Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (3) (1984), S. 245–262

Lokale Reflexivität und lokale Dualität von Ultraprodukten für halbgeordnete Banachräume

K.-D. Kürsten

Es sei L ein endlichdimensionaler Unterraum des dualen $(E_i)_U{}^*$ zum Ultraprodukt geordneter Banachräume. Dann existiert eine positive isometrische Einbettung von L in $(E_i{}^*)_U$, die noch zusätzlichen Bedingungen genügt. Im Falle von Banachverbänden kann die isometrische Einbettung als Verbandshomomorphismus gewählt werden. Für die nach dem Prinzip der lokalen Reflexivität existierenden fastisometrischen Einbettungen endlichdimensionaler Unterräume von E^{**} in E lasen sich entsprechende, jedoch etwas schwächere Positivitätseigenschaften erreichen.

Допустим что $(E_i)_U$ ултрапроизведение упорядоченных банаховых пространств и что L конечномерное подпространство сопряженного пространства $(E_i)_U{}^*$. Тогда существует положительное изометрическое вложение L в $(E_i{}^*)_U$, которое удовлетворяет еще некоторым дополнительным условиям. В случае банаховых решеток изометрическое вложение можно взять как гомоморфизм решеток. На существующие по принципу локальной рефлексивности почти изометрические вложения конечномерных подпространств E^{**} в E можно накладывать соответственные, но несколько более слабые условия положительности.

Let $(E_i)_U$ be the ultraproduct of ordered Banach spaces and let L be a finite dimensional subspace of the dual $(E_i)_u{}^*$. Then there exists a positive isometric imbedding of L into $(E_i{}^*)_U$ also satisfying some additional conditions. In the case of Banach lattices the isometric imbedding may be chosen as a lattice homomorphism. Similar but somewhat weaker positivity properties can be satisfied for the almost isometric imbeddings of finite dimensional subspaces of E^{**} into E which exist by the principle of local reflexivity.

1. Einleitung

Die in dieser Arbeit bewiesenen vier Theoreme haben mit dem Prinzip der lokalen Reflexivität von J. Lindenstrauss und H. P. Rosenthal [11] gemeinsam, daß die endliche Darstellbarkeit eines Banachraumes in einem bestimmten Unterraum behauptet wird, wobei noch zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Beim Prinzip der lokalen Reflexivität wird der Bidualraum E^{**} in E endlich dargestellt, während die lokale Dualität von Ultraprodukten die endliche Darstellbarkeit des Dualraumes eines Ultraproduktes im Ultraprodukt der Dualräume beinhaltet. Theorem 1 ist im wesentlichen das bekannte Prinzip der lokalen Reflexivität, wobei zusätzlich eine Positivitätseigenschaft erreicht wird. Wie W. A. Gejler und I. I. Čučaev zeigten, gilt dieses Theorem auch für lokalkonvexe Räume. Theorem 2 stammt im wesentlichen von J. L. Conroy und L. C. Moore jr. [2] und beinhaltet die lokale Reflexivität von Banachverbänden. Die Theoreme 3 und 4 beinhalten die lokale Dualität von Ultraprodukten von halbgeordneten Banachräumen bzw. von Banachverbänden. Die ersten Varianten von Theorem 3 wurden unabhängig in [10] und in [14] veröffentlicht. Theorem 4 wurde vom Autor zuerst auf der Konferenz zur Banachraumtheorie in Bukarest, September 1981, vorgestellt [9]. Für Varianten der Theoreme 1, 2 und 3 sind eine Reihe anderer Beweise und Anwendungen bekannt (vgl. z. B. [1, 3, 6, 7]). Die hier angegebenen Beweise beruhen alle auf einem Trennungssatz für eine Anzahl konvexer Mengen (Lemma 4). Die Arbeit wird durch einige Beispiele, die den Gültigkeitsbereich der Theoreme abgrenzen, beendet. Bezüglich weiterer Eigenschaften von Ultraprodukten bzw. bezüglich elementarer Eigenschaften von Banachverbänden sei auf [6] bzw. auf [13] verwiesen.

2. Bezeichnungen und Definitionen

Es werden halbgeordnete Banachräume E mit Positivitätskegel K betrachtet. Im allgemeinen wird dabei nur verlangt, daß K konvex und positiv homogen ist und die Null enthält. Ist $K \subset E$ bzw. $K' \subset E^*$, so definieren wir die dualen Kegel

$$K^+ = \{f \in E^* \colon \operatorname{Re} f(x) \geqq 0 \text{ für jedes } x \in K\}$$

bzw.

$$K'_+ = \{x \in E \colon \operatorname{Re} f(x) \geqq 0 \text{ für jedes } f \in K'\}.$$

Für $C \subset E$ und $x \in E$ betrachten wir den Abstand

$$d(x, C) = \inf \{\|x - y\| \colon y \in C\}.$$

Ordnungsintervalle werden mit $[x, y]$ bezeichnet.

Mit I bezeichnen wir eine Indexmenge und mit U einen Ultrafilter auf I. Es sei eine Familie $(E_i \colon i \in I)$ halbgeordneter Banachräume mit den Positivitätskegeln $K_i \subset E_i$ gegeben.

Zur Definition des Ultraprodukts (vgl. z. B. [6]) betrachtet man auf dem Raum $\{(x_i \colon i \in I) \colon x_i \in E_i, \sup \|x_i\| < \infty\}$ die Halbnorm $\lim_U \|x_i\|$. Der Faktorraum nach dem Kern dieser Halbnorm wird *Ultraprodukt der Räume E_i bezüglich U* genannt und mit $(E_i)_U$ bezeichnet. Seine Elemente werden mit $(x_i)_U$ bezeichnet. Ein Element $(x_i)_U$ ist bereits definiert, wenn x_i für alle i aus einem Element des Ultrafilters definiert und gleichmäßig beschränkt ist, denn man kann für die restlichen i setzen $x_i = 0$. Eine bestimmte von $i \in I$ abhängige Aussage heißt für fast alle i erfüllt, wenn die Menge derjenigen $i \in I$, für die diese Aussage gilt, zum Ultrafilter gehört. Sind Teilmengen $C_i \subset E_i$ gegeben, so definieren wir

$$(C_i)_U = \{(x_i)_U \colon x_i \in C_i \text{ für fast alle } i\}.$$

In $(E_i)_U$ wird der Positivitätskegel $(K_i)_U$ betrachtet. Sind die Räume E_i Banachverbände, so ist auch $(E_i)_U$ ein Banachverband, und es gilt $(x_i)_U \vee (y_i)_U = (x_i \vee y_i)_U$. Das Ultraprodukt der dualen Räume $(E_i^*)_U$ wird durch die Formel

$$\big(J(f_i)_U\big)\big((x_i)_U\big) = \lim_U f_i(x_i)$$

linear und isometrisch in $(E_i)_U^*$ eingebettet. Dabei ist im allgemeinen $J\big((E_i^*)_U\big) \neq (E_i)_U^*$ und in den Theoremen 3 und 4 wird die Relation zwischen diesen beiden Räumen untersucht. Dabei werden noch folgende Bezeichnungen verwendet:

$$(E_i)_U = G, \quad J\big((E_i^*)_U\big) = F \subset G^*, \quad Z' = (K_i)_U^+, \quad Z = J(K_i^+)_U \subset F.$$

Außerdem bezeichnen wir das Element $J(f_i)_U$ ebenfalls als $(f_i)_U$.

In den Theoremen 1 und 2 werden halbgeordnete Räume E betrachtet. Dabei werden im Unterschied zum Ultraproduktfall folgende Bezeichnungen verwendet:

$$J \text{ ist die kanonische Einbettung von } E \text{ in } E^{**}, \ JE = F,$$

$$E^* = G, \quad E^{**} = G^*, \quad JK = Z \subset F, \quad K^{++} = Z' \subset G^*.$$

Das Produkt E^n von n Banachräumen E ist mit der Norm

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = (\sum \|x_j\|^2)^{1/2}$$

wieder ein Banachraum. Das Produkt der Dualräume $(E^*)^n$ wird mit dem Dualraum des Produktes $(E^n)^*$ identifiziert, wenn man setzt

$$(f_1, \ldots, f_n)\big((x_1, \ldots, x_n)\big) = \sum f_j(x_j).$$

Durch die Formel

$$(x_{1i}, \ldots, x_{ni})_U = \big((x_{1i})_U, \ldots, (x_{ni})_U\big)$$

wird $(E_i{}^n)_U$ mit $\big((E_i)_U\big)^n$ identifiziert. Diese Identifizierungen werden wir ohne weiteren Hinweis verwenden.

3. Formulierung der Resultate

In diesem Abschnitt werden die Theoreme über lokale Reflexivität bzw. über lokale Dualität von Ultraprodukten für halbgeordnete Banachräume und für Banachverbände formuliert. Die folgenden Abschnitte beinhalten die Beweise für diese Theoreme.

Theorem 1: *Sei E ein Banachraum, $K \subset E$ ein Kegel, $\varepsilon > 0$, und seien $L \subset E^{**}$ und $M \subset E^*$ endlichdimensionale Unterräume. Dann existiert eine lineare Abbildung $S\colon L \to E$, so daß für beliebige $f \in L$ und $x \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $(1 - \varepsilon)\,\|f\| \leqq \|Sf\| \leqq (1 + \varepsilon)\,\|f\|$.
2. $x(Sf) = f(x)$.
3. $d(Sf, K) \leqq d(f, K^{++}) + \varepsilon\,\|f\|$.
4. *Wenn $f \in J(E)$ ist, dann gilt $JSf = f$.*

Theorem 2: *Sei E ein Banachverband, $L \subset E^{**}$ ein endlichdimensionaler Unterverband, $M \subset E^*$ ein endlichdimensionaler Unterraum und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein linearer Operator $S\colon L \to E$, so daß für beliebige $f, g \in L$ und $x \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $(1 - \varepsilon)\,\|f\| \leqq \|Sf\| \leqq (1 + \varepsilon)\,\|f\|$.
2. $|x(Sf) - f(x)| \leqq \varepsilon\,\|f\|\,\|x\|$.
3. $S(f \vee g) = (Sf) \vee (Sg)$.
4. *Wenn $f \in JK$ ist, dann gilt $JSf \leqq f$.*

Hat E ordnungsstetige Norm, so kann zusätzlich erreicht werden:

5. *Wenn $f \in JE \cap L$ ist, dann gilt $\|JSf - f\| \leqq \varepsilon\,\|f\|$.*

Theorem 3: *Sei E_i eine Familie von halbgeordneten Banachräumen mit Positivitätskegeln $K_i \subset E_i$ und sei U ein Ultrafilter auf der Indexmenge I. Seien $L \subset (E_i)_U{}^*$ und $M \subset (E_i)_U$ separable Unterräume. Dann existiert ein linearer Operator $S\colon L \to (E_i{}^*)_U$, so daß für beliebige $f \in L$ und $x \in M$ folgendes gilt:*

1. $\|Sf\| = \|f\|$.
2. $JSf(x) = f(x)$.
3. $d\big(Sf, (K_i{}^+)_U\big) \leqq d\big(f, (K_i)_U{}^*\big)$.
4. *Wenn $f \in J(E_i{}^*)_U$ ist, dann gilt $JSf = f$.*

Außerdem ist $J(K_i{}^+)_U = (K_i)_U{}^+ \cap J(E_i{}^*)_U$, und folglich ist $(K_i{}^+)_U$ abgeschlossen.

Theorem 4: *Sei E_i eine Familie von Banachverbänden, U ein Ultrafilter auf der Indexmenge I, $L \subset (E_i)_U^*$ ein endlichdimensionaler Unterverband und $M \subset (E_i)_U$ ein separabler Unterraum. Dann existiert ein linearer Operator $S: L \to (E_i^*)_U$, so daß für beliebige $f, g \in L$ und $x \in M$ gilt:*

1. $\|Sf\| = \|f\|$.
2. $JSf(x) = f(x)$.
3. $(Sf) \vee (Sg) = S(f \vee g)$.
4. *Wenn $f \in J(K_i^+)_U$ ist (d. h. $f \in J(E_i^*)_U$ und $f \geqq 0$), dann gilt $(Sf) \wedge (f - Sf) = 0$.*

Bemerkungen: Theorem 1 ohne Behauptung 3 ist das Prinzip der lokalen Reflexivität in der Fassung von W. B. JOHNSON, H. P. ROSENTHAL und M. ZIPPIN [7]. Theorem 2 ohne Behauptung 4 wurde von S. J. BERNAU [1] veröffentlicht. Theorem 3 unterscheidet sich von der Formulierung der lokalen Dualität von Ultraprodukten durch S. HEINRICH [6] dadurch, daß Behauptung 3 hinzugekommen ist und daß die abzählbare Unvollständigkeit des Ultrafilters für den Beweis nicht mehr benötigt wird.

4. Endliche Charakterisierung von Eigenschaften endlichdimensionaler Operatoren

Zur Definition linearer Operatoren werden Gleichungen $Tf_j = g_j$ Verwendung finden, wobei $(f_j)_{j=1}^m$ eine vorher festgelegte endliche oder unendliche Folge in G^* sein wird, während $(g_j)_{j=1}^m$ eine Folge sein wird, die bestimmten Bedingungen genügt. Bei der Formulierung dieser Bedingungen spielen die im folgenden definierten Mengen logischer Formeln eine Rolle. Die auftretenden Parameter a_j aus dem Zahlenkörper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, $c \in [0, \infty)$, $x_j \in G$ und $f \in F$ sollen dabei jeweils die angegebene Menge durchlaufen, wobei aber für jede Formel mindestens eins und höchstens endlich viele der Elemente x_j bzw. Zahlen a_j von Null verschieden sind. Es sei nun

P_1 die Menge der Formeln

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j g_j \right\| \leqq c \quad \text{und} \quad \left| \sum_{j=1}^m g_j(x_j) - b \right| \leqq c,$$

P_2 die Menge der Formeln

$$d\left(\sum_{j=1}^m a_j g_j + f, Z' \right) \leqq c,$$

P_3 die Menge der Formeln

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j g_j + f \right\| \leqq c$$

und P_4 die Menge der Formeln

$g_j \in Z'$ (d. h., für jedes j wird eine Formel erhalten).

Wir setzen $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$.

Für $Q \subset P$ bedeutet $(g_j) \models Q$, daß $(g_j)_{j=1}^m$ eine Folge von Elementen von G ist, die jede Formel aus Q erfüllt. Für logische Formeln $p \in P$ werden außerdem noch Approximationen betrachtet. Und zwar bezeichnen wir für $\varepsilon \geqq 0$ mit $p(\varepsilon)$ die Formel, die man aus p erhält, indem man c durch $c + \varepsilon$ und Z' durch Z ersetzt und außerdem $g_j \in F$ (für alle j) fordert. Ist $G = (E_i)_U$, so hat jeder Parameter x_j bzw. f, der in p

eingeht, eine Darstellung $(x_{ji})_U$ bzw. $(f_i)_U$, wobei (für jedes feste p) die Elemente $x_{ji} \in E_i$ und $f_i \in E_i^*$ für das weitere festgehalten werden sollen. Die Formel $p(\varepsilon, i)$ erhält man in diesem Falle aus der Formel p, indem man c durch $c + \varepsilon$, Z' durch K_i^+, f durch f_i und x_j durch x_{ji} ersetzt und außerdem noch $g_j \in E_i^*$ (für alle j) verlangt. Ist $Q \subset P$, so sei $Q(\varepsilon) = \{p(\varepsilon): p \in Q\}$ und $Q(\varepsilon, i) = \{p(\varepsilon, i): p \in Q\}$. Ist Q eine Menge approximierter Formeln, so bedeutet $(g_j) \models Q$, daß $(g_j)_{j=1}^m$ eine Folge von Elementen des entsprechenden Raumes ist, die jede Formel aus Q erfüllt.

Lemma 1: *Sei $\theta > 0$, seien $L \subset G^*$ und $M \subset G$ endlichdimensionale Teilräume und sei $f_1, \ldots, f_m$ eine Basis von L. Dann existieren eine positive Zahl δ und endliche Teilmengen $Q \subset P_1$ und $R \subset P_2$, so daß folgendes gilt:*

1. $(f_j) \models Q \cup R$.

2. *Aus $(g_j) \models Q(\delta)$ folgt für den durch $Tf_j = g_j$ auf L definierten linearen Operator und für beliebige $f \in L$ und $x \in M$*

$$(1 - \theta) \|f\| \leqq \|Tf\| \leqq (1 + \theta) \|f\|, \tag{1}$$

$$|(f - Tf)(x)| \leqq \theta \|f\| \|x\|. \tag{2}$$

3. *Aus $(g_j) \models Q(\delta) \cup R(\delta)$ folgt für den in Behauptung 2 definierten linearen Operator T und für beliebiges $f \in L$*

$$d(Tf, Z) \leqq d(f, Z') + \theta \|f\|. \tag{3}$$

Beweis: Sei vorerst $0 < \delta < 1$ beliebig. Sind $f = \sum_{j=1}^m a_j f_j$ und $x \in G$ beliebig, aber fest vorgegeben, so werden die folgenden Formeln durch $(f_j)_{j=1}^m$ erfüllt und liegen in P_1 bzw. P_2:

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j g_j \right\| \leqq \|f\|, \quad |\sum a_j g_j(x) - f(x)| \leqq 0, \quad d(\sum a_j g_j, Z') \leqq d(f, Z').$$

Ist T der in Behauptung 2 definierte lineare Operator, so sind diese Formeln äquivalent zu

$$\|Tf\| \leqq \|f\|, \quad |(Th)(x) - h(x)| \leqq 0, \quad d(Tf, Z') \leqq d(f, Z').$$

Ist nun A ein endliches δ-Netz der Sphäre $\{f \in L: \|f\| = 1\}$, und bestimmt man eine endliche Menge $B \subset G$ so, daß B ein endliches δ-Netz der Sphäre $\{x \in M: \|x\| = 1\}$ ist und außerdem für jedes $f \in A$ ein x mit $\|x\| = 1$ und $|f(x)| \geqq 1 - \delta$ enthält, so erhält man die endlichen Formelmengen $Q \subset P_1$ und $R \subset P_2$, indem in den oben angegebenen Formeln f die Menge A und x die Menge B durchläuft.

Sei $f \in L$, $\|f\| = 1$ und sei $x \in M$, $\|x\| = 1$. Es gibt Darstellungen

$$f = \sum_{s=0}^\infty \lambda_s h_s \quad \text{mit} \quad |\lambda_s| \leqq \delta^s \quad \text{und} \quad h_s \in A,$$

$$x = \sum_{s=0}^\infty \mu_s y_s \quad \text{mit} \quad |\mu_s| \leqq \delta^s \quad \text{und} \quad y_s \in B,$$

sowie Elemente $h \in A$ und $y \in B$ mit $\|f - h\| \leqq \delta$, $\|y\| = 1$ und $|h(y)| \geqq 1 - \delta$. Aus $(g_j) \models Q(\delta)$ und $Tf_j = g_j$ folgt dann

$$\|Tf\| \leqq \sum |\lambda_s| \|Th_s\| \leqq (1 + \delta) \sum_{s=0}^\infty \delta^s = (1 + \delta)/(1 - \delta),$$

$$\|Tf\| \geqq |Tf(y)| \geqq |(T(f-h))(y) + (Th)(y)| \geqq 1 - 2\delta - \delta(1+\delta)/(1-\delta),$$

$$|Tf(x) - f(x)| = \left| \sum_{r,s=0}^{\infty} \lambda_s \mu_r (Th_s - h_s)(y_r) \right| \leqq \delta(1-\delta)^{-2}.$$

Ist außerdem $(g_j) \models R(\delta)$ erfüllt, so folgt

$$\begin{aligned} d(Tf, Z) &\leqq d(Th, Z) + \|T(f-h)\| \leqq d(h, Z') + \delta + \|T\| \|f-h\| \\ &\leqq d(f, Z') + \delta + \delta + \delta(1+\delta)/(1-\delta). \end{aligned}$$

Ist δ genügend klein, so sind also alle Behauptungen von Lemma 1 erfüllt ∎

Lemma 2: *Sei G ein Banachverband und $\delta > 0$. Wenn $f_1, \ldots, f_m \in G^*$, $f_j \wedge f_k = 0$ $(k \neq j)$ und $0 \leqq x \in G$ ist, dann existieren $x_1, \ldots, x_m \in G$, so daß $x_j \geqq 0$, $x = x_1 + \cdots + x_m$ und $f_j(x_k) < \delta$ $(k \neq j)$ gilt.*

Dieses Lemma ist ein Spezialfall von Lemma 7 in [1] und besitzt einen einfachen Induktionsbeweis.

Lemma 3: *Seien G und $F \subset G^*$ Banachverbände, $L \subset G^*$ ein endlichdimensionaler Unterverband und $f_1, \ldots, f_m$ eine Basis aus Atomen für L. Seien weiterhin ein $\theta > 0$ und eine endliche Menge $Q \subset P_1$ mit $(f_j) \models Q$ gegeben. Dann existiert eine Zahl $\delta \in (0, 1)$ und eine endliche Menge $R \subset P_1$, so daß $(f_j) \models R$ gilt, und so daß aus $(h_j) \models R(\delta)$ und aus*

$$d\left(g_j, \left[\left(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\right)^+, (1+\delta^{1/2}) h_j\right]\right) \leqq \delta \tag{4}$$

folgt $(g_j) \models Q(\theta)$.

Beweis: Sei $\delta \in (0, 1)$ vorerst beliebig und sei

$$e_j \in \left[\left(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\right)^+, (1+\delta^{1/2}) h_j\right].$$

Angenommen, es gilt $\|g_j - e_j\| \leqq \delta$. Es reicht aus, das Lemma für den Fall einer einelementigen Menge $Q = \{p\}$ zu beweisen, weil man im allgemeinen Fall die für die einzelnen Formeln aus Q erhaltenen Mengen R vereinigen und das minimale δ nehmen kann. Im weiteren Beweis werden zwei Fälle unterschieden.

1. *Fall:* Sei $p = (\|\sum a_j g_j\| \leqq c)$.

Es gilt $\|\sum |a_j| f_j\| = \|\sum a_j f_j\| \leqq c$. Gehört die Formel $(\|\sum |a_j| g_j\| \leqq c)$ zu R, so folgt aus $(h_j) \models R(\delta)$,

$$\begin{aligned} \|\sum a_j g_j\| &\leqq \delta \sum |a_j| + \|\sum a_j e_j\| \\ &\leqq \delta \sum |a_j| + (1+\delta^{1/2}) \|\sum |a_j| h_j\| \\ &\leqq \delta \sum |a_j| + (1+\delta^{1/2})(c+\delta). \end{aligned}$$

Für genügend kleines δ folgt also die Behauptung.

2. *Fall:* Sei $p = (|\sum g_j(x_j) - b| \leqq c)$.

Wendet man auf den positiven Teil x_j^+ und den negativen Teil x_j^- von x_j jeweils Lemma 2 an, so findet man nichtnegative Elemente x_{jk}^+ und x_{jk}^-, so daß $x_j^\pm = \sum_{k=1}^m x_{jk}^\pm$ und (falls $k \neq l$ ist) $f_l(x_{jk}^\pm) < \delta$ gilt. Sind nun die Formeln

$$(|g_l(x_{jk}^\pm) - f_l(x_{jk}^\pm)| \leqq 0 \qquad (j, k, l \in \{1, \ldots, m\})$$

in R enthalten, so folgt aus $(h_j) \models R(\delta)$ für festes j und festes k:

$$(1 + \delta^{1/2})\, h_j(x_{jk}^{\pm}) \geqq e_j(x_{jk}^{\pm}) \geqq \Big(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{l \neq j} h_l\Big)^+ (x_{jk}^{\pm})$$
$$\geqq h_j(x_{jk}^{\pm}) - \delta^{-1/2} \sum_{l \neq j} h_l(x_{jk}^{\pm}) \geqq h_j(x_{jk}^{\pm}) - 2\delta^{1/2} m.$$

Man erhält weiter:

$$|(h_j - e_j)\,(x_{jk}^{\pm})| \leqq \delta^{1/2}\big(2m + h_j(x_{jk}^{\pm})\big) \leqq \delta^{1/2}(2m + \|f_j\|\,\|x_j\| + \delta),$$
$$|(g_j - f_j)\,(x_{jk}^{\pm})| \leqq \big|\big((g_j - e_j) + (e_j - h_j) + (h_j - f_j)\big)\,(x_{jk}^{\pm})\big|$$
$$\leqq \delta\, \|x_j\| + \delta^{1/2}(2m + \|f_j\|\,\|x_j\| + \delta) + \delta.$$

Für genügend kleines δ folgt daraus

$$\Big|\sum g_j(x_j) - b\Big| = \Big|\sum_{j,k} g_j(x_{jk}^+ - x_{jk}^-) - b\Big|$$
$$\leqq \Big|\sum_{j,k} f_j(x_{jk}^+ - x_{jk}^-) - b\Big| + \theta \leqq c + \theta \;\blacksquare$$

Bemerkung: Es seien Zahlen $\lambda_k \in \{0, 1\}$ mit $\lambda_j = 1$ (j wird festgehalten) und ein Element e mit $\left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k h_k - e \right\| \leqq \delta$ gegeben. Sind die h_j positiv und ist $\eta \in [\delta^{1/2}, \delta^{-1/2}]$, so gilt (4), z. B., wenn

$$g_j = \Big(h_j - \eta \sum_{k \neq j} h_k\Big)^+ \wedge e$$

oder

$$g_j = \sup_{l \in \mathbb{N}} \Big(l \Big(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\Big)^+ \Big) \wedge \sum \lambda_k h_k$$

ist. Um dies für die erste Formel zu beweisen, setzen wir $d = \Big(h_j - \eta \sum_{k \neq j} h_k\Big)^+$. Es folgt $0 \leqq d - g_j = d - d \wedge e = (d - e)^+ \leqq (\sum \lambda_k h_k - e)^+$, also gilt $\|d - g_j\| \leqq \|\sum \lambda_k h_k - e\| \leqq \delta$.

Für die zweite Formel benutzen wir, daß für beliebige positive Elemente $d, f \in G^*$ und für $c \in (0, 1)$ gilt

$$\big(m(d - c^{-1}f)^+\big) \wedge (d + f) \leqq \big(mc^{-1}(cd - f)^+\big) \wedge \big((1 + c)\, d + (f - cd)^+\big)$$
$$\leqq (1 + c)\, d.$$

Es folgt für jede natürliche Zahl l

$$\Big(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\Big)^+ \leqq \Big(l\Big(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\Big)^+\Big) \wedge \sum_{k=1}^{m} \lambda_k h_k \leqq (1 + \delta^{1/2})\, h_j.$$

5. Ein Trennungssatz

Der folgende Trennungssatz für eine Anzahl konvexer Mengen ist das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der Theoreme. Er wird hier nur für Banachräume benötigt, wird aber für beliebige lokalkonvexe Räume bewiesen. Varianten des Satzes sind schon bekannt. So ist das Lemma von A. Ja. Dubowizki und A. A. Miljutin (vgl. z. B. [15]) ein Spezialfall von Lemma 4a).

Lemma 4: a) *Seien $C_1, \ldots, C_r$ konvexe Teilmengen von E mit nichtleerem Inneren und $C_0 \subset E$ eine nichtleere konvexe Menge. Ist kein Punkt von C_0 zugleich innerer*

Punkt von $C_1 \cap \cdots \cap C_r$, *so existieren reelle Zahlen* $b_0, \ldots, b_r$ *und Elemente* $f_0, \ldots, f_r$ *des Dualraumes* E^*, *von denen wenigstens eins von Null verschieden ist, so daß*

$$\sum f_s = 0, \quad \sum b_s = 0, \quad \textit{und} \quad \operatorname{Re} f_s(x) \geqq b_s \quad \textit{im Falle } x \in C_s \tag{5}$$

gilt.

b) *Sind* C_s $(s = 0, 1, \ldots, r)$ *nichtleere* $\sigma(E^*,E)$*-abgeschlossene konvexe Teilmengen des Dualraumes* E^* *mit leerem Durchschnitt und ist* C_0 $\sigma(E^*,E)$*-kompakt, so existieren Elemente* $x_0, \ldots, x_r$ *von* E *und reelle Zahlen* $b_0, \ldots, b_r$, *so daß*

$$\sum x_s = 0, \quad \sum b_s > 0, \quad \textit{und} \quad \operatorname{Re} f(x_s) \geqq b_s \quad \textit{im Falle } f \in C_s$$

gilt.

Beweis: Es reicht aus, das Lemma für reelle lokalkonvexe Räume zu beweisen, denn wenn E ein komplexer lokalkonvexer Raum ist, dann kann E^* mit dem Dualraum zum zu E assoziierten reellen Raum identifiziert werden. Dem Funktional f entspricht dabei das reell-lineare Funktional $x \to \operatorname{Re} f(x)$ (vgl. [12]).

a) 1. *Schritt:* Hat ein endlicher Durchschnitt von Kegeln $\cap K_s$ innere Punkte, so gilt $\cap \bar{K}_s = \overline{\cap K_s}$. (Mit $\bar{C}$ wird der Abschluß einer Menge C bezeichnet.) Sind nämlich eine Nullumgebung B und ein x_0 so gewählt, daß $x_0 + B \subset \cap K_s$ gilt, so folgt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\cap \bar{K}_s \subset \cap (K_s + \varepsilon B) \subset \cap (K_s + K_s - \varepsilon x_0) = -\varepsilon x_0 + \cap K_s.$$

2. *Schritt:* Hat ein endlicher Durchschnitt von Kegeln innere Punkte, so gilt $(\cap K_s)^+ = \sum K_s^+$. In der Tat, nach einer Schlußfolgerung aus dem Bipolarensatz (vgl. [12]) ist $\sum K_s^+$ in $(\cap \bar{K}_s)^+ = (\overline{\cap K_s})^+ = (\cap K_s)^+$ dicht bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(E^*, E)$. Konvergiert aber $h_i = \sum h_{si}$ $(h_{si} \in K_s^+)$ bezüglich eines Ultrafilters U in der $\sigma(E^*,E)$-Topologie gegen $h \in E^*$, so gilt für Elemente x einer in $\cap K_s$ enthaltenen offenen Menge $0 \leqq h_{si}(x) \leqq h_i(x)$. Deshalb existiert $\sigma(E^*, E)\text{-}\lim_U h_{si} = h_s \in K_s^+$, und es gilt $h = \sum h_s$. Also ist $\sum K_s^+$ bereits abgeschlossen.

3. *Schritt:* Der von $C_s \times 1$ in $E \times \mathbf{R}$ erzeugte Kegel werde mit K_s bezeichnet. Es existiert eine eindeutig bestimmte Zahl n, so daß $\bigcap_{s=n+1}^{r} K_s$ innere Punkte enthält, während das Innere von $\bigcap_{s=n}^{r} K_s$ leer ist. Die konvexen Mengen K_n und $\bigcap_{n+1}^{r} K_s$ lassen sich nun durch eine Hyperebene trennen, d. h., es existiert ein $h \in (E \times \mathbf{R})^*$ mit $h \neq 0$, $h \in K_n^+$ und $-h \in \left(\bigcap_{n+1}^{r} K_s\right)^+ = \sum_{n+1}^{r} K_s^+$. Also ist $-h = \sum_{n+1}^{r} h_s$ mit $h_s \in K_s^+$. Verwendet man die Identifizierung $(E \times \mathbf{R})^* = E^* \times \mathbf{R}$ und setzt $f_s = 0$ und $b_s = 0$ für $s < n$, $(f_n, -b_n) = h$ und $(f_s, -b_s) = h_s$ für $s > n$, so sind alle Behauptungen von Lemma 4a) erfüllt.

b) Jetzt sei für $s \geqq 1$ mit K_s der von $C_s \times 1$ in $E^* \times \mathbf{R} = (E \times \mathbf{R})^*$ erzeugte w^*-abgeschlossene konvexe Kegel bezeichnet. Außerdem sei $K_0 = C_0 \times 1$. Elemente aus $\cap K_s$ haben notwendigerweise die Gestalt $(f, 1)$ mit $f \in \cap C_s$. Also lassen sich die Mengen K_0 und $\bigcap_{s=1}^{r} K_s$ durch eine $\sigma(E^*,E)$-abgeschlossene Hyperebene streng trennen — es existiert ein $y \in E \times \mathbf{R}$ mit

$$\sup \{h(y) : h \in K_0\} < 0 = \inf \left\{h(y) : h \in \bigcap_{s=1}^{r} K_s\right\}.$$

Nun ist $\sum_{s=1}^{r} (K_s)_+$ auf Grund der bereits erwähnten Schlußfolgerung aus dem Bipolarensatz schwach dicht in $\left(\bigcap_{s=1}^{r} K_s\right)_+$. Konvergiert $y_i \in \sum_{s=1}^{r} (K_s)_+$ bezüglich eines Ultrafilters U schwach gegen y, so folgt aus der Kompaktheit von K_0 für fast alle i

$$\sup \{h(y_i): h \in K_0\} < 0.$$

Man kann deshalb (nachdem eventuell y durch ein geeignetes y_i ersetzt wurde) voraussetzen $y = \sum_{s=1}^{r} y_s = \sum_{s=1}^{r} (x_s, -b_s)$, wobei $y_s = (x_s, -b_s) \in (K_s)_+$ ist. Setzt man noch

$$(x_0, -b_0) = -y_0 - \big(0, \sup \{h(y): h \in K_0\}\big),$$

so sind alle Behauptungen von Lemma 4b) erfüllt ∎

Bemerkung: Lemma 4 läßt sich umkehren. Sind z. B. konvexe Mengen $C_0, \ldots, C_r$ in E, reelle Zahlen $b_0, \ldots, b_r$ und Funktionale $f_0, \ldots, f_r$ gegeben, und ist (5) erfüllt, so enthält C_0 keinen inneren Punkt von $C_1 \cap \cdots \cap C_r$. Wäre x ein solcher Punkt, so würde folgen $f_s(x) \geqq b_s$, und wenigstens eine dieser Ungleichungen wäre echt, also wäre $0 = \sum f_s(x) > \sum b_s = 0$.

6. Beweis der Theoreme 1 und 2

Im folgenden Lemma 5 und beim Beweis der Theoreme 1 und 2 werden die dafür eingeführten Bezeichnungen $G = E^*$, $Z = JK$ usw. verwendet.

Lemma 5: *Seien eine endliche Menge von Formeln $Q \subset P$ und eine Folge $(f_j)_{j=1}^{m}$ in G^* so gegeben, daß $(f_j) \models Q$ gilt, und sei $\delta > 0$. Dann gibt es eine Folge (g_j) mit $(g_j) \models Q(\delta)$.*

Beweis: Da nur endlich viele g_j in Formeln $p \in Q$ eingehen, können wir voraussetzen, daß $m < \infty$ ist. Es reicht nun aus, zu zeigen, daß folgende Teilmengen von E^m nichtleeren Durchschnitt haben:

$$C_0 = \{(g_1, \ldots, g_m): g_j \in K \text{ für alle diejenigen } j, \text{ für die die Formel } (g_j \in Z') \text{ zu } Q \text{ gehört}\},$$

$$C_p = \{(g_1, \ldots, g_m): (Jg_j) \models p(\delta)\} \qquad (p \in Q \setminus P_4).$$

Für $p \in Q \setminus P_4$ gehört $(f_1, \ldots, f_m)$ zum w^*-Abschluß von $\{(g_1, \ldots, g_m): (g_j) \models p(\delta/2)\}$. Es ist leicht zu sehen, daß die Mengen C_p innere Punkte enthalten, und daß $(f_1, \ldots, f_m)$ innerer Punkt vom w^*-Abschluß von JC_p ist. Außerdem gehört $(f_1, \ldots, f_m)$ zum w^*-Abschluß von JC_0. Wäre der Durchschnitt der betrachteten Mengen leer, so würde mit Hilfe von Lemma 4a) folgen, daß kein Punkt gleichzeitig zum w^*-Abschluß von C_0 und zum Inneren des w^*-Abschlusses jeder der Mengen C_p $(p \in Q \setminus P_4)$ gehört. Also ist Lemma 5 bewiesen ∎

Bemerkung: Als Schlußfolgerung aus Lemma 5 erhält man, daß

$$\{x \in E^{**}: \|x\| \leqq 1, x \in K^{++}\}$$

der w^*-Abschluß von $J(\{x \in E: \|x\| \leqq 1, x \in K\})$ ist. Lemma 5 in [1] beinhaltet dieselbe Aussage unter zusätzlichen Voraussetzungen.

Beweis von Theorem 1: Sei $f_1, \ldots, f_m$ eine Basis von L, so daß $f_{n+1}, \ldots, f_m$ eine Basis von $JE \cap L$ ist, und sei $\theta > 0$. Seien ferner $Q \subset P_1$, $R \subset P_2$ und $\delta > 0$ so definiert, daß die Behauptungen von Lemma 1 gelten. Aus Lemma 5 folgt die Existenz einer Folge (g_j) mit $(g_j) \models (Q \cup R)(\delta)$, so daß außerdem noch $\|g_j - f\| \leqq \delta$ für $n < j \leqq m$ erfüllt ist. Schließlich sei $T_1\colon E \to E/M_+$ die kanonische Quotientenabbildung und $T_2\colon E^{**}/M^+ \to E$ solch eine lineare Abbildung, daß T_1T_2 die kanonische Isometrie von E^{**}/M^+ auf E/M_+ ist, und sei $T\colon L \to F$ durch $Tf_j = g_j$ und $S\colon L \to E$ durch

$$Sf_j = \begin{cases} J^{-1}g_j + T_2T_1^{**}(f_j - g_j) & \text{für } 1 \leqq j \leqq n \\ J^{-1}f_j & \text{für } n < j \leqq m \end{cases}$$

definiert. Dann gilt die Behauptung 4 von Theorem 1, während die Behauptung 2 aus $JSf - f \in \operatorname{Ker} T_1^{**}$ folgt. Ist c solch eine Konstante, daß $\sum |\lambda_j| \leqq c \|\sum \lambda_j f_j\|$ gilt, so zieht das

$$\begin{aligned} &\|(JS - T)(\textstyle\sum \lambda_j f_j)\| \\ &\leqq c \|\textstyle\sum \lambda_j f_j\| \left(\|T_2\| \sum\limits_{1}^{n} \|T_1^{**}(f_j - Tf_j)\| + \sum\limits_{n+1}^{m} \delta \right) \end{aligned}$$

nach sich. Aus Lemma 1/(2) folgt $\|T_1^{**}(f - Tf)\| \leqq \theta \|f\|$. Man kann δ und $\theta < \varepsilon/2$ so klein wählen, daß $\|JS - T\| < \varepsilon/2$ ist, denn c und $\|T_2\|$ hängen nicht von δ und θ ab. Die Behauptungen 1 und 3 folgen dann aus Lemma 1/(1) und (3) ∎

Beweis von Theorem 2: Sei $f_1, \ldots, f_m$ eine Basis aus Atomen für L, wobei $f_{n+1}, \ldots, f_m$ bereits zu F gehören. Außerdem seien $e_1, \ldots, e_r$ so gewählt, daß sie zusammen mit $f_{n+1}, \ldots, f_m$ eine Basis aus Atomen für $L \cap F$ bilden. Es kann dabei zusätzlich erreicht werden, daß jedes Element e_s eine Darstellung $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{sj} f_j$ mit $\lambda_{sj} \in \{0, 1\}$ besitzt. Laut Lemma 1 existiert ein $\theta > 0$ und eine endliche Menge $Q \subset P_1$, so daß $(f_j) \models Q$ gilt, und daß aus $(g_j) \models Q(\theta)$, $Tf_j = g_j$ und aus $f \in L$, $x \in M$ folgt

$$(1 - \varepsilon)\|f\| \leqq \|Tf\| \leqq (1 + \varepsilon)\|f\|, \quad |(f - Tf)(x)| \leqq \varepsilon \|f\| \|x\|.$$

Entsprechend Lemma 3 seien $R \subset P$ und $\delta \in (0, 1)$ bestimmt. R' sei aus R durch Hinzunahme der Formeln

$$\begin{array}{ll} (\|g_j - f_j\| \leqq 0) & (n < j \leqq m) \\ (\|\sum \lambda_{sj} g_j - e_s\| \leqq 0) & (1 \leqq s \leqq r) \\ (g_j \in Z') & (1 \leqq j \leqq m) \end{array}$$

erhalten. Aus Lemma 5 folgt die Existenz einer Folge h_j mit $(h_j) \models R'(\delta)$. Zur Definition von $g_j = JSf_j$ werden drei Fälle unterschieden.

1. *Fall:* Es sei $n < j \leqq m$. Wir setzen

$$g_j = \Bigl(h_j - \delta^{1/2} \sum_{k \neq j} h_k\Bigr)^+ \wedge f_j.$$

2. *Fall:* Es existiert ein s mit $f_j \leqq e_s$, d. h. es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl s, so daß in der Darstellung $\sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_{sl} f_l$ gilt $\lambda_{sj} = 1$. Wir setzen

$$g_j = \Bigl(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\Bigr)^+ \wedge e_s.$$

3. *Fall:* Es sei $f_j \wedge (\sum e_s) = 0$ und $j \leqq n$. Wir setzen

$$g_j = \Big(h_j - \delta^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_k\Big)^+ .$$

Aus der Definition der Elemente g_j folgt Behauptung 4. Da Lemma 3/(4) nach der sich dort anschließenden Bemerkung erfüllt ist, folgen die Behauptungen 1 und 2 aus Lemma 1 und 3. Ist $c \in (0, 1)$ und sind $d, e \in G^*$ beliebige positive Elemente, so gilt

$$0 \leqq (d - ce)^+ \wedge (e - c^{-1}d)^+ \leqq c^{-1}\big((d - ce)^+ \wedge (ce - d)^+\big) = 0 .$$

Daraus folgt $g_j \wedge g_k = 0$, falls $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq m$ und $j \neq k$ gilt. Dies gilt aber auch wenn $n < j < k \leqq m$ ist, denn in diesem Fall ist $0 \leqq g_j \wedge g_k \leqq f_j \wedge f_k = 0$. Es folgt die Behauptung 3. Für $n < j \leqq m$ folgt weiter

$$0 \leqq f_j - g_j \leqq f_j - (h_j \wedge f_j) + \delta^{1/2} \sum h_k = (f_j - h_j)^+ + \delta^{1/2} \sum h_k ,$$

$$\|f_j - JSf_j\| \leqq \delta + \delta^{1/2} \sum \|h_k\| \leqq \delta + \delta^{1/2} \sum (\|f_k\| + \delta) .$$

Es ist möglich, δ von Anfang an so klein zu wählen, daß aus diesen Ungleichungen für jedes Element f aus der linearen Hülle von $f_{n+1}, \ldots, f_m$ folgt $\|JSf - f\| \leqq \varepsilon \|f\|$. Hat E ordnungsstetige Norm, so würde aus $0 \leqq f_j \leqq e_s$ bereits $f_j \in JE$ folgen. Also fällt $F \cap L$ mit der linearen Hülle der Elemente $f_{n+1}, \ldots, f_m$ zusammen. Damit ist auch Behauptung 5 bewiesen ∎

7. Eigenschaften von Ultraprodukten

Beim Beweis von Lemma 5 wurde wesentlich verwendet, daß $(f_1, \ldots, f_m)$ zum w*-Abschluß von C_p gehörte. Dies folgte daraus, daß JK w*-dicht in K^{++} ist und aus einer analogen Aussage für Einheitskugeln. Um die Theoreme 3 und 4 zu beweisen, benötigen wir entsprechende Resultate für Ultraprodukte. Diese werden in den nächsten beiden Lemmas bereitgestellt.

Lemma 6: *Sei $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis eines endlichdimensionalen Unterraumes $M \subset (E_i)_U$ und seien $x_{si} \in E_i$ so gewählt, daß $(x_{si})_U = x_s$ ist. Dann gilt für die durch $T_i x_s = x_{si}$ definierten linearen Operatoren T_i von M auf die lineare Hülle von $\{x_{si} : s \in \{1, \ldots, r\}\} \subset E_i$:*

1. $(T_i x)_U = x$.
2. *Für fast alle i ist T_i invertierbar.*
3. $\lim_U \|T_i\| = \lim_U \|T_i^{-1}\| = 1$.

Beweis: Nach Definition von T_i gilt Behauptung 1 für die Basiselemente von M und folglich auch für beliebiges $x \in M$. Angenommen, eine der Behauptungen 2 oder 3 sei nicht erfüllt. Dann existieren $\varepsilon \in (0, 1)$ und Elemente $z_i \in M$, so daß für fast alle $i \in I$ entweder $\|T_i z_i\| < (1 - \varepsilon) \|z_i\|$ oder $\|T_i z_i\| > (1 + \varepsilon) \|z_i\|$ gilt. Im ersten Fall nehmen wir noch $\|z_i\| = 1$ und im zweiten Fall $\|T_i z_i\| = 1$ an. Verwendet man die Basisdarstellungen $z_i = \sum \lambda_{si} x_s$, so bilden die λ_{si}, als Koordinaten einer beschränkten Familie in einem endlichdimensionalen Banachraum, ebenfalls beschränkte Familien. Aus

$$(T_i z_i)_U = \sum \Big(\lim_U \lambda_{si}\Big) (x_{si})_U = \lim_U z_i$$

folgt im Widerspruch zu den gemachten Annahmen $\lim_U \|z_i\| = \lim_U \|T_i z_i\| = 1$. Damit ist das Lemma bewiesen ∎

In den folgenden beiden Lemmas, sowie im Beweis der Theoreme 3 und 4 werden die dazu eingeführten Bezeichnungen $G = (E_i)_U$, $Z = J(K_i^+)_U$ usw. verwendet.

Lemma 7: *Seien eine natürliche Zahl m, ein $p \in P$ und eine Folge $(f_j)_{j=1}^m$ so vorgegeben, daß $(f_j) \models \{p\}$ ist. Sei ferner*

$$C_i = \{(g_1, \ldots, g_m) \in (E_i^*)^m : (g_j) \models \{p(0, i)\}\}.$$

Dann gehört $(f_1, \ldots, f_m)$ zum w-Abschluß von $J(C_i)_U$ in $(G^*)^m$.*

Beweis: Für einen vorerst beliebig gewählten endlichdimensionalen Unterraum $M \subset (E_i)_U$ seien T_i die in Lemma 6 definierten Operatoren. Für fast alle i werden auf $T_i(M)$ durch

$$h_{ji}(x) = f_j(T_i^{-1}x)$$

lineare Funktionale h_{ji} definiert. Bestimmt man $g_j = (g_{ji})_U$ so, daß $g_{ji}|_{T_i(M)} = h_{ji}$ ist, so ist eine ε-Umgebung von $(g_1, \ldots, g_m)$ in einer beliebig vorgegebenen w*-Umgebung von $(f_1, \ldots, f_m)$ enthalten, wenn nur M und $\varepsilon > 0$ geeignet gewählt wurden. Deshalb reicht es aus, für $\theta > 0$ und für fast alle i gleichmäßig normbeschränkte Fortsetzungen g_{ji} von h_{ji} so zu finden, daß

$$d((g_{1i}, \ldots, g_{mi}), C_i) \leqq \theta \tag{6}$$

gilt.

1. *Fall:* Es sei $p = (|\sum g_j(x_j) - b| \leqq c)$. In diesem Fall wird M so gewählt, daß $x_j \in M$ ist. Sind g_{ji} Hahn-Banach-Fortsetzungen von h_{ji}, so folgt für fast alle i:

$$c \geqq |\sum f_j(x_j) - b| = |\sum g_{ji}(T_i x_j) - b| = |\sum g_j(x_j) - b|,$$

$$c \geqq \lim_U |g_{ji}(x_{ji}) - b|, \quad \text{wenn } (x_{ji})_u = x_j \text{ ist}$$

(vgl. die Definition von $p(\varepsilon, i)$). Da wenigstens eins der Elemente x_j von Null verschieden ist, gilt (6) für fast alle i.

2. *Fall:* Es sei $p = (d(\sum a_j g_j + f, Z') \leqq c)$.

1. *Schritt:* Für fast alle i und für beliebiges $\delta > 0$ haben die Mengen

$$D_i = K_i^+ + \{g \in E_i^* : \|g\| \leqq c + \delta\}$$

und

$$H_i = \{g \in E_i^* : g(T_i x) = \sum a_j f_j(x) + f_i(T_i x), \quad \|g\| \leqq \|\sum a_j f_j + f\| + 1\}$$

nichtleeren Durchschnitt (wobei $(f_i)_U = f$ gilt, vgl. die Definition von $p(\varepsilon, i)$). Angenommen dies sei falsch. Dann können diese Mengen durch eine w*-abgeschlossene Hyperebene getrennt werden, d. h. für fast alle i existieren Elemente $y_i \in E_i$ mit $\|y_i\| = 1$, so daß gilt:

$$\sup \{\operatorname{Re} g(y_i) : g \in D_i\} < \inf \{\operatorname{Re} g(y_i) : g \in H_i\},$$

$$y_i \in -K_{i+}^+ = -\bar{K}_i, \sup \{\operatorname{Re} g(y_i) : g \in D_i\} = c + \delta.$$

Also kann man auch $z_i \in -K_i$ mit $\|z_i\| = 1$ so wählen, daß

$$\inf \{\operatorname{Re} g(z_i) : g \in H_i\} > c + \delta$$

gilt. Sei T_i' eine Fortsetzung von T_i auf die lineare Hülle von M und $(z_i)_U = z$ mit $(T_i'z)_U = z$ (Lemma 6), und sei g_i eine Hahn-Banach-Fortsetzung von

$$T_i'(\mathrm{lin}\,(M \cup \{z\}) \in x \to \sum a_j f_j(T_i'^{-1}x) + f_i(x).$$

Dann folgt im Widerspruch zur Voraussetzung für fast alle i

$$g_i \in H_i,\ (g_i)_U\,(z) = \sum a_j f_j(z) + f(z) \geqq c + \delta,$$
$$d(\sum a_j f_j + f, Z') \geqq c + \delta.$$

2. *Schritt:* Wir wählen ein festes k, so daß $a_k \neq 0$ ist. Nach dem Resultat des 1. Schrittes ist es möglich, Funktionale $g_i \in E_i^*$ so festzulegen, daß für fast alle i gilt $g_i \in D_i \cap H_i$. Falls $j \neq k$ ist, so bestimmen wir g_{ji} als Hahn-Banach-Fortsetzung von h_{ji}. Danach setzen wir $g_{ki} = a_k^{-1}\left(g_i - f_i - \sum_{j \neq k} g_{ji}\right)$. Dann folgt $d(\sum a_j g_{ji} + f_i, K_i^+) \leqq c + \delta$ für fast alle i. Für genügend kleines δ folgt daraus (6).

3. *Fall:* Es sei $p = (g_j \in Z')$.
Die Behauptung folgt aus dem zweiten Fall für die Formel

$$d(g_j, Z') \leqq 0.$$

4. *Fall:* Es sei $p = (\|\sum a_j g_j + f\| \leqq c)$.

Ersetzt man K_i durch E_i, so erhält man $Z = Z' = \{0\}$ und die Behauptung folgt durch Anwendung des zweiten Falles ∎

Lemma 8: *Seien $\delta > 0$, eine endliche Formelmenge $Q \subset P$ und eine Folge (f_j) so vorgegeben, daß $(f_j) \models Q$ ist. Dann existiert für fast jedes $i \in I$ eine Folge (g_j) mit $(g_j) \models Q(\delta, i)$.*

Beweis: Da in Q nur endlich viele Elemente g_j wirklich auftreten, kann man $m < \infty$ annehmen. Angenommen die Behauptung sei falsch. Dann haben für fast alle i die Mengen

$$C_{pi} = \left\{(g_1, \ldots, g^m) \in (E_i^*)_m : (g_j) \models \{p(\delta, i)\}\right\} \qquad (p \in Q \setminus P_4);$$
$$C_{0i} = \{(g_1, \ldots, g^m) \in (E_i^*)_m : \sum \|g_j\|^2 \leqq \sum \|f_j\|^2 + 1\},$$
$$C_{1i} = \left\{(g_1, \ldots, g^m) \in (E_i^*)_m : (g_j) \models \{p(\delta, i)\} \quad \text{falls } p \in Q \cap P_4 \text{ ist}\right\}$$

leeren Durchschnitt. Nach Lemma 4b) können trennende Elemente $x_{si} \in (E_i)^m$ und Zahlen b_{si} bestimmt werden. Zusätzlich kann man noch voraussetzen, daß $\sum_s (\|x_{si}\| + |b_{si}|) = 1$ ist. Dann werden aber die Mengen $J(C_{pi})_U$, $J(C_{0i})_U$ und $J(C_{1i})_U$ und folglich auch ihre w*-Abschlüsse durch $x_s = (x_{si})_U$ und $b_s = \lim_U b_{si}$ getrennt. Im Widerspruch dazu folgt aber aus Lemma 7, daß $(f_1, \ldots, f_m)$ innerer Punkt der w*-Abschlüsse von $(C_{pi}')_U$ $(p \in Q \setminus P_4)$ und von $(C_{0i}')_U$ ist und auch im w*-Abschluß von $(C_{1i})_U$ liegt ∎

8. Beweis der Theoreme 3 und 4

Beweis von Theorem 3: Sei $(f_j)_{j=1}^m$ eine linear unabhängige Folge in L, deren lineare Hülle eine in $L \cap F$ dichte Teilmenge von $L \cap F$ enthält und selbst in L dicht liegt. Außerdem sei M_n eine aufsteigende Folge endlichdimensionaler Teilräume von M, deren Vereinigung dicht in M ist. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 1 wird eine aufsteigende Folge endlicher Formelmengen $Q_n \subset P$ und eine monoton fallende Nullfolge (δ_n) so bestimmt, daß $(f_j) \models Q_n$ ist und daß für den auf der linearen Hülle L_n von $\{f_1, \ldots, f_n\}$ durch $T_n f_j = g_j$ definierten linearen Operator folgendes gilt: Aus $(g_j) \models Q_n(\delta_n)$ und aus $f \in L_n$, $x \in M_n$ folgen (1), (2) und (3), wobei $\theta = 1/n$ ist. Zusätzlich kann noch erreicht werden, daß für eine abzählbare in $L \cap F$ dichte Teilmenge von Elementen der Form

$$f = \sum_{\text{endl.}} \lambda_j f_j,$$

die selbst in F liegen, jeweils die Formel

$$(\|\sum \lambda_j g_j - f\| \leqq 0)$$

zu $\cup Q_n$ gehört. Für jedes i sei

$$n(i) = \sup \{n + 1 : \exists\, (g_j) \quad \text{mit} \quad (g_j) \models Q_n(1/n, i)\}.$$

Weiterhin sei für $n < n(i)$ eine Folge $(g_{ji}^n)_{j=1}^m$ mit

$$(g_{ji}^n) \models Q_n(1/n, i)$$

festgelegt. Definiert man mit Hilfe eines freien Ultrafilters V auf der Menge der natürlichen Zahlen

$$g_{ji} = \begin{cases} g_{ji}^{n(i)-1}, & \text{wenn } n(i) < \infty \text{ ist} \\ \text{w*-}\lim\limits_{n,V} g_{ji}^n, & \text{wenn } n(i) = \infty \text{ ist,} \end{cases}$$

so folgt $(g_{ji}) \models D_n(1/n, i)$, wenn nur $n < n(i)$ ist. Da bei beliebigem festem n aus Lemma 8 für fast alle i folgt $n(i) > n$, erhält man für $(g_j) = (g_{ji})_U$ und für beliebiges n

$$(g_j) \models Q_n(1/n).$$

Wird nun T auf der linearen Hülle von $\{f_j\}_{j=1}^m$ durch $Tf_j = J^{-1}g_j$ definiert, so ist T isometrisch. Sei S der Abschluß von T. Dann sind die Behauptungen 1, 2 und 3 des Theorems erfüllt. Behauptung 4 ist auch erfüllt, da $JSf = f$ für eine dichte Teilmenge von $L \cap J(E_i^*)_U$ aus $(g_j) \models \cup Q_n(0)$ folgt. Es muß nur noch $J(K_i^+)_U = (K_i)_U^+ \cap F$ gezeigt werden. Sei $f = (f_i)_U \in (K_i)_U^+$ und sei Q die Menge der beiden Formeln $(\|g_1 - f\| \leqq 0)$, $(g_1 \in Z')$, wobei $m = 1$ ist. Da f diese Formeln erfüllt, gehört nach Lemma 8 für jedes feste n die Menge der i, für die ein h_i^n mit $(h_i^n) \models Q(1/n, i)$ existiert, zum Ultrafilter. Wie oben findet man ein h mit $(h) \models Q(0)$. Das bedeutet aber $h = f$ und $h \in Z = J(K_i^+)_U$ ∎

Beweis von Theorem 4: Wir wählen $f_1, \ldots, f_m$ und $e_1, \ldots, e_r$ wie im Beweis von Theorem 2, d. h. die f_j bilden eine Basis von L aus Atomen, $e_1, \ldots, e_r, f_{n+1}, \ldots, f_m$ bilden eine Basis aus Atomen für $L \cap F$ und es gibt Zahlen $\lambda_{sj} \in \{0, 1\}$, so daß $e_s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{sj} f_j$ gilt. Sei (M_l) eine aufsteigende Folge endlichdimensionaler Unterräume von M, deren Vereinigung dicht in M ist. Mit Hilfe von Lemma 1 läßt sich eine Folge endlicher Teilmengen $Q_l \subset P_1$ und eine monotone Nullfolge positiver Zahlen θ_l so bestimmen, daß $(f_j) \models Q_l$ und $Q_l \subset Q_{l+1}$ ist, und daß aus $(g_j) \models Q_l(\theta_l)$ für den auf L durch $Tf_j = g_j$ definierten linearen Operator folgt

$$(1 - 1/l)\, \|f\| \leqq \|Tf\| \leqq (1 + 1/l)\, \|f\| \qquad (f \in L),$$

$$|(Tf - f)(x)| \leqq 1/l\, \|f\|\, \|x\| \qquad (f \in L, x \in M_l).$$

Auf Grund von Lemma 3 lassen sich nun endliche Teilmengen $R_l \subset P$ und eine monotone Nullfolge positiver Zahlen δ_l so finden, daß $Q_l \subset R_l \subset R_{l+1}$ und $(f_j) \models R_l$

ist, und daß aus $(h_j) \models R_l'(\delta_l)$ und aus (4) mit $\delta = \delta_l$ folgt $(g_j) \models Q_l(\theta_l)$. Außerdem kann noch erreicht werden, daß $P_4 \subset R_1$ gilt und daß auch folgende Formeln zu R_1 gehören:

$$\|g_j\| \leqq \|f_j\| \qquad (1 \leqq j \leqq m),$$

$$\|g_j - f_j\| \leqq 0 \qquad (n < j \leqq m),$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_{sj} g_j - e_s \right\| \leqq 0 \qquad (1 \leqq s \leqq r).$$

Für $i \in I$ sei

$$l(i) = \sup \{l + 1 : \exists\, (h_j) \text{ mit } (h_j) \models R_l(\delta_l, i)\}.$$

Für $l < l(i)$ sei $(h_{ji}^l)_{j=1}^m$ so gewählt, daß $(h_{ji}^l) \models R_l(\delta_l, i)$ ist. Weiterhin sei

$$h_{ji} = \begin{cases} h_{ji}^{l(i)-1}, & \text{wenn } l(i) < \infty \text{ ist} \\ \mathrm{w}^* - \lim\limits_{l,V} h_{ji}^l, & \text{wenn } l(i) = \infty \text{ ist.} \end{cases}$$

Ist $l < l(i)$, so gilt $(h_{ji}) \models R_l(\delta_l, i)$. Aus Lemma 8 folgt bei festem l, daß für fast alle i gilt $l(i) > l$. Deshalb existiert $h_j = (h_{ji})_U$ und es gilt $(h_j) \models \bigcup\limits_l R_l(\delta_l)$ und folglich auch $(h_j) \models \cup R_l(0)$. Für $l < l(i)$ werden Elemente $g_{ji}^l \in E_i^*$ definiert. Dabei werden in Abhängigkeit von j drei Fälle unterschieden.

1. *Fall:* Es sei $n < j \leqq m$. Wir setzen

$$g_{ji}^l = \Big(h_{ji} - \delta_l^{1/2} \sum_{k \neq j} h_{ki}\Big)^+.$$

2. *Fall:* Es existiert ein s mit $f_j \leqq e_s$ (d. h. $\lambda_{sj} = 1$). Wir setzen

$$g_{ji}^l = \sup_{q \in \mathrm{N}} \Big(q \Big(h_{ji} - \delta_l^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_{ki}\Big)^+\Big) \wedge \sum_{k=1}^{n} \lambda_{sk} h_{ki}.$$

3. *Fall:* Es sei $1 \leqq j \leqq n$ und $f_j \wedge \sum e_s = 0$. Wir setzen

$$g_{ji}^l = \Big(h_{ji} - \delta_l^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_{ki})\Big)^+.$$

Berücksichtigt man, daß Disjunktheit bei monotonen Grenzwerten erhalten bleibt, so kann man wie beim Beweis von Theorem 2 zeigen, daß $g_{ji}^l \wedge g_{ki}^l = 0$ ist falls $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq m$, $j \neq k$ gilt. Definiert man $(g_{ji}^l)_U = g_j^l$, so folgt auf Grund der Bemerkung nach Lemma 3, daß die Elemente $(g_j^l)_{j=1}^m$ die Ungleichungen (4) mit $\delta = \delta_l$ erfüllen. Es folgt also $(g_j^l) \models Q_l(\theta_l)$. Da jede Formel $p \in Q_l$ die Gestalt $\|\sum a_j g_j\| \leqq c$ bzw. $|\sum g_j((x_{ji})_U) - b| \leqq c$ hat, folgt $(g_{ji}^l) \models Q_l(2\theta_l, i)$ für fast alle i, denn es gilt

$$\sum g_j^l((x_{ji})_U) = \lim_U \sum g_{ji}^l(x_{ji}) \quad \text{und} \quad \|\sum a_j g_j^l\| = \lim_U \|\sum a_j g_{ji}^l\|.$$

Für jedes feste i sei V_i ein (möglicherweise auch trivialer) Ultrafilter auf der Menge

$$\{q \in \mathrm{N} : (g_{ji}^q) \models Q(2\theta_q, i)\},$$

der gegen das Supremum $q(i)$ dieser Menge strebt. Es sei gleich bemerkt, daß bei festem q für fast alle i gilt $q(i) > q$. Insbesondere ist die Definition von V_i für fast alle i möglich. Sei

$$g_{ji} = \underset{q,V_i}{\text{w*-lim}}\, g^q_{ji}, \quad g_j = (g_{ji})_U.$$

Es gilt dann $(g_j) \models \bigcup_q Q_q(2\theta_q)$ und folglich auch $(g_j) \models \cup Q_q(0)$. Der Operator S sei durch die Formeln $Sf_j = J^{-1}g_j$ definiert. Es folgen dann sofort die Behauptungen 1 und 2 des Theorems.

Für $n < j \leqq m$ folgt aus $(h_{ji}) \models R_l(\delta_l, i)$

$$\|h_{ji} - f_{ji}\| \leqq \delta_l, \quad \|g^l_{ji} - h_{ji}\| \leqq \delta_l^{1/2} \sum \|h_{ji}\|.$$

Deshalb gilt für diese j auch $g_j = f_j$. Ist $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq m$ und $j \neq k$, so gilt $g^l_{ji} \wedge g^l_{ki} = 0$. Es folgt, daß die Elemente g_j positiv und paarweise disjunkt sind und daß also Behauptung 3 gilt.

Da für $f_j \leqq e_s$ und für $l < l(i)$ nach Definition g^l_{ji} die Projektion von $\sum_{k=1}^n \lambda_{sk}h_{ki}$ auf das von $(h_{ji} - \delta_l^{-1/2} \sum_{k \neq j} h_{ki})^+$ erzeugte Band und $\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_{sk}h_{ki} - e_{si} \right\| \leqq \delta_l$ ist, so folgt:

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_{sk} g^l_{ji}\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{sk}(h_{ji} - g^l_{ji})\right) = 0,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_{sk} g_{ji}\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{sk}(h_{ji} - g_{ji})\right) = 0,$$

$$(Se_s) \wedge (e_s - Se_s) = 0.$$

Daraus folgt Behauptung 4 des Theorems ∎

9. Beispiele

In [1] sind drei Beispiele angegeben, die zeigen, daß in den Behauptungen 2 und 5 von Theorem 2 die positive Zahl ε nicht durch Null ersetzt werden kann und daß in allgemeinen Banachverbänden Behauptung 5 nicht erfüllbar ist. Wir werden jetzt einige weitere abgrenzende Beispiele bringen.

Beispiel 1: Für die endliche Darstellbarkeit eines Dualraumes E^* in seinem Unterraum F ist die w*-Dichtheit der Einheitskugel von F in der Einheitskugel von E^* nicht hinreichend. Bezeichnet man mit $y_l = (y_{ln})_{n=1}^\infty$ die Folge der Rademacherfolgen, d. h. setzt man $y_{ln} = \text{sign} \sin\left(2^{-l}\pi(2n+1)\right)$, so kann man Elemente z_l von l_∞ so finden, daß sich die Folgen z_l und y_l jeweils nur in endlich vielen Gliedern unterscheiden und daß $\{z_l\}$ eine w*-dichte Teilmenge der Einheitskugel von $l_\infty = l_1{}^*$ ist. Auf Grund der Eigenschaften der Rademacherfolgen gilt für reelle Zahlen λ_l

$$\|\sum \lambda_l z_l\| \geqq \|\sum \lambda_l y_l\| = \sum |\lambda_l|.$$

Deshalb ist die abgeschlossene lineare Hülle F von $\{z_l\}$ (auch im Falle komplexer Banachräume) isomorph zu l_1. Ist nun ein Unterraum H von F c-isomorph zu l^n_∞ (d. h. existiert ein Operator $T: l^n_\infty \to H$ mit $\|T\| \|T^{-1}\| \leqq c$), so ist die identische Abbildung von l^n_∞ in folgender Weise faktorisierbar:

$$l^n_\infty \xrightarrow{T} H \hookrightarrow F \xrightarrow{S} l^n_\infty, \qquad \|T\| \|S\| \leqq c.$$

Dann ist aber S^*T^* eine Faktorisierung der identischen Abbildung von $l_1{}^n$ durch den P_λ-Raum F^*. Daraus, daß die Projektionskonstanten von $l_1{}^n$ gegen unendlich streben (vgl. [5]), folgt, daß l_∞ nicht in F endlich darstellbar ist.

Beispiel 2: Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 kann selbst bei abgeschlossenem K nicht erreicht werden, daß $S(L \cap K^{++}) \subset K$ gilt, wenn außerdem $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ verlangt wird. Sei

$$x_{ln} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } l \leqq n \leqq l+1 \text{ ist} \\ 0, & \text{wenn } n < l \text{ oder } n > l+1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Es werden die Elemente $x_l = (x_{ln})_{n=1}^{\infty}$ in $l_1 = (c_0)^*$ betrachtet. Sei $K = (\{x_l\}_{l=1}^{\infty})_+$. K enthält keine Gerade, weil die w*-abgeschlossene lineare Hülle von $\{x_l\}$ mit l_1 zusammenfällt. Andererseits liegt die lineare Hülle L von $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ in K^{++}, denn die Folgen $(f_{ln})_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_{ln} \begin{cases} = (-1)^{l-n}, & \text{wenn } n \leqq l \text{ ist}, \\ = 0, & \text{wenn } n > l \text{ ist} \end{cases}$$

liegen in K. Aus $SL \subset K$ würde nun folgen $S(L) = \{0\}$.

Beispiel 3: Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 kann nicht erreicht werden, daß $\|Sf\| = \|f\|$ gilt. Der reelle Raum $c_0^{**}(= l_\infty)$ enthält einen zweidimensionalen Euklidischen Raum, z. B. die lineare Hülle von $(\cos t_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(\sin t_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei (t_n) eine in $[0, 2\pi]$ dichte Folge reeller Zahlen ist. Der Raum c_0 selbst enthält jedoch als polyedrischer Raum (vgl. [8]) keinen zweidimensionalen Euklidischen Unterraum.

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen von Theorem 2 kann auch nicht $\|Sf\| = \|f\|$ erreicht werden, weil es polyedrische Banachverbände gibt, so daß der zweidimensionale Euklidische Raum Unterverband des Bidualen ist.

Beispiel 4: Unter den Voraussetzungen von Theorem 4 ist $J(E_i^*)_U$ im allgemeinen nicht σ-ordnungsvollständig und es ist möglich, daß die Summe zweier positiver disjunkter Elemente von $(E_i)_U^*$ zu $J(E_i^*)_U$ gehört, während jedes Einzelne dieser Elemente nicht in $J(E_i^*)_U$ liegt. Als Indexmenge I sei die Menge der natürlichen Zahlen mit einem freien Ultrafilter U gewählt. Sei $E_i = l_1$ und seien e_n die kanonischen Bilder der üblichen Koordinatenbasis von c_0 in $l_1^* = c_0^{**}$. Es werden folgende Elemente betrachtet:

$$f_{ki} = \sum_{n=1}^{k} e_n \in E_i^*, \quad g_i = \sum_{n=1}^{i} e_n \in E_i, \quad e = \text{w*-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} e_n,$$

$$f_k = (f_{ki})_U \in (E_i)_U^*, \quad g = (g_i)_U \in (E_i)_U^*, \quad h = \sup_k f_k \in (E_i)_U^*.$$

Bei festem k gilt $f_{ki} \wedge (g_i - f_{ki}) = 0$ für fast alle i. Es folgt

$$f_k \wedge (g - f_k) = 0, \qquad h \wedge (g - h) = 0.$$

Deshalb reicht es zu beweisen, daß $h \notin J(E_i^*)_U$ ist. Angenommen, es ist $h = (h_i)_U$. Dann gilt $(h_i \wedge f_{ki})_U = h \wedge f_k = f_k$. Bei festem k folgt $h_i \geqq f_{ki} - k^{-1}e$ für fast alle i. Deshalb kann man eine Folge (I_k) von Elementen des Ultrafilters so finden, daß für $i \in I_k$ gilt $h_i \geqq f_{ki} - k^{-1}e$. Zusätzlich kann $I_{k+1} \subset I_k$ und $k \notin I_k$ erreicht werden. Setzt man $d_i = (1 - k^{-1})\, e_k \in E_i^*$ für $i \in I_k \setminus I_{k+1}$, so folgt

$$f_k \wedge (d_i)_U = 0, \qquad (d_i)_U \leqq h, \qquad \|(d_i)_U\| = 1$$

im Widerspruch zur Beweisannahme.

Bemerkung: Es ist unbekannt, ob in Theorem 4 zusätzlich erreicht werden kann, daß für $f \in JF \cap L$ gilt $JSf = f$.

LITERATUR

[1] BERNAU, S. J.: A unified approach to the principle of local reflexivity. In: Notes in Banach spaces. Univ. of Texas: Austin 1981.
[2] CONROY, J. L., and L. C. MOORE Jr.: Local reflexivity in Banach lattices. Preprint. Duke University: Durham.
[3] DEAN, D. W.: The equation $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ and the principle of local reflexivity. Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 146–148.
[4] ГЕЙЛЕР, В. А., и И. И. ЧУЧАЕВ: Общий принцип локальной рефлексивности и его применения в теории двойственности конусов. Сиб. мат. журнал **23**, 1 (1982), 32–43.
[5] GRÜNBAUM, B.: Projection constants. Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 451–465.
[6] HEINRICH, S.: Ultraproducts in Banach space theory. J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 72–104.
[7] JOHNSON, W. B., ROSENTHAL, H. P., and M. ZIPPIN: On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. Israel J. Math. **9** (1971), 488–506.
[8] KLEE, V.: Polyhedral sections of convex bodies. Acta Math. **103** (1960), 243–267.
[9] KÜRSTEN, K.-D.: Local Duality of Ultraproducts of Banach Lattices. In: Banach Space Theory and its Applications. Proceedings, Bucharest 1981, 137–142, Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1983.
[10] КЮРСТЕН, К.-Д.: О некоторых вопросах А. Пича II. Теория функций, функц. анализ и их прил. **29** (1978), 61–73.
[11] LINDENSTRAUSS, J., and H. P. ROSENTHAL: The $\mathfrak{L}_p$ spaces. Israel J. Math. **7** (1969), 325–349.
[12] SCHAEFER, H. H.: Topological vector spaces. Macmillan: New York 1966.
[13] SCHAEFER, H. H.: Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg–New York 1974.
[14] STERN, J.: Ultraproducts and local properties of Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **240** (1978), 231–252.
[15] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis III — Variationsmethoden und Optimierung —. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1977.

Manuskripteingang: 10. 12. 1982

VERFASSER:

Dr. KLAUS-DETLEF KÜRSTEN
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz