Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (3) (1984), S. 263–269

Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme mit λ-abhängigen Randbedingungen

G. Freiling

Es wird bewiesen, daß das System der Eigenfunktionen und zugeordneten Funktionen des Eigenwertproblems

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=2}^{n} p_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} = \lambda y, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$U_\nu(y, \lambda) = 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n,$$

mit irregulären, nichtzerfallenden, λ-abhängigen Randbedingungen vollständig in $L_2[0, 1]$ ist.

Доказывается, что система собственных и присоединенных функций задачи на собственные значения

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=2}^{n} p_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} = \lambda y, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$U_\nu(y, \lambda) = 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n,$$

с нерегулярными, неразложимыми λ-зависимыми краевыми условиями полна в $L_2[0,1]$.

We show that the system of eigen- and associated functions of the eigenvalue problem

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=2}^{n} p_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} = \lambda y, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$U_\nu(y, \lambda) = 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n,$$

with irregular two-point boundary conditions depending on λ is complete in $L_2[0, 1]$.

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß das System der Eigenfunktionen und zugeordneten Funktionen des Eigenwertproblems, das durch die Differentialgleichung

$$l(y) - \lambda y := y^{(n)} + \sum_{\nu=2}^{n} p_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} - \lambda y = 0 \tag{1}$$

und nichtzerfallende, irreguläre, λ-abhängige Randbedingungen

$$U_\nu(y, \lambda) = 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n, \tag{2}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ erzeugt wird, vollständig in $L_2[0, 1]$ ist.

Falls das Eigenwertproblem Birkhoff-regulär [9: S. 49] oder Stone-regulär (i. S. von [7, 1, 5] oder [10]) ist, ergibt sich dieser Vollständigkeitssatz unmittelbar aus der Tatsache, daß die Resolvente des zugehörigen linearen Differentialoperators auf allen Strahlen der λ-Ebene, auf denen kein Eigenwert liegt, höchstens wie eine Potenz von $|\lambda|$ für $|\lambda| \to \infty$ wachsen kann. Im Fall von irregulären Eigenwertproblemen können solche allgemeinen Vollständigkeitkriterien (siehe z. B. [2, 6]) nicht angewandt werden, da hier die Resolvente für $|\lambda| \to \infty$ exponentiell wächst (vgl. [3,8]). Mit zwei vollkommen verschiedenen Beweismethoden konnten jedoch Eberhard [4] und Shkalikov [12] zeigen, daß der Vollständigkeitssatz auch für irreguläre Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen gilt.

Wenn die Randbedingungen (2) nicht zerfallend sind und das Eigenwertproblem (1)—(2) nicht Stone-regulär ist, kann der Vollständigkeitssatz i. a. nicht mehr gelten, dies zeigt das Problem

$$y'' = \lambda y,$$

$$y'(0) + 2y'(1) = y(0) - 2y(1) = 0,$$

das keinen Eigenwert besitzt.

Yakubov und Mamedov [13] bewiesen kürzlich unter Verwendung allgemeiner Vollständigkeitskriterien einen Vollständigkeitssatz für eine spezielle Klasse irregulärer Eigenwertprobleme mit nichtzerfallenden Randbedingungen, für die die Resolvente auf einem Strahl der λ-Ebene wie $|\lambda|^{\frac{1-n}{n}}$ zu Null strebt.

2. Problemstellung und Eigenwertasymptotik

Wir betrachten hier Eigenwertprobleme, die sich (ggf. nach einer Substitution $x \mapsto 1 - x$) in der Form (1)—(2) mit Randbedingungen folgender Gestalt schreiben lassen:

$$U_\nu(y, \lambda) = U_{\nu 0}(y, \lambda) \qquad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq m > n - m,$$

$$U_\nu(y, \lambda) = U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) \qquad \text{für} \quad m + 1 \leqq \nu \leqq n,$$

mit

$$U_{\nu 0}(y, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j}(\lambda)\, y^{(j)}(0), \qquad U_{\nu 1}(y, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j}(\lambda)\, y^{(j)}(1)$$

und Polynomen $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j}$. Es wird vorausgesetzt, daß die Koeffizientenfunktionen p_ν, $2 \leqq \nu \leqq n$, in (1) summierbar sind und daß sowohl die Funktionale $U_{\nu 0}$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ als auch die Funktionale $U_{\nu 1}$ $(m + 1 \leqq \nu \leqq n)$ linear unabhängig sind. Mit

$$g_{\nu j} := \begin{cases} j + n \cdot \operatorname{grad} \alpha_{\nu j} & \text{falls} \quad \alpha_{\nu j}(\lambda) \not\equiv 0 \\ -1 & \text{falls} \quad \alpha_{\nu j}(\lambda) \equiv 0 \end{cases}$$

und

$$h_{\nu j} := \begin{cases} j + n \cdot \operatorname{grad} \beta_{\nu j} & \text{falls} \quad \beta_{\nu j}(\lambda) \not\equiv 0 \\ -1 & \text{falls} \quad \beta_{\nu j}(\lambda) \equiv 0 \end{cases}$$

bezeichnen wir

$$\varkappa_\nu := \max \{g_{\nu j} \mid 0 \leqq j \leqq n - 1\} \qquad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq m$$

bzw.

$$\eta_\nu := \max \{h_{\nu j} \mid 0 \leqq j \leqq n - 1\} \qquad \text{für} \quad m + 1 \leqq \nu \leqq n$$

als *Gewicht* der Funktionale $U_{\nu 0}$ bzw. $U_{\nu 1}$.

Ferner nehmen wir $0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_m$ mit $\varkappa_i \not\equiv \varkappa_j \bmod n$ für $i \neq j$ und $0 \leqq \eta_{m+1} < \eta_{m+2} < \cdots < \eta_n$ mit $\eta_i \not\equiv \eta_j \bmod n$ für $i \neq j$ an.

Mit

$$\lambda = \varrho^n, \quad S_k = \left\{\varrho \in \mathbf{C} \,\middle|\, \frac{k\pi}{n} \leqq \arg \varrho \leqq \frac{(k+1)\pi}{n}\right\} \quad \text{und} \quad \omega_\nu = e^{\nu\frac{2\pi i}{n}}$$

gilt [9: S. 42]:

Die Differentialgleichung (1) *besitzt in jedem Sektor S_k, $0 \leqq k \leqq 2n-1$, n linear unabhängige Lösungen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, die für $\varrho \in S_k$, $|\varrho| > \varrho_0$ analytisch von ϱ abhängen und die Abschätzungen*

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} y_\nu(x, \varrho) = (\varrho\omega_\nu)^j e^{\varrho\omega_\nu x} [1] \qquad (0 \leqq \nu, j \leqq n-1) \tag{3}$$

erfüllen. Dabei sei $[a] := a + \frac{1}{\varrho} m_0(x, \varrho)$ mit einer beschränkten Funktion m_0.

Mit $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ bezeichnen wir das Fundamentalsystem von (1) mit

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \varphi_\nu(0, \varrho) = \delta_{\nu j}, \qquad 0 \leqq \nu, j \leqq n-1.$$

Die Funktionen φ_ν hängen [9: S. 13] analytisch von ϱ und ϱ^n ab. Unter Verwendung von (3) schätzen wir nun die charakteristische Determinante

$$\Delta(\varrho) := \det \left(U_\nu(y_j, \lambda)\right)_{\substack{0 < \nu \leqq n-1 \\ 0 \leqq j \leqq n-1}}$$

ab und erhalten analog zu [9] und [11]:

Lemma 1: a) *Sei $n - m = 2\varkappa$. Mit $\Omega_1 = \sum_{j=-\varkappa}^{\varkappa-1} \omega_j$, $h = \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j + \sum_{j=m+1}^{n} \eta_j$ und einer Zahl $c_1 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ gilt für $\varrho \in S_{2n-1} \cup S_0$*

$$\Delta(\varrho) = c_1 \varrho^h e^{\varrho\Omega_1}\left\{[1] + (-1)^{n-1} e^{h\frac{2\pi i}{n} + \varrho(\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa})}[1]\right\}.$$

b) *Sei $n - m = 2\varkappa + 1$. Mit $\Omega_2 = \sum_{j=-\varkappa}^{\varkappa} \omega_j$ und einer Zahl $c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ gilt für $\varrho \in S_{2n-2} \cup S_{2n-1}$*

$$\Delta(\varrho) = c_2 \varrho^h e^{\varrho\Omega_2}\left\{[1] + (-1)^{n-1} e^{h\frac{2\pi i}{n} + \varrho(\omega_{\varkappa+1} - \omega_{-\varkappa})}[1]\right\}.$$

c) *Das Eigenwertproblem* (1)—(2) *ist im Fall $m > n - m$ nie Stone-regulär und besitzt unendlich viele Eigenwerte $\lambda_\nu = \varrho_\nu^n$. Für hinreichend große ν sind sämtliche Eigenwerte einfach, und es gibt ein $\alpha \in \mathbf{Z}$ mit*

$$\varrho_{\nu+\alpha} = \pi \frac{\nu + \frac{n}{2} - \frac{h}{n}}{\sin \frac{2\varkappa\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \textit{falls} \quad n - m = 2\varkappa$$

sowie

$$\varrho_{\nu+\alpha} = \pi e^{-\frac{i\pi}{n}} \frac{\nu + \frac{n}{2} - \frac{h}{n}}{\sin \frac{(2\varkappa+1)\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \textit{falls} \quad n - m = 2\varkappa + 1.$$

3. Vollständigkeitssatz

Mit der von Shkalikov [12] verwendeten Methode zeigen wir:

Satz 1: *Das System der Eigenfunktionen und zugeordneten Funktionen des Eigenwertproblems* (1)—(2) *ist unter den in Abschnitt* 2 *genannten Voraussetzungen vollständig in* $L_2[0, 1]$.

Bemerkungen: a) Aus dem Beweis zu Satz 1 erkennt man, daß der Vollständigkeitssatz auch für die Räume $L_p[0, 1]$, $p \geqq 1$, gilt.

b) Die Beweismethode läßt sich so modifizieren, daß man diesen Vollständigkeitssatz auch für beliebige Stone-reguläre Eigenwertprobleme vom Typ (1)—(2) erhält. Dieses Resultat ist jedoch auf Grund der Asymptotik der Greenschen Funktion [1, 5, 7, 10] bekannt.

c) Ersetzt man die Differentialgleichung (1) durch die allgemeinere Differentialgleichung

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\, y^{(n-k)} = \lambda \left[y^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} g_k(x)\, y^{(p-k)} \right], \qquad 0 < p < n, \tag{4}$$

so ist das Eigenwertproblem (4), (2) stets irregulär, falls für die Randbedingungen (2) $m - p > n - m$ ist.

Unter Verwendung der Abschätzungen für ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (4) (siehe [5. Satz 1]) können wir den Beweis zu Satz 1 so modifizieren, daß gilt:

Korollar: *Seien* $p_k, g_j \in C^n[0, 1]$ $(1 \leqq k \leqq n, 1 \leqq j \leqq p)$[1]) *und* $m - p > n - m$. *Wenn für ein Fundamentalsystem* $\{h_1, h_2, \ldots, h_p\}$ *der Differentialgleichung*

$$y^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} g_k(x)\, y^{(p-k)} = 0$$

ein $c \neq 0$ *existiert mit*

$$\det \big(U_\nu(h_j, \lambda)\big)_{1 \leqq \nu, j \leqq p} = c\lambda^{h_0}[1] \quad \text{und} \quad h_0 = \sum_{\nu=1}^{p} \max \{\operatorname{grad} \alpha_{\nu j} \mid 0 \leqq j \leqq n-1\},$$

dann ist das System der Eigenfunktionen und zugeordneten Funktionen von (4), (2) *vollständig in* $L_2[0, 1]$.

Zum Beweis von Satz 1 leiten wir zunächst einen Hilfssatz her.

Für einen festen Sektor S_k und $m + 1 \leqq \nu \leqq n$ setzen wir

$$f_\nu(x, \varrho) = \det \big(a_{ij\nu}(x, \varrho)\big)_{1 \leqq i,j \leqq n}$$

mit

$$a_{ij\nu}(x, \varrho) = \begin{cases} U_i(y_{j-1}, \lambda) & \text{für } 1 \leqq i \leqq n,\ i \neq \nu \\ y_{j-1}(x, \varrho) & \text{für } i = \nu, \end{cases} \qquad (1 \leqq j \leqq n),$$

d. h. $f_\nu(x, \varrho)$ entsteht aus der charakteristischen Determinante $\Delta(\varrho)$, indem man dort in der ν-ten Zeile $U_\nu(y_j, \lambda)$ durch $y_j(x, \varrho)$ ersetzt.

---

[1]) Diese Voraussetzung kann noch abgeschwächt werden.

Lemma 2: *Sei χ eine L_2-Funktion, die orthogonal zu allen Eigenfunktionen und zugeordneten Funktionen der Aufgabe* (1)—(2) *ist. Dann lassen sich die Funktionen*

$$\theta_\nu\colon \{\varrho \in S_k \mid \Delta(\varrho) \neq 0\} \to \mathbf{C}, \qquad \theta_\nu(\varrho) := \frac{1}{\Delta(\varrho)} \int_0^1 f_\nu(x,\varrho)\, \overline{\chi(x)}\, dx$$

für $m+1 \leqq \nu \leqq n$ zu ganzen Funktionen fortsetzen.

Beweis: Seien $\tilde{\Delta}(\varrho)$ bzw. $\tilde{f}_\nu(x,\varrho)$ diejenigen Determinanten, die man erhält, wenn man in $\Delta(\varrho)$ bzw. $f_\nu(x,\varrho)$ jeweils $y_0, \ldots, y_{n-1}$ durch $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ ersetzt. Ferner sei für $m+1 \leqq \nu \leqq n$

$$\tilde{\theta}_\nu(\varrho) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(\varrho)} \int_0^1 \tilde{f}_\nu(x,\varrho)\, \overline{\chi(x)}\, dx \quad \text{für} \quad \tilde{\Delta}(\varrho) \neq 0.$$

Wir zeigen zunächst, daß sämtliche Pole der meromorphen Funktionen $\tilde{\theta}_\nu$ hebbar sind. Sei ϱ_0 eine Nullstelle der Ordnung $\alpha+1$ von $\tilde{\Delta}$. Dann setzen wir für festes ν, $m+1 \leqq \nu \leqq n$ mit $\tilde{f}_\nu(x,\varrho_0) \not\equiv 0$ (sonst analog)

$$\phi_0(x) = \tilde{f}_\nu(x,\varrho_0),\ \phi_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{\partial \tilde{f}_\nu}{\partial \varrho}(x,\varrho_0), \ldots, \phi_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial \tilde{f}_\nu}{\partial \varrho^\alpha}(x,\varrho_0).$$

Mit $L(y,\varrho) = l(y) - \varrho^n y$ und $\tilde{U}_\nu(y,\varrho) = U_\nu(y,\varrho^n)$ folgt aus $L\big(\tilde{f}_\nu(\cdot,\varrho),\varrho\big) \equiv 0$ durch Differenzieren

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k L}{\partial \varrho^k}(\phi_{j-k}, \varrho_0) = 0, \qquad 0 \leqq j \leqq \alpha.$$

Wegen $\tilde{U}_j\big(\tilde{f}_\nu(\cdot,\varrho),\varrho\big) \equiv 0$ für $j \neq \nu$, $\tilde{\Delta}(\varrho) = \tilde{U}_\nu\big(f_\nu(\cdot,\varrho),\varrho\big)$ und $\dfrac{\partial^k}{\partial\varrho^k}\tilde{\Delta}(\varrho_0) = 0$ für $0 \leqq k \leqq \alpha$ gilt weiter

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \tilde{U}_\mu}{\partial \varrho^k}(\phi_{j-k}, \varrho) = 0, \qquad 0 \leqq j \leqq \alpha,\ 1 \leqq \mu \leqq n.$$

Also bilden die Funktionen $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_\alpha$ eine Kette von Eigenfunktionen und zugeordneten Funktionen zum Eigenwert ϱ_0. Wegen $\int_0^1 \phi_\mu(x)\, \overline{\chi(x)}\, dx = 0$ für $0 \leqq \mu \leqq \alpha$ ist ϱ_0 eine Nullstelle der Ordnung $\tilde{\alpha} \geqq \alpha$ des Zählers von $\tilde{\theta}_\nu$, und sämtliche Pole der meromorphen Funktion $\tilde{\theta}_\nu$ sind hebbar. Nach [12: Lemma 1] ist $\tilde{\theta}_\nu(\varrho) = \theta_\nu(\varrho)$ für $\varrho \in S_k$, $|\varrho| > \varrho_0$, daher lassen sich die Funktionen θ_ν zu ganzen Funktionen fortsetzen ∎

Beweis zu Satz 1: Mit Lemma 1 und $\gamma_\varphi := \{\varrho \in \mathbf{C} \mid \arg \varrho = \varphi\}$ erhalten wir:

(i) Sei $n - m = 2\varkappa$ gerade, dann gilt auf dem Strahl $\gamma_{\frac{\pi}{2n}}$ für $|\varrho| > \varrho_0$ und mit $c_3 > 0$

$$|\Delta(\varrho)| \geqq c_3\, |\varrho|^h\, e^{\mathrm{Re}\,\varrho\Omega_1} > 0. \tag{5}$$

(ii) Sei $n - m = 2\varkappa + 1$, dann gilt auf dem Strahl $\gamma_{-\frac{\pi}{2n}}$ für $|\varrho| > \varrho_0$ und mit $c_4 > 0$

$$|\Delta(\varrho)| \geqq c_4\, |\varrho|^h\, e^{\mathrm{Re}\,\varrho\Omega_2} > 0. \tag{6}$$

Aus (3) ergibt sich für $m + 1 \leqq \nu \leqq n$

$$f_\nu(x, \varrho) = \varrho^{h-n_\nu} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\varrho\omega_j x} \sum_{s=1}^{\binom{n-1}{n-m-1}} [d_{js}] e^{\varrho\mu_{js}}. \tag{7}$$

Dabei ist $d_{js} \in \mathbf{C}$, und für jedes j sind die paarweise verschiedenen Zahlen μ_{js} Summen von je $n - m - 1$ verschiedenen Elementen der Menge $\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\} \setminus \{\omega_j\}$. Im Fall $n - m = 2\varkappa$ folgt aus (7) mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int_0^1 f_\nu(x, \varrho) \overline{\chi(x)} \, dx \right| \leqq c_5 \, |\varrho|^{h-\eta_\nu-\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re} \varrho \Omega_1} \tag{8}$$

für $\varrho \in \gamma_{\frac{\pi}{2n}}$, $|\varrho| > \varrho_0$ und mit $c_5 \geqq 0$. Die ganzen Funktionen θ_ν streben nach (5) und (8) auf $\gamma_{\frac{\pi}{2n}}$ und damit auch auf den Strahlen $\gamma_{\frac{\pi}{2n}+\frac{k2\pi}{n}}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ für $|\varrho| \to \infty$ zu Null. Nach dem Satz von Phragmen-Lindelöf folgt daher im Fall $n - m = 2\varkappa$ (und analog im Fall $n - m = 2\varkappa + 1$)

$$\theta_\nu(\varrho) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 f_\nu(x, \varrho) \overline{\chi(x)} \, dx \equiv 0 \quad \text{für} \quad m + 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Hieraus ergibt sich analog zu [2: S. 309] die Existenz von $n - m$ linear unabhängigen Lösungen ψ_ν von (1) mit

$$\int_0^1 \psi_\nu(x, \varrho) \overline{\chi(x)} \, dx \equiv 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n - m$$

sowie von Polynomen $c_{\nu j}(\lambda)$ mit

$$\frac{\partial^j \psi_\nu}{\partial x^j} (0, \varrho) = c_{\nu j}(\lambda) \qquad 0 \leqq j \leqq n - 1, \ 1 \leqq \nu \leqq n - m.$$

Gemäß [12: Part 2] folgt hieraus die Behauptung von Satz 1 ∎

Bemerkung: Zum Beweis des Korollars gehen wir analog vor. Man muß hier jedoch zunächst [12: Lemma 1] auf diesen allgemeineren Fall übertragen und die Lemmata 1 und 2 sowie die Formeln (5) und (15) aus [12] entsprechend verallgemeinern. Die Eigenwertasymptotik wird auch hier durch Lemma 1c) gegeben, wobei jedoch jeweils n durch $n - p$ zu ersetzen ist. Der explizite Beweis ist sehr umfangreich, daher begnügen wir uns hier mit der obigen Angabe der Beweisidee.

LITERATUR

[1] BENZINGER, H. E.: Green's function for ordinary differential operators. J. Differential Equations 7 (1970), 478–496.

[2] DUNFORD, N., and J. SCHWARZ: Linear Operators, Part II. Wiley-Interscience: New York 1963.

[3] EBERHARD, W.: Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen. Math. Z. 86 (1964), 45–53.

[4] EBERHARD, W.: Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme. Math. Z. 146 (1976), 213–221.

[5] EBERHARD, W., und G. FREILING: Stone-reguläre Eigenwertprobleme. Math. Z. 160 (1978), 139–161.

[6] Gohberg, I. C., and M. G. Krein: Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators (Transl. of Math. Monographs: Vol. 18). American Math. Soc.: Providence 1969.
[7] Hromov, A. P.: Eigenfunction expansion of ordinary linear differential operators in a finite intervall. Soviet Mat. Dokl. **3** (1962), 1510–1514.
[8] Hromov, A. P.: Expansion in eigenfunctions of ordinary linear operators with irregular separated boundary conditions. Mat. Sb. **70** (1966), 310–329.
[9] Neumark, M. A.: Lineare Differentialoperatoren. Akademie-Verlag: Berlin 1967.
[10] Minkler, H., and H. Niemeyer: Erweitert-reguläre Randwertprobleme. Z. Angewandte Math. Mech. **59** (01) (1979), T 34–T 35.
[11] Schultze, B.: Strongly irregular boundary value problems. Proc. Royal Soc. Edinburgh **82** A (1979), 291–303.
[12] Shkalikov, A. A.: The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary conditions. Funkts. Anal. Prilosz. **10** (1976), 69–80.
[13] Yakubov, S. Ya., and K. S. Mamedov: Completeness of eigen- and associated functions of certain nonregular boundary-value problems for ordinary differential equations. Funkts. Anal. Prilosz. **14** (1980), 93–94.

Manuskripteingang: 19. 08. 1982

VERFASSER:

Dr. Gerhard Freiling
Fachbereich Mathematik der Universität-Gesamthochschule Duisburg
D-4100 Duisburg 1