Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (3) (1984), S. 271–284

Parabolische Regularisierung einer hyperbolischen Itogleichung

W. Grecksch

Die Lösung der ersten Anfangs-Randwert-Aufgabe für eine stochastische hyperbolische Gleichung wird mit einer Methode der parabolischen Regularisierung approximiert. Auf der Grundlage dieses Konzeptes werden ein Maximumprinzip und die Existenz ε-optimaler Steuerungen für eine Steueraufgabe einer speziellen hyperbolischen stochastischen Gleichung untersucht.

Решение первой начально-краевой задачи для некоторого стохастического гиперболического уравнения аппроксимировано методом параболической регуляризации. На основе этой концепции исследованы принцип максимума и существование ε-оптимальных управлений для задачи оптимального управления одного гиперболического стохастического уравнения.

The solution of the first boundary value problem of a random hyperbolic equation is approximated by a method of the parabolic regularization. Considered an application of this method to the development of a maximum principle and to the existence of the ε-optimal controls of an optimal control problem of a random hyperbolic equation.

0. Einleitung

Mit der Theorie der monotonen Operatoren (s. z. B. [14]) und der stochastischen Integration unbeschränkter Operatoren [12] sind wesentliche Hilfsmittel zur Untersuchung von Itogleichungen, die partielle Ableitungen enthalten, bereitgestellt. Eine wichtige Frage dabei ist die Approximation der Lösungen solcher Gleichungen. In [8] wird für eine allgemeine nichtlineare parabolische Itogleichung die Ritz-Galerkin-Methode angewendet. Unter bestimmten Voraussetzungen ist die Anwendung der Halbgruppentheorie möglich [3]. Lösungen hyperbolischer Itogleichungen werden z. B. in [6] und [13] mit der Ritz-Galerkin-Methode approximiert. Für eine spezielle lineare hyperbolische Itogleichung wird in [5] eine Fourierapproximation angewendet.

In vorliegender Arbeit werden Lösungen linearer hyperbolischer Itogleichungen durch Anwendung einer parabolischen Regularisierung approximiert. Für eine Steueraufgabe mit einer linearen hyperbolischen Itogleichung wird auf der Grundlage dieses Konzeptes ein Maximumprinzip hergeleitet und die Frage nach ε-optimalen Steuerungen untersucht.

Die Methode der parabolischen Regularisierung ist im deterministischen Fall wohlbekannt [10, 11].

1. Eine parabolische Itogleichung

Zunächst werden einige Bezeichnungen eingeführt:

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	Vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.
$E(\cdot)$	Erwartungswertoperator.
$[0, T]$	Beschränktes abgeschlossenes Intervall.

$(\mathfrak{F}_t)$	Familie von σ-Algebren aus $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}_s \subseteqq \mathfrak{F}_t$ für $s \leqq t$.
K, H, M	Separable Hilberträume mit den Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_K$, $(\cdot, \cdot)_H$ und $(\cdot, \cdot)_M$. Die dualen Räume K^*, H^*, M^* werden mit K, H und M identifiziert.
$L(K, H)$	Raum der linearen stetigen Abbildungen von K in H.
$\mathfrak{B}_Z$	σ-Algebra der Borelmengen eines Banachraumes Z.
$(w(t), \mathfrak{F}_t)$	K-wertiger Wienerprozeß mit einem Kernoperator Q als Kovarianzoperator.
V, U	Reflexive separable Banachräume.
V^*, U^*	Zu V und U duale Räume.
$\langle v^*, v\rangle_V$	Wert des linearen stetigen Funktionales $v^* \in V^*$ an der Stelle $v \in V$. Analog ist $\langle u^*, u\rangle_U$ zu verstehen.
$V \subset H \subset V^*$	Evolutionstripel (s. [14]).
$U \subset H \subset U^*$	Evolutionstripel.
$\mathscr{L}_Q$	Raum der linearen Operatoren $\Phi\ \lvert Q^{1/2}K\rvert \to H$, so daß $\Phi Q^{1/2}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren von K in H sind. Versehen mit dem Skalarprodukt $(\Phi, \Psi)_Q := \operatorname{tr}(\Phi Q^{1/2})(\Psi Q^{1/2})$ ist $\mathscr{L}_Q$ ein Hilbertraum.
$\mathfrak{B}_Q$	σ-Algebra der Borelmengen aus $\mathscr{L}_Q$.
$\mathscr{L}_Z^2$	Lebesguescher Raum $L_Z^2([0, T] \times \Omega, \mathfrak{B}_{[0,T]} \times \mathfrak{F}, dt \otimes dP)$ (Z — reflexiver separabler Banachraum).
$\tilde{\mathscr{L}}_Z^2$	Teilraum der $(\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}_Z)$-meßbaren Elemente aus $\mathscr{L}_Z^2$.

Für alle $(v, t, \omega) \in U \times [0, T] \times \Omega$ seien $A(v, t, \omega) \in U^*$ und $B(v, t, \omega) \in \mathscr{L}_Q$. Für jedes $v \in U$ seien die Funktionen $A(v, t, \omega)$ und $B(v, t, \omega)$ sowohl $(\mathfrak{B}_{[0,T]} \times \mathfrak{F}, \mathfrak{B}_{U^*})$- als auch $(\mathfrak{B}_{[0,T]} \times \mathfrak{F}, \mathfrak{B}_Q)$-meßbar. Es wird weiter vorausgesetzt, daß für jedes $t \in [0, T]$ und $v \in U$ die Funktionen $A(v) := A(v, t, \omega)$ und $B(v) := B(v, t, \omega)$ bezüglich ω $(\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}_{U^*})$-meßbar und $(\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}_Q)$-meßbar sind. Schließlich bezeichnen $(z(t))$ ein H-wertiges quadratisch integrierbares Martingal, X_0 eine $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{B}_H)$-meßbare Funktion und $f(t, \omega)$ eine $(\mathfrak{B}_{[0,T]} \times \mathfrak{F}, \mathfrak{B}^1)$-meßbare nichtnegative integrierbare Funktion, die für jedes $t \in [0, T]$ $(\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}^1)$-meßbar ist. Weiter seien $p \in \,]1, \infty[$, $q := p/(p-1)$.

In [8] wird bewiesen

Satz 1.1: *Es gebe positive Konstanten k und α, so daß für alle $v_1, v_2, v \in U$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(A_1) *Die Funktion $\langle A(v_1 + \lambda v_2), v\rangle_U$ ist bezüglich $\lambda \in \mathbf{R}^1$ stetig.*
(A_2) $2\langle Av, v\rangle_U + \|B(v)\|_Q^2 + \alpha \|v\|_U^p \leqq f + k \|v\|_H^2$.
(A_3) $2\langle A(v_1) - A(v_2), v_1 - v_2\rangle_U + \|B(v_1) - B(v_2)\|_Q^2 \leqq k \|v_1 - v_2\|_H^2$.
(A_4) $\|A(v)\|_{U^*} \leqq f^{1/q} + k \|v\|_U^{p-1}$.
(A_5) $E \|X_0\|_H^2 < \infty$.

Dann gibt es eine H-wertige, auf $[0, T] \times \Omega$ definierte Funktion $X(t) := X(t, \omega)$, die für alle $t \in [0, T]$ $(\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}_H)$-meßbar und für $\omega \in \Omega$ bezüglich $t \in [0, T]$ stetig in H ist, so daß gilt:

1. *$X(t, \omega) \in U$ für fast alle $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.*
2. *Es existiert ein $\Omega' \subset \Omega$ mit $P(\Omega') = 1$ und auf Ω' gilt für alle $t \in [0, T]$ die Itogleichung*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A(X(s), s, \omega)\, ds + \int_0^t B(X(s), s, \omega)\, w(ds) + z(t).^{1)} \tag{1.1}$$

[1]) Das stochastische Integral ist wie in [12] definiert.

3. $$E \sup_t \|X(t)\|_H^2 + E \int_0^T \|X(t)\|_U^p \, dt$$

$$\leqq \text{const} \left(E \|X_0\|_H^2 + E \int_0^T f(t) \, dt + E \|z(T)\|_H^2 \right). \tag{1.2}$$

4. $(X(t))$ *ist bis auf stochastische Modifikationen eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 1.2: Für die Gleichung (1.1) wird symbolisch geschrieben

$$\begin{cases} dX(t) = A(X(t), t, \omega) \, dt + B(X(t), t, \omega) \, w(dt) + z(dt), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1.1'}$$

Bemerkung 1.3: $(X(t))$ ist Lösung der Gleichung (1.1) im Sinne des Satzes 1.1 genau dann, wenn für alle $v \in Y$ (Y — in U dichte Menge bezüglich $\|\cdot\|_U$) gilt:

$$(v, X(t))_H = (v, X_0)_H + \int_0^t \langle A(X(s), s, \omega), v \rangle_U \, ds$$

$$+ \int_0^t (v, B(X(s), s, \omega), w(ds))_H + (v, z(t))_H.$$

Bemerkung 1.4: Die Bemerkung 1.3 zeigt, daß der Lösungsbegriff im Satz 1.1 eine Übertragung des Lösungsbegriffes der verallgemeinerten Lösung einer deterministischen parabolischen Gleichung [11] über einem Evolutionstripel $U \subset H \subset U^*$ ist.

2. Eine hyperbolische Itogleichung

Es sei (V, H, V^*) ein Evolutionstripel von Hilberträumen. Wir untersuchen die Itogleichung

$$dy'(t) + Ay(t) \, dt$$

$$= g(t) \, dt + B_1(t, \omega) \, y(t) \, w(dt) + B_2(t, \omega) \, y'(t) \, w(dt) + z(dt) \tag{2.1}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ ($y_0 \in V$, $y_1 \in H$). Dabei sind $(g(t)) \in \mathscr{L}_H^2$, $A \mid V \to V^*$, $B_1, B_2 \mid [0, T] \times \Omega \times V \to \mathscr{L}_Q$. Für Funktionen $y \in L_V^2 \times ([0, T], \mathfrak{B}_{[0,T]}, dt)$ bezeichne $y'(t)$ die erste Ableitung im Sinne der Distributionen. Für die Abbildungen A, B_1 und B_2 wird vorausgesetzt:

(V_1) A ist linear, und es gibt eine positive Zahl δ, so daß für alle $v \in V$ gilt

$$\langle Av, v \rangle_V \geqq \delta \|v\|_V^2. \tag{2.2}$$

(V_2) Die Funktionen $B_i(t) \, v := B_i(t, \omega) \, v$ ($i = 1, 2$) sind bezüglich v linear, und es gibt eine positive Konstante h, so daß für alle $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ und $v \in V$ gilt

$$\|B_1(t) \, v\|_Q^2 \leqq h \|v\|_H^2, \qquad \|B_2(t) \, V\|_Q^2 \leqq h \|v\|_H^2. \tag{2.3}$$

(V_3) Für jedes $v \in V$ sind $B_i(t) \, v$ ($i = 1, 2$) als Funktionen über $[0, T] \times \Omega$ ($\mathfrak{B}_{[0,T]} \times \mathfrak{F}, \mathfrak{B}_Q$)-meßbar.

(V_4) Für jedes $t \in [0, T]$ und $v \in V$ sind die Funktionen $B_i(t) \, v$ ($i = 1, 2$) über Ω ($\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}_Q$)-meßbar.

Bemerkung 2.1: Ein Beispiel für die Gleichung (2.1) über dem Evolutionstripel $(\mathring{W}_2^1(G), L^2(G), W_2^{-1}(G))$ (Bezeichnung der Sobolewräume wie in [8]) ist die Anfangswertaufgabe

$$d\left[\frac{\partial y(t; x_1, \ldots, x_d)}{\partial_t}\right] - \left[\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x_1, \ldots, x_d) \frac{\partial y(t; x_1, \ldots, x_d)}{\partial x_k}\right) + C(x_1, \ldots, x_d)\right] dt$$

$$= g(t; x_1, \ldots, x_d)\, dt + y(t; x_1, \ldots, x_d)\, \beta(dt), \quad y(0) = y_0(x),$$

$$\left.\frac{\partial y(t; x_1, \ldots, x_d)}{\partial t}\right|_{t=0} = y_1(x),\ y(t; x_1, \ldots, x_d)|_{x \in \partial G} = 0 \tag{2.4}$$

mit deterministischen Koeffizienten $A_{jk}(x)$, $C(x)$. Dabei sind: $(\beta(t))$ ein reellwertiger Wienerprozeß, G ein beschränktes Gebiet im $\mathbf{R}^d$, ∂G der Rand von G, $(g(t; x_1, \ldots, x_d))$ ein $L^2(G)$-wertiger $\mathfrak{F}_t$-meßbarer Prozeß mit $E \int_0^T \int_G |g(t; x_1, \ldots, x_d)|^2\, dx_1 \ldots dx_d\, dt < \infty$, $A_{jk}(x)$, $C(x)$ beschränkte meßbare Funktionen mit $\sum_{j,k=1}^{d} A_{jk}(x_1, \ldots, x_d)\, z_j z_k \geqq \text{const} \cdot \|z\|_{\mathbf{R}^d}^2$ für alle $x := (x_1, \ldots, x_d)$, $z := (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbf{R}^d$.

In [5] wird die Lösung der Gleichung (2.4) mittels der Fourierapproximation bestimmt.

Bemerkung 2.2: Eine Gleichung vom Typ (2.4), wobei in die linke Seite noch additiv $y'(t)\, dt$ eingeht, $\beta(dt)$ rein additiv wirkt und die Koeffizienten A_{jk} und C noch von t abhängen können, wird in [6] untersucht. Die Lösung wird durch ein Verfahren vom Galerkin-Typ approximiert.

Bemerkung 2.3: Tritt in der linken Seite der Gleichung (2.1) noch ein Term des Types $A_1(t, \omega, y'(t))$ auf, so ist die Gleichung unter Monotonie- und Koerzitivitätsvoraussetzungen in [13] diskutiert worden.

Bemerkung 2.4: Im deterministischen Fall (d. h. $B_1(t) \equiv 0$, $B_2(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$, g ist nicht von ω abhängig) kann eine Lösung der Gleichung (2.1) durch eine parabolische Regularisierung approximiert werden.

Bemerkung 2.5: Die folgenden Aussagen sind auch anwendbar, wenn $B_2(t) \equiv 0$ und $B_1(t) \not\equiv 0$ gilt.

Beispiel 2.6: Wir betrachten das Evolutionstripel $(\mathring{W}_2^1(G), L^2(G), W_2^{-1}(G))$ mit $G = [0, 1] \times [0, 1]$. A_{jk}, C und g erfüllen mit $d = 2$ die Voraussetzungen der Bemerkung 2.1:

$$d\left[\frac{\partial y(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right]$$

$$- \left\{\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{jk}(x_1, x_2) \frac{\partial y(t; x_1, x_2)}{\partial x_k}\right] + C(x_1, x_2)\, y(t; x_1, x_2)\right\} dt$$

$$= g(t; x_1, x_2)\, dt + y(t; x_1, x_2)\, \beta(dt) + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} y(t; x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} y(t; x_1, x_2)\right] \beta(dt),$$

$$y(0; x_1, x_2) = y_0(x_1, x_2),\ \left.\frac{\partial y(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right|_{t=0} = y_1(x_1, x_2),\ y(t; x_1, x_2)|_{(x_1, x_2) \in \partial G} = 0.$$

3. Parabolische Regularisierung

Für positive Parameter ε wird die Itogleichung

$$\left.\begin{aligned} &dy_\varepsilon'(t) + Ay_\varepsilon(t)\,dt + \varepsilon Ay_\varepsilon'(t)\,dt \\ &= g(t)\,dt + B_1(t)\,y_\varepsilon(t)\,w(dt) + B_2(t)\,y_\varepsilon'(t)\,w(dt) + z(dt) \\ &\text{mit } \; y(0) = y_0, \; y'(0) = y_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

betrachtet.

Satz 3.1: *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es einen $V \times V$-wertigen $\mathfrak{F}_t$-meßbaren Prozeß $\big(y_\varepsilon(t), y_\varepsilon'(t)\big)$, der in $V \times H$ bezüglich $t \in [0, T]$ für alle $\omega \in \Omega$ stetig ist und auf einer Menge Ω_0 mit $P(\Omega_0) = 1$ für alle $t \in [0, T]$ der Gleichung (3.1) genügt. Dieser Prozeß ist bis auf stochastische Modifikationen eindeutig bestimmt, und es gilt*

$$E \sup_t \left(\|y_\varepsilon(t)\|_V^2 + \|y_\varepsilon'(t)\|_H^2\right) + E \int_0^T \left(\|y_\varepsilon(t)\|_V^2 + \|y_\varepsilon'(t)\|_V^2\right) dt \leqq \text{const} \tag{3.2}$$

für $\varepsilon \in\,]0, 1]$.

Beweis: Es werden die Produkträume $\mathfrak{V} := V \times V$, $\mathfrak{H} := V \times H$ und $\mathfrak{V}' := V \times V^*$ eingeführt. Über $\mathfrak{H}$ wird durch

$$[\varphi, \psi] := \langle A\varphi_0, \psi_0\rangle_V + (\varphi_1, \psi_1)_H \quad \text{mit} \quad \varphi := \begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}, \; \psi := \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt definiert,

$$\langle \varphi^*, \varphi\rangle_{\mathfrak{V}} := \langle A\varphi_0^*, \varphi_0\rangle_V + \langle \varphi_1^*, \varphi_1\rangle_V \;\text{ mit }\; \varphi^* := \begin{pmatrix}\varphi_0^*\\ \varphi_1^*\end{pmatrix} \in \mathfrak{V}', \; \varphi := \begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix} \in \mathfrak{V}$$

definiert auf $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}'$ eine Bilinearform. Unter Zugrundelegung von $[\cdot, \cdot]$ und $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathfrak{V}}$ wird durch $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}, \mathfrak{V}')$ ein Evolutionstripel definiert [10]. Auf $\mathfrak{V}$ werden die Operatoren

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix}0 & -I\\ A & 0\end{pmatrix} \qquad (\mathscr{A} \mid \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}'),$$

$$\mathscr{A}_\varepsilon := \begin{pmatrix}0 & -I\\ A & \varepsilon A\end{pmatrix} \qquad (\mathscr{A}_\varepsilon \mid \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}'),$$

$$\mathscr{B} := \begin{pmatrix}0 & 0\\ B_1 & B_2\end{pmatrix} \qquad (\mathscr{B} \mid \mathfrak{V} \to \{0\} \times \mathscr{L}_Q)$$

eingeführt, die für $\varphi \in \mathfrak{V}$ durch

$$\mathscr{A}\varphi := \begin{pmatrix}-\varphi_1\\ A\varphi_0\end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}_\varepsilon\varphi := \begin{pmatrix}-\varphi_1\\ A\varphi_0 + \varepsilon A\varphi_1\end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}\varphi := \begin{pmatrix}0\\ B_1(t)\,\varphi_0 + B_2(t)\,\varphi_1\end{pmatrix}$$

definiert sind. Mit den Bezeichnungen

$$\vec{y}_\varepsilon(t) := \begin{pmatrix}y_{\varepsilon 0}(t)\\ y_{\varepsilon 1}(t)\end{pmatrix} \left(y_{\varepsilon 0}(t) := y_\varepsilon(t), \quad y_{\varepsilon 1}(t) := y_\varepsilon'(t), \; \vec{g}(t)\right) := \begin{pmatrix}0\\ g(t)\end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \vec{z}(t) := \begin{pmatrix}0\\ z(t)\end{pmatrix}$$

kann die Aufgabe (3.1) umgeschrieben werden zu

$$d\vec{y}_\varepsilon(t) + \mathscr{A}_\varepsilon\vec{y}_\varepsilon(t)\,dt = \vec{g}(t)\,dt + \mathscr{B}\vec{y}_\varepsilon(t)\,w(dt) + \vec{z}(dt). \tag{3.3}$$

mit $\vec{y}_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Es wird gezeigt, daß die Gleichung (3.3) die Voraussetzungen zum Satz 1.1 über dem Evolutionstripel $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}, \mathfrak{V}')$ erfüllt.

Wegen [10] gilt

$$\langle \mathscr{A}\varphi, \varphi \rangle_{\mathfrak{V}} = 0. \tag{3.4}$$

Somit erhält man $\langle \mathscr{A}_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle_{\mathfrak{V}} = \varepsilon \langle A\varphi_1, \varphi_1 \rangle_V$. Aus der Voraussetzung (V_1) folgt für beliebige $\varphi \in \mathfrak{V}$ und $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} &2\langle \mathscr{A}_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle_{\mathfrak{V}} + \lambda \, \|\varphi\|_{\mathfrak{H}}^2 \\ &= 2\varepsilon \langle A\varphi_1, \varphi_1 \rangle_V + \lambda \langle A\varphi_0, \varphi_0 \rangle_V + \lambda \, \|\varphi_1\|_H^2 \\ &\geqq 2\delta\varepsilon \, \|\varphi_1\|_V^2 + \lambda\delta \, \|\varphi_0\|_V^2 + \lambda \, \|\varphi_1\|_H^2 \geqq \min\{\lambda, 2\varepsilon\} \, \|\varphi\|^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

und daher gilt

$$2\langle -\mathscr{A}_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle_{\mathfrak{V}} + \delta \cdot \min\{\lambda, 2\varepsilon\} \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}^2 \leqq \lambda \, \|\varphi\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Mit der Voraussetzung (V_2) ergibt sich die Koerzitivitätsbedingung (A_2) für die Operatoren $\mathscr{A}_\varepsilon$ und $\mathscr{B}$ mit $f \equiv 0$. Aus der Voraussetzung (V_1) folgt die Stetigkeit von $\mathscr{A}_\varepsilon$, und somit erfüllt $\mathscr{A}_\varepsilon$ insbesondere die Stetigkeitsvoraussetzung (A_1). Aus der Ungleichung (3.5), der Linearität von $\mathscr{A}_\varepsilon$ und aus (V_2) folgt für die Operatoren $\mathscr{A}_\varepsilon$ und $\mathscr{B}$ die Bedingung (A_3); (A_4) und (A_5) sind offensichtlich mit $f \equiv 0$ erfüllt. Die Voraussetzungen (V_3) und (V_4) sichern die Meßbarkeitsbedingungen des 1. Kapitels. Die Aussage des Satzes 1.1 liefert nun die Behauptung ∎

Satz 3.2: *Es gibt einen bis auf stochastische Modifikationen eindeutig bestimmten Prozeß $(y(t)) \in \tilde{\mathscr{L}}_V^2$, der mit Wahrscheinlichkeit 1 der Gleichung (2.1) genügt.*

Beweis: Aus der Ungleichung (3.2) folgt die Beschränktheit der Familie $\{(y_\varepsilon(t), y_\varepsilon'(t)) : \varepsilon > 0\}$ in $\mathscr{L}_{\mathfrak{H}}^2$ für $\varepsilon \downarrow 0$. Daher ergibt sich für eine Teilfolge $(\bar{\varepsilon}) \subset (\varepsilon)$ die schwache Konvergenz der Folge $(y_{\bar\varepsilon}(t), y_{\bar\varepsilon}'(t))$ in $\mathscr{L}_{\mathfrak{H}}^2$ gegen ein Element $(y(t), y'(t)) \in \tilde{\mathscr{L}}_{\mathfrak{H}}^2$. Durch $\int\limits_0^{\bullet} B_i(s)\, x(s)\, w(ds)$ $(i = 1, 2;\ x \in \tilde{\mathscr{L}}_V^2)$ werden lineare stetige Abbildungen Φ von $\tilde{\mathscr{L}}_V^2$ in $\tilde{\mathscr{L}}_H^2$ definiert. Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} &E \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t B_i(s)\, w(ds), r(s) \right)_H ds \\ &= E \int\limits_0^T \int\limits_0^t \langle B_i(s)\, x(s)\, w(ds), r(s) \rangle_V \, ds = E \int\limits_0^T \langle E\{\Phi_i^*(r) \mid \mathfrak{F}_s\}, x(s) \rangle_V \, ds \end{aligned}$$

($i = 1, 2$; $r \in \tilde{\mathscr{L}}_V^2$ beliebig; Φ^* — der zu Φ adjungierte Operator) ergibt sich mit $x(s) = y_{\bar\varepsilon}(s)$ für $i = 1$ und $x(s) = y_{\bar\varepsilon}'(s)$ für $i = 2$ wegen der schwachen Konvergenz von $(y_{\bar\varepsilon}(t), y_{\bar\varepsilon}'(t))$ die schwache Konvergenz der Folgen

$$\left(\int\limits_0 B_1(s)\, y_{\bar\varepsilon}(s)\, w(ds) \right)_{\bar\varepsilon < 0}, \quad \left(\int\limits_0^t B_2(s)\, y_{\bar\varepsilon}'(s)\, w(ds) \right)_{\bar\varepsilon > 0}$$

in $\mathscr{L}_{V^*}^2$. Aus der Beschränktheit der Folge $(\sqrt{\varepsilon}\, y_\varepsilon'(t))_{\varepsilon > 0}$ in $\mathscr{L}_V^2$ folgt $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon E \int\limits_0^T \|Ay_\varepsilon'(t)\|_{V^*}^2 \, dt = 0$. Wegen

$$E \int\limits_0^T \langle Ay_{\bar\varepsilon}(s), r(s) \rangle_V \, ds = E \int\limits_0^T \langle A^* r(s), y_{\bar\varepsilon}(s) \rangle_V \, ds$$

erhält man die schwache Konvergenz von $Ay_{\bar\varepsilon}(s)$ gegen $Ay(s)$ in $\mathscr{L}^2_{V^*}$. Aus der Gleichung

$$y_{\bar\varepsilon}'(t) = y_1 - \int_0^t Ay_{\bar\varepsilon}(s)\,ds - \varepsilon \int_0^t Ay_{\bar\varepsilon}'(s)\,ds + \int_0^t g(s)\,ds$$
$$+ \int_0^t \big(B_1(s)\,y_{\bar\varepsilon}(s) + B_2(s)\,y_{\bar\varepsilon}(s)\big)\,w(ds) + z(t)$$

erhält man somit die schwache Konvergenz von $\big(y_{\bar\varepsilon}'(t)\big)$ in $\mathscr{L}^2_{V^*}$ für $\bar\varepsilon \downarrow 0$ gegen

$$y'(t) = y_1 - \int_0^t Ay(s)\,ds + \int_0^t \big(B_1(s)\,y(s) + B_2(s)\,y'(s)\big)\,w(ds) + z(t),$$

d. h., $\big(y(t), y'(t)\big)$ löst die Gleichung (2.1).

Es bleibt zu zeigen, daß $\big(y(t), y'(t)\big)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 die einzige Lösung in $\mathscr{L}_{\mathfrak{H}}{}^2$ ist. Angenommen $\big(x(t), x'(t)\big) \in \mathscr{L}_{\mathfrak{H}}{}^2$ mit

$$P\left\{\sup_t \{\|x(t) - y(t)\|_V, \|x'(t) - y'(t)\|_H\} > 0\right\} > 0$$

löst die Gleichung (2.1). Dann gilt für die Prozesse $\eta(t) := y(t) - x(t)$, $\eta'(t) = y'(t) - x'(t)$ die Beziehung

$$\eta'(t) = \int_0^t \big(-A\eta(s)\big)\,ds + \int_0^t \big(B_1(s)\,\eta(s) + B_2(s)\,\eta'(s)\big)\,w(ds).$$

Substituiert man $\vec\eta(t) := \begin{pmatrix}\eta(t)\\ \eta'(t)\end{pmatrix}$ und wendet über dem Evolutionstripel $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}, \mathfrak{V}')$ die Itoformel für das Normquadrat [8] auf $\|\eta(t)\|_{\mathfrak{H}}{}^2$ an und beachtet die Formel (3.4) und die Eigenschaft (V 2), so erhält man

$$E\,\|\vec\eta(t)\|_{\mathfrak{H}}{}^2 = -2E \int_0^t \langle \mathscr{A}\vec\eta(s), \vec\eta(s)\rangle_{\mathfrak{V}}\,ds$$
$$+ \int_0^t \|B_1(s)\,\eta(s) + B_2(s)\,\eta'(s)\|_Q{}^2\,ds$$
$$\leqq 2hE \int_0^t \|\vec\eta(t)\|_{\mathfrak{H}}{}^2\,dt.$$

$E\,\|\vec\eta(t)\|_{\mathfrak{H}}{}^2$ ist bezüglich $t \in [0, T]$ eine beschränkte Funktion. Mit dem Gronwallschen Lemma folgt aus der letzten Ungleichung $E\,\|\vec\eta(t)\|_{\mathfrak{H}}{}^2 \leqq 0$ für alle $t \in [0, T]$, d. h. $E\{\langle A\eta(t), \eta(t)\rangle_V + \|\eta'(t)\|_H{}^2\} \leqq 0$. Hieraus folgt mit der Voraussetzung (V_1) $\eta(t) = 0$, $\eta'(t) = 0$ (fast sicher), d. h. $\big(y(t), y'(t)\big)$ ist bis auf stochastische Modifikationen eindeutig bestimmt ∎

Satz 3.3: *Es gilt*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[E \sup_t (\|y_\varepsilon(t) - y(t)\|_V{}^2 + \|y_\varepsilon'(t) - y'(t)\|_H{}^2)\right] = 0.$$

Beweis: Wegen den Sätzen 3.1 und 3.2 existieren mit Wahrscheinlichkeit 1 eindeutig bestimmte Lösungen $(y_\varepsilon(t)), (y(t)) \in \tilde{\mathscr{L}}_V{}^2$ der Gleichungen (3.1) und (2.1). Für

$$\vec{\eta}_\varepsilon(t) := \begin{pmatrix} \eta_\varepsilon(t) \\ \eta_\varepsilon'(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_\varepsilon(t) - y(t) \\ y_\varepsilon'(t) - y'(t) \end{pmatrix}$$

gilt in der Bezeichnungsweise zum Beweis des Satzes 3.1 die Gleichung

$$d\vec{\eta}_\varepsilon(t) + \mathscr{A}_\varepsilon \vec{\eta}_\varepsilon(t)\, dt + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ Ay(t) \end{pmatrix} dt = \mathscr{B} \vec{\eta}_\varepsilon(t)\, w(dt) \tag{3.6}$$

mit $\vec{\eta}_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für $\varphi \in \mathfrak{V}$ gilt

$$\varepsilon \, \|Ay(t)\|_{V^*} \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}} \leqq \frac{1}{\delta} \frac{1}{2} \varepsilon \, \|Ay(t)\|_{V^*}^2 + \delta \frac{1}{2} \varepsilon \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\langle \left(0, Ay(t)\right), \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathfrak{V}} &\geqq -\varepsilon \left| \left\langle \left(0, Ay(t)\right), \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathfrak{V}} \right| \geqq -\varepsilon \, |\langle Ay(t), \varphi_1 \rangle_V| \\ &\geqq -\varepsilon \, \|Ay(t)\|_{V^*} \, \|\varphi_1\|_V \geqq -\varepsilon \, \|Ay(t)\|_{V^*} \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}} \\ &\geqq -\frac{\varepsilon}{2\delta} \, \|Ay(t)\|_{V^*}^2 - \frac{\varepsilon \cdot \delta}{2} \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung (3.5) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} &2\langle \mathscr{A}_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle_{\mathfrak{V}} + 2\varepsilon \left\langle \left(0, Ay(t)\right), \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathfrak{V}} + \lambda \, \|\varphi\|_{\mathfrak{H}}{}^2 \\ &\geqq \delta \min \{\lambda, 2\varepsilon\} \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2 - \frac{\varepsilon}{\delta} \, \|Ay(t)\|_{V^*}^2 - \varepsilon\delta \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2 \\ &= (\delta \cdot \min \{\lambda, 2\varepsilon\} - \varepsilon\delta) \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &2\langle -\mathscr{A}_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle_{\mathfrak{V}} + 2 \left\langle -\left(0, \varepsilon Ay(t)\right), \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathfrak{V}} + (\delta \min \{\lambda, 2\varepsilon\} - \delta\varepsilon) \, \|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2 \\ &\leqq \lambda \, \|\varphi\|_{\mathfrak{H}}{}^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} \, \|Ay(t)\|_{V^*}^2. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines ε ist $\delta \min \{\lambda, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon\delta$. Damit ist der Faktor vor $\|\varphi\|_{\mathfrak{V}}{}^2$ positiv. Unter Beachtung der Voraussetzungen (V_2)—(V_4) ergibt sich für hinreichend kleine ε das Erfülltsein der Voraussetzungen zum Satz 1.1 mit $f(t) = \frac{\varepsilon}{\delta} \|Ay(t)\|_{V^*}^2$, $k = h + \delta\varepsilon$, $z(t) \equiv 0$ und $\vec{\eta}_\varepsilon(0) = 0$ über dem Evolutionstripel $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}, \mathfrak{V}')$. Die Ungleichung (1.2) zeigt

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} [\|y_\varepsilon(t) - y(t)\|_V{}^2 + \|y_\varepsilon'(t) - y'(t)\|_H{}^2] \leqq \frac{\varepsilon}{\delta} E \int_0^T \|Ay(t)\|_{V^*}^2 \, dt.$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ ergibt sich die Behauptung ∎

Folgerung: *Der Prozeß $(y(t), y'(t))$ ist als $V \times H$-wertiger Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig.*

Beweis: Aus dem Satz 3.3 folgt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} [\|y_\varepsilon(t) - y(t)\|_V^2 + \|y_\varepsilon'(t) - y'(t)\|_H^2] > \gamma \right\} = 0$$

für alle $\gamma > 0$. Da aus der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 für eine Teilfolge folgt, gibt es für fast alle $\omega \in \Omega$ Folgen $\varepsilon_n := \varepsilon_n(\omega) \subset (\varepsilon)$, so daß

$$P \left\{ \lim_{\varepsilon_n \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} [\|y_{\varepsilon_n}(t) - y(t)\|_V^2 + \|y'_{\varepsilon_n}(t) - y'(t)\|_H^2] = 0 \right\} = 1,$$

gilt, d. h. $(y_{\varepsilon_n}(t), y'_{\varepsilon_n}(t))$ konvergiert für fast alle $\omega \in \Omega$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, T]$ gegen $(y(t), y'(t))$ im Raum $V \times H$. Da aus dem Satz 1.1 die Stetigkeit von $(y_{\varepsilon_n}(t), y'_{\varepsilon_n}(t))$ bezüglich $t \in [0, T]$ auf Ω als $V \times H$-wertige Funktion folgt, ist somit $(y(t), y'(t))$ realisierungsweise stetig in $V \times H$ ∎

Bemerkung 3.5: Die Sätze 3.1 bis 3.3 gelten insbesondere für $B_1 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$ und $z \equiv 0$. Man erhält dann den in [10] betrachteten deterministischen Fall.

Bemerkung 3.6: Die Aussagen der Sätze 3.1 bis 3.3 gelten auch — mit Ausnahme der $\mathfrak{F}_t$-Meßbarkeit — für $B_1 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$ und $(z(t)) \in \tilde{\mathscr{L}}_H^2$, wenn die Anfangsbedingungen durch Endbedingungen ersetzt werden.

4. Eine Anwendung in der Steuertheorie

Es seien D eine konvexe abgeschlossene Menge in H und

$$\mathscr{D} := \left\{ (u(t)) : u \mid [0, T] \times \Omega \to D, (\mathfrak{F}_t, \mathfrak{B}_H)\text{-meßbar}, E \int_0^T \|u(t)\|_H^2 \, dt < \infty \right\},$$

W ein separabler Hilbertraum, $C(t) \in L(H, W)$, $N \in L(H, H)$ mit $(Nx, x) \geqq \nu \|x\|_H^2$ für alle $x \in H$, x_0 ein Element aus W. Für $K = H$ wird die Steueraufgabe

$$\begin{cases} dy'(t) + Ay(t)\, dt = u(t) + w(dt), \; y(0) = y_0 \in V, \; y'(0) = y_1 \in H & (4.1) \\ J(u) := E \int_0^T \|C(t)\, y(t) - x_0\|_W^2 \, dt + E \int_0^T (Nu(t), u(t))_H \doteq \operatorname{Min}_{u \in \mathscr{D}} & (4.2) \end{cases}$$

betrachtet. Ihr wird mit der Bezeichnungsweise des 2. Kapitels die Aufgabe

$$\begin{cases} d\vec{y}_\varepsilon(t) + \mathscr{A}_\varepsilon \vec{y}_\varepsilon(t)\, dt = \vec{u}(t)\, dt + \vec{w}(dt), \; \vec{y}_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} & (4.1_\varepsilon) \\ J_\varepsilon(u) = E \int_0^T \|\mathscr{C} \vec{y} y_\varepsilon(t) - x_0\|_W^2 \, dt + E \int_0^T (Nu(t), u(t))_H \, dt \doteq \operatorname{Min}_{u \in \mathscr{D}} & (4.2_\varepsilon) \end{cases}$$

zugeordnet, wobei für $\varphi \in \mathfrak{H}$ die Abbildung $\mathscr{C} \mid \mathfrak{H} \to W$ durch $\mathscr{C}\varphi = C(t)\, \varphi_0$ definiert ist.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß für die Steueraufgaben (4.1), (4.2) und (4.1_ε), (4.2_ε) optimale Steuerungen $(u^0(t))$, $(u^0(t)) \in \mathscr{D}$ existieren. $(y^0(t))$ und $(y_\varepsilon^0(t))$ bezeichnen die zu den Steuerungen $(u^0(t))$ und $(u_\varepsilon^0(t))$ gehörigen Lösungen der Gleichungen (4.1) und (4.1_ε). Die Gleichung (4.1_ε) ist wegen des Satzes 3.1 eine parabolische gesteuerte Itogleichung über den Evolutionstripel $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}, \mathfrak{V}')$. Durch die Anwendung des in [1] beschriebenen Maximumprinzipes für Steueraufgaben mit parabolischen Itogleichungen erhält man, daß $\left(u_\varepsilon^0(t)\right) \in \mathscr{D}$ optimal für (4.1_ε), (4.2_ε) genau dann ist, wenn für alle $\left(u(t)\right) \in \mathscr{D}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt

$$\left(-E\{p_{\varepsilon 1}^0(t) \mid \mathfrak{F}_t\} + 2Nu_\varepsilon^0(t), u(t) - u_\varepsilon^0(t)\right)_H \geqq 0, \tag{4.3}$$

wobei $\vec{p}_\varepsilon^{\,0}(t) := \begin{pmatrix} p_{\varepsilon 0}^0(t) \\ p_{\varepsilon 1}^1(t) \end{pmatrix}$ realisierungsweise die Gleichung

$$-\frac{d\vec{p}_\varepsilon^{\,0}(t)}{dt} + \mathscr{A}_\varepsilon^* \vec{p}_\varepsilon^{\,0}(t) = 2\mathscr{C}^*\left(\mathscr{C}\bar{\vec{y}}_\varepsilon(t) - x_0\right) \tag{4.4}$$

mit $\vec{p}_\varepsilon^{\,0}(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst (* — Zeichen für den adjungierten Operator). Für beliebige $\varphi \in \mathfrak{H}$, $\psi \in W$ gilt

$$(\mathscr{C}^*\psi, \varphi)_{\mathfrak{H}} = (\mathscr{C}\varphi, \psi)_W = \left(C(t)\,\varphi_0, \psi\right)_W = \left(C^*(t)\,\psi, \varphi_0\right)_H = \langle C^*(t)\,\psi, \varphi_0\rangle_V.$$

Aus der Definition des Skalarproduktes über $\mathfrak{H}$ folgt, daß der letzte Ausdruck in der Gestalt $\langle A\cdot, \cdot\rangle_V$ darstellbar sein muß, d. h., $\mathscr{C}^*\psi = \begin{pmatrix} A^{-1}C(t)\,\psi \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit erhält man für die Gleichung (4.4)

$$-\frac{dp_\varepsilon^0(t)}{dt} + \mathscr{A}_\varepsilon^* p_\varepsilon^0(t) = \begin{pmatrix} 2A^{-1}C^*(t)\,[Cy_\varepsilon(t) - x_0] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unter Beachtung der Beziehung $\mathscr{A}^* = -\mathscr{A}$ erhält man für die Gleichung (4.4)

$$-p_{\varepsilon 0}^{0\prime}(t) + p_{\varepsilon 1}^0(t) = 2A^{-1}C^*(t)\,[Cy_\varepsilon(t) - x_0], \qquad p_{\varepsilon 0}^0(T) = 0, \tag{4.5}$$

$$-p_{\varepsilon 1}^{0\prime}(t) - Ap_{\varepsilon 0}^0(t) + \varepsilon \cdot Ap_{\varepsilon 1}^0(t) = 0, \qquad p_{\varepsilon 1}^0(T) = 0, \tag{4.6}$$

wobei die Gleichungen mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle $t \in [0, T]$ gelten. Aus der Gleichung (4.6) folgt $p_{\varepsilon 1}^{0\prime\prime}(t) - Ap_{\varepsilon 0}^{0\prime}(t) + \varepsilon Ap_{\varepsilon 1}^{0\prime}(t) = 0$. Mit der Gleichung (4.5) folgt hieraus für $p_\varepsilon^0(t) := p_{\varepsilon 1}^0(t)$ die realisierungsweise Beziehung

$$p_\varepsilon^{0\prime\prime}(t) + Ap_\varepsilon^0(t) - \varepsilon Ap_\varepsilon^{0\prime}(t) = 2C^*(t)\,[C(t)\,y_\varepsilon(t) - x_0] \tag{4.7}$$

mit $p_\varepsilon^0(T) = 0$, $p_\varepsilon^{0\prime}(T) = 0$.

Satz 4.1: *Es gelten die folgenden Grenzwertbeziehungen:*

a) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} E \int\limits_0^T \|u_\varepsilon^0(t) - u^0(t)\|_H^2\,dt = 0;$

b) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} E \int\limits_0^T [\|y_\varepsilon^0(t) - y^0(t)\|_V^2 + \|y_\varepsilon^{0\prime}(t) - y^{0\prime}(t)\|_H^2]\,dt = 0;$

c) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^0) = J(u^0).$

Beweis: Wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen an J und des Satzes 3.3 gilt für alle $\left(u(t)\right) \in \mathscr{D}$ $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} J_\varepsilon(u) = J(u)$. Insbesondere gilt dann $J_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \leqq J_\varepsilon(u^0) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} J(u^0)$ und somit

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\, J_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \leqq J(u^0). \tag{4.8}$$

Nach Voraussetzung gilt $J_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \geqq \nu E \int\limits_0^T \|u_\varepsilon^0(t)\|_H^2\,dt.$

Aus der Beziehung (4.8) folgt damit die Beschränktheit von $\{(u_\varepsilon^0(t)) : \varepsilon > 0\}$ im Raum $\tilde{\mathscr{L}}_H^2$. Daher gibt es $(\bar\varepsilon) \subset (\varepsilon)$, so daß $(u_{\bar\varepsilon}^0(t))$ schwach in $\mathscr{L}_H^2$ gegen einen Prozeß $(\xi(t))$ aus $\tilde{\mathscr{L}}_H^2$ konvergiert. Aus dem Beweis zum Satz 3.2 folgt die schwache Konvergenz von $(y_{\bar\varepsilon}^0(t))$ gegen $(y^\xi(t))$ und von $(y_{\bar\varepsilon}^{0\prime}(t))$ gegen $(y^{\xi\prime}(t))$ in $\mathscr{L}_V^2$ und $\mathscr{L}_H^2$, wobei $(y^\xi(t))$ Lösung der Gleichung (4.1) für $u(t) = \xi(t)$ ist. Weil aus der Konvexität und der Stetigkeit von J die schwache Halbstetigkeit nach unten folgt, erhält man $\varliminf_{\bar\varepsilon\downarrow 0} J_{\bar\varepsilon}(u^0) \geqq J(\xi)$. Mit (4.8) folgt hieraus $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^0) = J(u^0)$.

In der Beziehung

$$|J(u^0) - J(u_\varepsilon^0)| \leqq |J(u^0) - J_\varepsilon(u_\varepsilon^0)| + |J_\varepsilon(u_\varepsilon^0) - J(u_\varepsilon^0)|$$

konvergiert der erste Summand wegen c) gegen Null. Wegen des Satzes 3.3 und der Stetigkeit von J fällt der zweite Summand beliebig klein aus. Somit ist (u_ε^0) eine Minimalfolge. Aus den Voraussetzungen ergibt sich somit die starke Konvergenz von $(u_\varepsilon^0(t))$ in $\mathscr{L}_H^2$ gegen $(u^0(t))$, d. h. es gilt a). Aus dem Satz 3.3 folgt dann b) ∎

Bemerkung: Der letzte Satz zeigt, daß die optimalen Steuerungen der parabolisch regularisierten Aufgabe (4.1_ε), (4.2_ε) Näherungen für die Aufgabe (4.1), (4.2) liefern.

Aus der Aussage b) im Satz 4.1 und der Bemerkung 3.6 folgt

Satz 4.2: *Es gilt*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E \int_0^T \left(\|p_\varepsilon^0(t) - p^0(t)\|_V^2 + \|p_\varepsilon^{0\prime}(t) - p^{0\prime}(t)\|_H^2\right) dt = 0,$$

wobei $(p^0(t))$ *Lösung im Sinne der Bemerkung* 3.6 *der Aufgabe*

$$p^{0\prime\prime}(t) + Ap^0(t) = 2C^*(t)\,[C(t)\,y^0(t) - x_0] \tag{4.9}$$

mit $p^0(T) = 0$, $p^{0\prime}(T) = 0$ *ist.*

Man erhält also

Satz 4.3: $(u^0(t)) \in \mathscr{D}$ *ist genau dann optimale Steuerung für die Aufgabe* (4.1), (4.2), *wenn ein* $(p^0(t)) \in \mathscr{L}_V^2$ *existiert, so daß die Gleichung* (4.9) *realisierungsweise gilt und für alle* $(u(t)) \in \mathscr{D}$

$$\left(-E\{p^0(t) \mid \mathfrak{F}_t\} + 2Nu^0(t), u(t) - u^0(t)\right)_H \geqq 0 \tag{4.10}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 *und alle* $t \in [0, T]$ *gilt.*

Bemerkung 4.4: Im Falle $D = H$ ist $u_\varepsilon^0(t) = \frac{1}{2} N^{-1}E\{p_\varepsilon^0(t) \mid \mathfrak{F}_t\}$ und $u_0^0(t) = \frac{1}{2} N^{-1}E\{p^0(t) \mid \mathfrak{F}_t\}$.

Bemerkung 4.5: Die Auswertung des Maximumprinzipes im Satz 4.3 ist wegen des Auftretens der bedingten Erwartung im Ausdruck (4.8) und der zufälligen rechten Seite in der Gleichung (4.7) schwierig. Im Fall „kleiner Störungen $\gamma w(dt)$" (γ-kleiner positiver Parameter) erhält man

Satz 4.6: *Die optimale Steuerung* $(u_{00}^0(t))$ *des deterministischen Problems*

$$dy'(t) + Ay(t)\,dt = u(t)\,dt,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \tag{4.11}$$

$$J(u, y) := \int_0^T \left[\|C(t)\,y(t) - x_0\|_W^2 + (Nu(t), u(t))_H\right] dt \doteq \operatorname*{Min}_{u\in\mathscr{D}_1} \tag{4.12}$$

$$\left(\mathscr{D}_1 := \left\{(u(t)) : u \mid [0, T] \to D, \int_0^T \|u(t)\|_H^2\, dt < \infty\right\}\right)$$

ist γ-optimal für die Aufgabe

$$dy'(t) + Ay(t)\,dt = u(t)\,dt + \gamma w(dt),\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \tag{4.13}$$

$$J(u, y) = E \int_0^T \left[\|C(t)\,y(t) - x_0\|_W{}^2 + \left(Nu(t), u(t)\right)_H\right] dt \doteq \operatorname*{Min}_{u\in\mathscr{D}} \tag{4.14}$$

d. h. *es gibt ein $\gamma_0 > 0$, so daß für $\gamma \in\ ]0, \gamma_0]$ gilt*

$$0 \leqq J\left(u_{00}^0, y_{\gamma 0}(u_{00}^0)\right) - J\left(u_{\gamma 0}^0, y_{\gamma 0}(u_{\gamma 0}^0)\right) \leqq c\gamma.$$

Dabei ist $\left(y_{\gamma 0}(u_{00}^0)\right)$ Lösung der Gleichung (4.13) *für $u = u_{00}^0$, $\left(u_{\gamma 0}^0(t)\right) \in \mathscr{D}$ optimale Steuerung für* (4.13)—(4.14), *$\left(y_{\gamma 0}(u_{\gamma 0}^0)\right)$ Lösung der Geichung* (4.13) *für $u = u_{\gamma 0}^0$ und c eine von γ unabhängige Konstante.*

Beweis: Es wird betrachtet

$$d\vec{y}_\varepsilon(t) + \mathscr{A}_\varepsilon \vec{y}_\varepsilon(t)\,dt = \vec{u}(t)\,dt + \gamma w(dt),\ \vec{y}_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$J(u, \vec{y}_\varepsilon) = E \int_0^T \|\mathscr{C}(t)\,\vec{y}_\varepsilon(t) - \vec{x}_0\|_W{}^2\,dt + E \int_0^T \left(Nu(t), u(t)\right)_H dt \doteq \operatorname*{Min}_{u\in\mathscr{D}} \tag{4.16}$$

Es bezeichnen $\left(u_{\gamma\varepsilon}^0(t)\right)$ die optimale Steuerung von (4.15)—(4.16), $y_{\gamma\varepsilon}(u_{\gamma\varepsilon}^0)$ die Lösung von (4.15) für $u = u_{\gamma\varepsilon}^0$, $\left(u_{0\varepsilon}^0(t)\right)$ die optimale (deterministische) Steuerung von (4.15) bis (4.16) für $\gamma = 0$, $y_{0\varepsilon}(u_{0\varepsilon}^0)$ die Lösung von (4.15) für $u = u_{0\varepsilon}^0$. Offensichtlich gilt

$$\left|J\left(u_{\gamma 0}^0, y_{\gamma 0}(u_{\gamma 0}^0)\right) - J\left(u_{00}^0, y_{\gamma 0}(u_{00}^0)\right)\right|$$

$$\leqq \left|J\left(u_{\gamma 0}^0, y_{\gamma 0}(u_{\gamma 0}^0)\right) - J\left(u_{\gamma\varepsilon}^0, y_{\gamma\varepsilon}(u_{\gamma\varepsilon}^0)\right)\right| \tag{4.17}$$

$$+ \left|J\left(u_{\gamma\varepsilon}^0, y_{\gamma\varepsilon}(u_{\gamma\varepsilon}^0)\right) - J\left(u_{0\varepsilon}^0, y_{0\varepsilon}(u_{0\varepsilon}^0)\right)\right| \tag{4.18}$$

$$+ \left|J\left(u_{0\varepsilon}^0, y_{0\varepsilon}(u_{0\varepsilon}^0)\right) - J\left(u_{00}^0, y_{00}(u_{00}^0)\right)\right| \tag{4.19}$$

$$+ \left|J\left(u_{00}^0, y_{00}(u_{00}^0)\right) - J\left(u_{00}^0, y_{\gamma 0}(u_{00}^0)\right)\right|. \tag{4.20}$$

Für hinreichend kleine ε fällt wegen des Satzes 4.1 der Ausdruck (4.17) kleiner als γ aus. Wegen [7] ist $\left(u_{0\varepsilon}^0(t)\right)$ eine γ-optimale Steuerung von (4.15)—(4.16), d. h. der Summand (4.18) fällt für hinreichend kleine γ kleiner als const γ aus, wobei const von γ unabhängig ist. Aus der deterministischen Theorie [15] folgt für $\varepsilon \downarrow 0$ die Konvergenz von (4.19) gegen Null. Für $\vec{Z}_\gamma(t) := \begin{pmatrix} y_{\gamma 0}(t) - y_{00}(t) \\ y'_{\gamma 0}(t) - y'_{00}(t) \end{pmatrix}$ gilt $d\vec{Z}_\gamma(t) + \mathscr{A}\vec{Z}_\gamma(t)\,dt = \gamma w(dt)$. Mit der Itoformel erhält man unter Berücksichtigung der Formel (3.4)

$$E\,\|\vec{Z}\gamma(t)\|_{\mathfrak{H}}{}^2 \leqq 2E \int_0^T \langle \mathscr{A}\vec{Z}\gamma(t), \vec{Z}\gamma(t)\rangle_{\mathfrak{V}}\,dt + \gamma^2 E\,\|w(T)\|_H{}^2 = \gamma^2 E\,\|w(T)\|_H{}^2.$$

Folglich konvergiert der Term (4.20) für $\gamma \downarrow 0$ gegen Null. Somit gilt für hinreichend kleine ε und γ die Ungleichung

$$\left|J\left(u_{\gamma 0}^0, y_{\gamma 0}(u_{\gamma 0}^0)\right) - J\left(u_{00}^0, y_{\gamma 0}(u_{00}^0)\right)\right| \leqq c\gamma,$$

wobei c eine von γ unabhängige Konstante ist ∎

Beispiel 4.7: Es sei $D = L^2(G)$ und Δ der Laplaceoperator. Über dem Evolutionstripel $(\mathring{W}_2{}^1(G), L^2(G), W_2^{-1}(G))$ mit $G = [0, 1] \times [0, 1]$ ist die Steueraufgabe

$$d\left[\frac{\partial y(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right] - \Delta y(t; x_1, x_2)\, dt = u(t)\, dt + \gamma w(dt), \tag{4.21}$$

$$y(0; x_1, x_2) = y_0(x_1, x_2), \quad \left.\frac{\partial y(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right|_{t=0} = y_1(x_1, x_2), \quad y(t; x_1, x_2)|_{(x_1,x_2)\in\partial G} = 0 \tag{4.22}$$

(vgl. Bemerkung 2.6),

$$J(u, y) = E\int_0^T\int_G |y(t; x_1, x_2) - x_0(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2\, dt + E\int_0^T\int_G |u(t; x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2\, dt \doteq \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{D}} \tag{4.23}$$

ein Beispiel für das System (4.13), (4.14). Die Lösung der deterministischen Aufgabe

$$\frac{\partial^2 y t; x_1, x_2)}{\partial t^2} - \Delta y(t; x_1, x_2) = u(t; x_1, x_2) \tag{4.24}$$

($y(t; x_1, x_2)$ erfüllt die Randbedingungen (4.22)),

$$J(u, y) = \int_0^T\int_G |y(t; x_1, x_2) - x_0(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2\, dt + \int_0^T\int_G |u(t; x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2\, dt = \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{D}_1} \tag{4.25}$$

ist γ-optimal für (4.21)—(4.23). Für die optimale Steuerung des deterministischen Systems erhält man

$$u_{00}^0(t; x_1, x_2) = \frac{1}{2}\, p^0(t; x_1, x_2),$$

wobei gilt

$$\frac{\partial^2 p^0(t; x_1, x_2)}{\partial t^2} - \Delta p^0(t; x_1, x_2) = 2\big(y_{00}^0(t; x_1, x_2) - x_0(x_1, x_2)\big)$$

$$p^0(T; x_1, x_2) = 0, \quad \left.\frac{\partial p^0(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right|_{t=T} = 0, \quad p^0(t; x_1, x_2)|_{(x_1,x_2)\in\partial G} = 0.$$

LITERATUR

[1] BECHER, H., und W. GRECKSCH: Anwendung der Dualitätstheorie in der stochastischen Steuertheorie. Math. Nachr. **115** (1983).

[2] BENSOUSSAN, A.: Control of stochastic differential equations. In: Control and Systems Theory **6** (Ed.: W. H. Ray), Dekker Publishers: New York 1978, 210—247.

[3] CHAJNOWSKA-MICHALIK, A.: Stochastic differential equations in Hilbert spaces. In: Banach Center Publications **5**, PWN — Polish Scientific Publishers: Warszawa 1979, 53—74.

[4] Curtain, R., and A. J. Pritchard: Infinite dimensional linear systems theory (Lecture notes in control and informations sciences Vol. 8). Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1978.

[5] Гихман, И. И.: Решение начально-краевой задачи для стохастического уравнения гиперболического типа методом фурье. Теория случ. проц. 8 (1980), 31—35.

[6] Гихман, И. И.: О первой начально-краевой задаче для стохастического гиперболического уравнения. Теория случ. проц. 8 (1980), 20—31.

[7] Grecksch. W.: Eine Steueraufgabe für eine parabolische Itogleichung. Tagungsmaterial des 27. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1982, Vortragsreihe „Mathematische Optimierung — Theorie und Anwendung", 87—90.

[8] Крылов, Н. В., и Б. Л. Розовский: О случайных эволюционных уравнениях. В сб.: Итоги науки и техники 14. Изд-во ВИНИТИ: Москва 1979, 71—146.

[9] Ладыженская, О. А.: Краевые задачи математической физики. Изд-во Наука: Москва 1973.

[10] Lions, J. L.: Optimal control of systems gouverned by partial differential equations. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1971.

[11] Lions, J. L., and E. Magenes: Non homogeneous boundary value problems and applications I. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1972.

[12] Metivier, M., and G. Pistone: Une formule d'isometrie pour l'integrale stochastique hilbertienne et equations d'evolution lineaires stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33 (1975), 1—18.

[13] Pardoux, E.: Equations aux dérivées partielles stochastiques non lineaires monotones. These doct. sci. math. Univ. Paris Sud 1975.

[14] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis II — Monotone Operatoren —. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1977.

[15] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis III — Variationsmethoden und Optimierung —. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1978.

Manuskripteingang: 15. 12. 1982

VERFASSER:

Dr. Wilfried Grecksch
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer"
DDR-4200 Merseburg, Geusaer Str.