde{x}), \qquad \sup_h |\sigma_h(\tilde{x})| \leqq C \cdot \varepsilon \quad \blacksquare \tag{7}$$

Beweis von Satz 4: Durch Anwendung der Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung (3) erhalten wir aus Lemma 1

$$P(s)\, FE^{(h)} = 1 \tag{8}$$

und damit formal $FE^{(h)} = \dfrac{1}{P(s)}$. Satz 5 ermöglicht es, ähnlich wie in [10] dem Ausdruck $1/P(s)$ einen mathematischen Sinn zu verleihen. Wir berücksichtigen zunächst, daß jedes Polynom m-ten Grades der Variablen $(s_1, \ldots, s_n)$ in der Form (5) dargestellt werden kann (über eine geeignete Koordinatentransformation). Mit der Funktion σ_h aus Satz 5 definieren wir die Distribution $FE^{(h)}$ über

$$(FE^{(h)}, F\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(F\varphi)\,(x + i\sigma_h e_1)}{\overline{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)}\, dx.^{3)} \tag{9}$$

Auf Grund der Bedingung (6) und der für alle $\varphi \in D$ mit entsprechenden Konstanten γ_N und r gültigen Abschätzung

$$|(F\varphi)\,(z)| \leqq \gamma_N (1 + |z|)^{-N}\, e^{r|\operatorname{Im} z|}, \qquad z \in \mathbf{C}, \qquad N = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

---

3) Unter $(F\varphi)\,(z)$, $z \in \mathbf{C}$, werde hier die Fourier-Laplace-Transformierte verstanden, die eine Erweiterung der Fouriertransformierten auf die komplexe Ebene darstellt (vgl. [12]).

(vgl. [12]) ist die Existenz des Integrals in (9) gesichert. Darüber hinaus gilt

$$\left(P(s)\,FE^{(h)}, F\varphi\right) = \left(FE^{(h)}, \overline{P}(s)\,F\varphi\right) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\overline{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)(F\varphi)\,(x + i\sigma_h e_1)}{\overline{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)}\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} (F\varphi)\,(x + i\sigma_h e_1)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} (F\varphi)\,(x)\,dx = (1, F\varphi).$$

Damit ist die in (9) definierte Distribution $FE^{(h)}$ eine Lösung von (8) in Z' und man erhält mit Hilfe der inversen Fouriertransformation eine Grundlösung $E^{(h)}$ des Operators (4).[4]) Für den Konvergenznachweis beachtet man, daß infolge der Bedingungen (6), (7) und (10) für alle h

$$\left|\frac{(F\varphi)\,(x + i\sigma_h e_1)}{\overline{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)}\right| \leqq \frac{C_n}{1 + |x|^{n+1}}, \qquad C_n \in \mathbf{R}$$

gilt. Mit dem Satz von Lebesgue ergibt sich

$$\lim_{h\to 0}\,(FE^{(h)}, F\varphi) = \lim_{h\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{(F\varphi)\,(x + i\sigma_h e_1)}{\overline{P}\left(\hat{s}_1(\sigma_h), \tilde{s}\right)}\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{(F\varphi)\,(x + i\sigma_0 e_1)}{\overline{P}(-ix + \sigma_0 e_1)}\,dx = (FE, F\varphi).$$

Die Konvergenz von $E^{(h)}$ gegen E folgt nun unmittelbar aus der Stetigkeit der inversen Fouriertransformation ∎

3. Bisher wurde durch Anwendung der Fouriertransformation die Gleichung (3) auf eine nach $FE^{(h)}$ auflösbare Form gebracht. Dieses Vorgehen bietet auch günstige Voraussetzungen für die konkrete Ermittlung der Grundlösungen. Hierzu hat man zu beachten, daß die in (9) definierte Distribution $FE^{(h)}$ periodisch ist, d. h., es gilt

$$(FE^{(h)})\,(x + T_j e_j) = (FE^{(h)})\,(x), \qquad T_j = 2\pi/h_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Die inverse Fouriertransformierte einer periodischen Distribution $u \in Z'$ läßt sich unter Verwendung konstanter c_k in der Form

$$F^{-1}u = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} c_k\,\delta_{(k\omega)}, \qquad k\omega = \left(k_1\frac{2\pi}{T_1}, \ldots, k_n\frac{2\pi}{T_n}\right)$$

darstellen (vgl. [11])[5]). Im vorliegenden Falle erhalten wir also

$$E^{(h)} = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} c_k \delta_{(kh)}, \qquad kh = (k_1 h_1, \ldots, k_n h_n). \tag{11}$$

Wendet man in (11) beidseitig die Fouriertransformation an, so erhält man

$$(FE^{(h)})\,(x) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} c_k\, e^{i(kh,x)}$$

---

[4]) Für den Nachweis der Existenz einer Grundlösung für den Operator $P(\partial)$ ist lediglich die Bedingung (6) von Bedeutung. Diese wird bereits von einer einfacheren, von $\tilde{x}$ unabhängigen Verschiebung σ_h (die auf Grund der Beschränktheit der Nullstellen q_k immer existiert) erfüllt. Die obigen Funktionen σ_h wurden im Hinblick auf die gewünschte Konvergenz konstruiert.

[5]) Wir bezeichnen $\delta(x - a)$ durch $\delta_{(a)}(x)$.

und damit formal die verallgemeinerte Fourierreihe der Distribution $FE^{(h)}$. In Anlehnung an [13] lassen sich die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten c_k aus

$$c_k = \frac{FE^{(h)}, \bar{e}_T(x)\,e^{-i(kh,x)})}{T_1 \cdot \dots \cdot T_n} = \frac{1}{T_1 \cdot \dots \cdot T_n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\bar{e}_T(x + i\sigma_h e_1)\,e^{-i(kh,x+i\sigma_h e_1)}}{\bar{P}(\hat{s}_1(\sigma_h), \bar{s})}\,dx, \qquad T = (T_1, \dots, T_n),$$

mit $\bar{e}_T(x + i\sigma_h e_1) = e_{T_1}(x_1) \cdot \dots \cdot e_{T_n}(x_n) = e_T(x)$ berechnen. Dabei ist e_T eine beliebige Zerlegung der Eins für die n-Periode T, es gilt

(i) $\quad \sum\limits_k e_T(x + kT) = 1, \qquad e_T \geqq 0;$

(ii) $\quad \operatorname{supp} e_T \subset \left\langle -\frac{3}{4}T_1, \frac{3}{4}T_1 \right\rangle \times \dots \times \left\langle -\frac{3}{4}T_n, \frac{3}{4}T_n \right\rangle,$

(iii) $$e_{T_j}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x_j \in \left\langle -\frac{1}{4}T_j, \frac{1}{4}T_j \right\rangle \\ 1 - e_{T_j}(x_j + T_j) & \text{für} \quad x_j \in \left\langle -\frac{3}{4}T_j, -\frac{1}{4}T_j \right\rangle, \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n.$

Unter Ausnutzung der Eigenschaften (ii) und (iii) erhalten wir für die Berechnung der c_k die Vorschrift

$$c_k = \frac{h_1 \cdot \dots \cdot h_n}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi/h_1} \dots \int\limits_0^{2\pi/h_n} \frac{e^{-i(kh,x+i\sigma_h \cdot e_1)}}{\bar{P}(\hat{s}_1(\sigma_h), \bar{s})}\,dx \tag{12}$$

und damit in Verbindung mit (11) eine Vorschrift zur Ermittlung von Grundlösungen $E^{(h)}$ des Operators $P(\partial)$.

Satz 6: *Für die Koeffizienten der Grundlösung* (11) *von* (4) *gilt mit einer positiven Konstanten* M

$$|c_k| \leqq C(1 + |k|)^M, \qquad C = C(E^{(h)}).$$

Dieses Ergebnis, erstmals in [3] mit relativ aufwendigen Mitteln und ohne Verwendung eines Distributionsbegriffes bewiesen, ist nunmehr eine einfache Schlußfolgerung der in [13] bezüglich der verallgemeinerten Fourierreihen getroffenen Aussagen. Gegebenenfalls ist hierzu die Definition von σ_h geringfügig zu modifizieren.

4. In diesem letzten Abschnitt wollen wir im Sinne eines Beispiels die eindimensionale diskrete Wärmeleitungsgleichung

$$\bar{\partial}_t u^{(h,\tau)} - a^2 \bar{\partial}_x \partial_x u^{(h,\tau)} = f \tag{13}$$

betrachten. Wendet man auf beide Seiten von (13) mit $f = \delta$ die partielle Fouriertransformation bezüglich x an, so erhält man die gewöhnliche Differenzengleichung

$$\bar{\partial}_t F_x E^{(h,\tau)} - a^2 \frac{e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}}{h^2} F_x E^{(h,\tau)} = 1(\xi) \times \underline{\delta}(t)$$

zur Bestimmung von Grundlösungen $E^{(h,\tau)}$. Wie man sofort überprüfen kann, hat der gewöhnliche Differenzenoperator $\bar{\partial}_t - \lambda I$ die Grundlösung

$$\tau \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda\tau)^{-j-1} \delta_{(j\tau)}(t),$$

die für $\tau \to 0$ gegen $\theta(t)\, e^{-\lambda t}$ in D' konvergiert. Damit berechnet sich die Grundlösung von (13) über

$$F_x E^{(h,\tau)} = \tau \sum_{j=0}^{\infty} \left(w(\xi)\right)^{j+1} \delta_{(j\tau)}, \qquad w(\xi) = \left(1 - a^2 \frac{e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}}{h^2} \tau\right)^{-1}. \quad (14)$$

$F_x E^{(h,\tau)}$ konvergiert mit $h, \tau \to 0$ wegen $|w(\xi)| \leqq 1$ gegen die Fouriertransformierte $F_x E = \theta(t)\, e^{-a^2\xi^2 t}$ der Grundlösung des Wärmeleitungsoperators. Auf Grund der Stetigkeit der Fouriertransformation konvergiert damit natürlich auch $E^{(h,\tau)}$ gegen E in D'.

Formel (14) erscheint für die weiteren Berechnungen etwas unhandlich.

Satz 7: *Die Grundlösung der diskreten Wärmeleitungsgleichung* (13) *läßt sich „zeitschichtenweise" berechnen. Es gilt*

$$E^{(h,\tau)}(x, t + \tau) = F_\xi^{-1}(w) * \left(\tau\delta(x) \times \delta(t + \tau) + E^{(h,\tau)}(x, t)\right).$$

Diese Aussage erhält man unmittelbar aus (14).

Da w eine periodische Distribution ist, haben wir über (11) und (12)

$$(F_\xi^{-1} w)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_{(kh)}(x)$$

mit

$$c_k = \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi/h} \frac{e^{-ikh\xi}}{w(\xi)} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{h^2}{\tau a^2} \cdot \frac{z^{-k}}{(z - z_1)(z - z_2)} dz,$$

$$z_{1/2} = 1 + \frac{h^2}{2a^2\tau} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{2a^2\tau}\right)^2 - 1}.$$

Weitere Umformungen bringen $c_k = c_{-k} = \dfrac{h^2}{\tau a^2} \dfrac{z_2^{\,k}}{z_1 - z_2}$.

Satz 8: *Die durch $E^{(h,\tau)}$ gegebene Lösung $u^{(h,\tau)}$ der diskreten Wärmeleitungsgleichung* (13) *läßt sich „zeitschichtenweise" berechnen. Es gilt die Beziehung*

$$u^{(h,\tau)}(x, t + \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau c_k f(x - kh, t + \tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u^{(h,\tau)}(x - kh, t). \quad (15)$$

Die auftretenden Koeffizienten c_k haben die Eigenschaften

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to-\infty} c_k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = 1.$$

Beweis: Bezeichne $E_\tau^{(h,\tau)}(x, t)$ die um τ verschobene Grundlösung $E^{(h,\tau)}(x, t + \tau)$. Da die Lösung $u^{(h,\tau)}$ von (13) sich in der Form $u^{(h,\tau)} = E^{(h,\tau)} * f$ angeben läßt, bekommen wir

$$u^{(h,\tau)}(x, t + \tau) = (E^{(h,\tau)} * f)(x, t + \tau) = (E_\tau^{(h,\tau)} * f)(x, t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_{(kh)}(x) * \left(\tau\delta(x) \times \delta(t + \tau) + E^{(h,\tau)}(x, t)\right) * f(x, t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau c_k \delta(x - kh, t + \tau) * f(x, t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k E^{(h,\tau)}(x - kh, t) * f(x, t) \blacksquare$$

Wie man aus (15) entnimmt, wird durch das in (13) gegebene implizite Differenzenverfahren zur näherungsweisen Lösung des Wärmeleitungsproblems das bekannte „Phänomen" von der unendlich schnellen Ausbreitung der Wärme adäquat wiedergegeben, ein Umstand, der bei Verwendung des expliziten Verfahrens nicht eintritt.

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, daß es, wie bereits in [1] formuliert wurde, möglich ist, Probleme für Differentialgleichungen und solche für Differenzengleichungen unter bestimmten Gesichtspunkten parallel zu behandeln, auch mit modernen mathematischen Hilfsmitteln. Die hier entwickelten Berechnungsmöglichkeiten von Grundlösungen durch Kurvenintegrale findet man in anderer Form bereits in [1] sowie in [2], die Existenz von Grundlösungen mit langsamem Wachstum wurde in [3] gezeigt. Das von uns angeführte Beispiel zur Wärmeleitungsgleichung läßt sich in die Problematik von [4, 5] (explizite zweischichtige Differenzenverfahren) sowie [6—8] (gleichzeitige Behandlung impliziter Probleme) einordnen, die dort jeweils im Vordergrund stehende Frage nach der Stabilität in der Maximumnorm ist in unserem Falle eine Schlußfolgerung aus Satz 8. Am weitesten entwickelt erscheint die Thematik des Einsatzes „diskreter" Grundlösungen in [9], ihre Bedeutung für die Erstellung einer entsprechenden Potentialtheorie wurde erneut in [15] hervorgehoben. Hier ergeben sich auch unmittelbare Parallelen zu den Arbeiten um [14]. Nicht zuletzt sei auf die Verwandtschaft zu den vor allem in der letzten Zeit entwickelten Randelementmethoden (vgl. etwa [16]) verwiesen.

LITERATUR

[1] Stöhr, A.: Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Math. Nachr. 3 (1949), 208—242.

[2] Соболев, С. Л.: Об одном разностном уравнении. ДАН СССР 87 (1952), 341—343.

[3] Бачелис, Р. Д.: О разностных операторах с постоянными коэффициентами. Изв. АН СССР, Сер. мат. 19 (1955), 69—80.

[4] Aronson, D. G.: On the stability of certain finite difference approximations to parabolic systems of differential equations. Num. Math. 5 (1963), 118—137.

[5] Thomée, V.: Stability of difference schemes in the maximum-norm. J. Diff. Equations 1 (1965), 273—292.

[6] Сердюкова, С. И.: Об устойчивости в C линейных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами. Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 6 (1966), 477—486.

[7] Сердюкова, С. И.: Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 7 (1967), 497—509.

[8] Федорюк, М. В.: Об устойчивости в C задачи Коши для разностных уравнений и уравнений с частными производными. Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 7 (1967), 510—540.

[9] Рябенький, В. С.: Метод внутренних граничных условий. УМН XXVI, вып. 3 (159) (1971), 105—160.

[10] Maurin, K.: Methods of Hilbert spaces. PWN — Polish Scientific Publishers: Warszawa 1972.

[11] Szmydt, Z.: Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe. PWN — Polish Scientific Publishers: Warszawa 1972.

[12] Рудин, У.: Функциональный анализ. Изд-во Мир: Москва 1975.
[13] Владимиров, В. С.: Обобщенные функции в математической физике. Изд-во Наука: Москва 1979.
[14] O'LEARY, D. P., and O. WIDLUND: Capacitance matrix methods for the Helmholtz equation on general three-dimensional regions. Math. Comp. 33 (1979), 849—879.
[15] Рябенький, В. С., и А. Я. Белянков: Разностные потенциалы и проекторы. ДАН СССР 254 (1980), 1080—1084.
[16] BREBBIA, C. A. (ed.): Boundary element methods (Proc. of the Third International Seminar: Irvine/California, July 1981). Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1981.

Manuskripteingang: 14. 10. 1982; in revidierter Fassung: 21. 07. 1983

VERFASSER:

Dr. ECKEHARD PFEIFER und Dipl.-Math. ANGELA RAUHÖFT
Sektion Mathematik der Technischen Universität
DDR-8027 Dresden, Mommsenstr. 13