

## Abschätzungen für das Spektrum von $\Delta_p$ auf Räumen konstanter Krümmung

J. EICHORN

In der vorliegenden Arbeit werden Abschätzungen für den ersten Eigenwert von  $\Delta_p$  auf Räumen  $M$  konstanter Krümmung in Abhängigkeit vom Volumen, Durchmesser und vom Radius der größten in  $M$  enthaltenen geodätischen Vollkugel angegeben. Das angewandte Verfahren benutzt wesentlich Abschätzungen für die Nullstellen sphärischer Funktionen.

В данной работе оценивается первое собственное значение оператора  $\Delta_p$  на пространствах  $M$  постоянной кривизны в терминах объема, диаметра и радиуса наибольшего геодезического диска внутри  $M$ . При этом существенно используются оценки нулей сферических функций.

We present estimations for the first eigenvalue of  $\Delta_p$  on spaces  $M$  of constant curvature in terms of  $\text{vol}(M)$ ,  $d_M$  and the radius of the greatest geodesic ball contained in  $M$ . The applied method in an essential way uses the zeros of spherical functions.

### 1. Einleitung

Vergleicht man die Geometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten über das Spektrum der Laplaceoperatoren, so ergibt sich in natürlicher Weise die Frage nach gewissen Standardgeometrien, mit denen man vergleicht. Deren Wahl wird von dem Gesichtspunkt abhängen, mit dem man an die Untersuchungen herangeht. Für kompakte Mannigfaltigkeiten kann die spektrale Information z. B. durch die Gleichheit der Minakshisundaram-Pleijel-Entwicklung (Untersuchungen von PATODI, GILKEY, DONNELLY, SAKAI u. a.) oder aber durch gewisse numerische Ungleichungen für die Eigenwerte gegeben sein (Obata-Theorem). In jedem Falle sind die Räume konstanter Krümmung eine sich anbietende Standardklasse für Vergleichstechniken. Wir geben in dieser Arbeit Abschätzungen für die Eigenwerte im kompakten bzw. für den ersten Spektralwert im offenen Fall an. Für den Laplaceoperator auf den Funktionen gibt es eine Fülle schöner Resultate von BUSER, CHENG, LI, SIMON, YAU u. a. Wir studieren  $\Delta_p$ ,  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Diese Arbeit wurde wesentlich durch die Arbeit [1] von CHENG inspiriert und benutzt eine Reihe von Formeln aus [2], die auch in [3] enthalten sind.

### 2. Reduktion der Problemstellung

Seien  $(M^n, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung  $K = c$ ,  $\Delta = \Delta_p$  die Laplaceoperatoren auf den  $p$ -Formen,  $1 \leq p \leq n - 1$ . Als Definitionsbereich für  $\Delta$  werde in erster Instanz  $C_0^\infty(\Lambda^p(M))$  festgesetzt, und es werde dann die Abschließung  $\bar{\Delta}$  in  $L_2(\Lambda^p(M))$  betrachtet, die gleich der Friedrichsschen Erweiterung ist. Für eine offene Teilmenge  $U$  von  $M$  werde mit  $\Delta_p(U)$  die Friedrichs-

sche Erweiterung  $(\Delta|_{C_0^\infty(A^p(U))}_F)$  bezeichnet. Es gilt dann

$$\Delta_F(U) \subseteq \Delta_F \equiv \Delta_F(M) \quad \text{und} \quad \lambda_1(\Delta_F) \leq \lambda_1(\Delta_F(U)), \quad (2.1)$$

wobei  $\lambda_1$  den jeweiligen kleinsten Spektralwert bezeichne. Dabei ist

$$\lambda_1(\Delta) = \inf_{\omega \in C_0^\infty(A^p)} \frac{\langle \Delta \omega, \omega \rangle}{\langle \omega, \omega \rangle} \quad (2.2)$$

mit  $\langle \omega, \omega' \rangle = \int \omega \wedge * \omega' = \int (\omega, \omega')_x d \text{vol}$ .

In einem lokalen System geodätischer Polarkoordinaten  $(r, u^1, \dots, u^{n-1})$  gilt für die Metrik

$$ds^2 = \begin{cases} dr^2 + (\sin \sqrt{c} r / \sqrt{c})^2 d\sigma^2, & K = c > 0 \\ dr^2 + r^2 d\sigma^2, & K = 0 \\ dr^2 + (\sinh \sqrt{c} r / \sqrt{c})^2 d\sigma^2, & K = -c < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

wobei  $d\sigma^2$  die Standardmetrik auf der  $S^{n-1}(1)$  ist. Die Metrik ist also in einem solchen System von der Gestalt

$$ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\sigma^2, \quad (2.4)$$

also lokal rotationssymmetrisch.

Jede in einem geodätischen Ball definierte  $p$ -Form  $\omega$  läßt sich schreiben als  $\omega = adr + b$ , wobei  $a$  bzw.  $b$  eine  $(p-1)$ -Form bzw.  $p$ -Form auf der  $S^{n-1}$  ist, die von einem Parameter  $r$  abhängt. Für eine glatte  $p$ -Form  $\omega = adr + b$  gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta(adr + b) = & \left\{ f^{-2} \Delta_0 a - (n - 2p + 1) \left( \frac{ff'' - f'^2}{f^2} a + \frac{f'}{f} \frac{\partial a}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + (-1)^p \frac{2f'}{f^3} \delta_0 b \right\} dr \\ & + \left\{ f^{-2} \Delta_0 b - (n - 2p - 1) \frac{f'}{f} \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + (-1)^p \frac{2f'}{f} d_0 a \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichne  $d_0, \delta_0, \Delta_0$  die entsprechenden Operatoren auf der  $S^{n-1}$ . Schreibt man  $\omega = adr + b$  als Spaltenvektor  $\begin{pmatrix} adr \\ b \end{pmatrix}$ , so erhält man

$$\Delta \begin{pmatrix} adr \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} adr \\ b \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - (n - 2p + 1) \left( \frac{ff'' - f'^2}{f^2} + \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial r} \right) + f^{-2} \Delta_0, \\ \Delta_{12} &= (-1)^{-1} dr \wedge (-1)^p \frac{2f'}{f^3} \delta_0, \\ \Delta_{21} &= (-1)^p \frac{2f'}{f} d_0 \circ i \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \Delta_{22} &= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - (n - 2p - 1) \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial r} + f^{-2} \Delta_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\Delta$  ist unitär äquivalent zu  $\Delta' = \begin{pmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{12} \\ \Delta'_{21} & \Delta'_{22} \end{pmatrix}$ , wobei

$$\Delta'_{11}adr = \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} a + \left[ \left( \frac{(n-2p+1)^2}{4} + \frac{n-2p+1}{2} \right) \left( \frac{f'}{f} \right)^2 - \frac{n-2p+1}{2} \frac{f''}{f} \right] a + f^{-2} \Delta_0 a \right\} dr,$$

$$\Delta'_{12}b = (-1)^p \frac{2f'}{f^2} \delta_0 b dr, \tag{2.7}$$

$$\Delta'_{22}b = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} b + \left[ \left( \frac{(n-2p-1)^2}{4} - \frac{n-2p-1}{2} \right) \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{n-2p-1}{2} \frac{f''}{f} \right] b + f^{-2} \Delta_0 b,$$

$$\Delta'_{21}adr = (-1)^p \frac{2f'}{f^2} d_0 a$$

ist.

Wir betrachten nun in einer Raumform für einen offenen geodätischen Ball  $B_a$  vom Radius  $a$  die Friedrichssche Erweiterung  $\Delta_F(B_a)$  und die entsprechende Erweiterung  $\Delta_{F'}$ , die natürlich zu  $\Delta_F(B_a)$  unitär äquivalent und damit isospektral ist. Wir bezeichnen mit  $\sigma_d(\Delta_{0,p})$  bzw.  $\sigma_b(\Delta_{0,p})$  das Spektrum von  $\Delta_0$  auf den geschlossenen bzw. kogeschlossenen  $p$ -Formen der  $S^{n-1}$ . Dann ist  $\sigma(\Delta_F(B_a)) = \sigma(\Delta_{F'})$  ein reines Punktspektrum und

$$\sigma(\Delta_{F'}) = \bigcup_{\nu \in \sigma_d(\Delta_{0,p-1})} \sigma(D_{11,\nu,F}) \cup \bigcup_{\mu \in \sigma_b(\Delta_{0,p})} \sigma(D_{22,\mu,F}) \cup \bigcup_{\mu \in \sigma_b(\Delta_{0,p-1}) \cap \sigma_d(\Delta_{0,p})} \sigma(\Delta'_{2,\mu,F}), \tag{2.8}$$

wobei für  $\alpha, \beta \in C_0^\infty(]0, a[)$

$$D_{11,\nu}\alpha(r) = -\frac{d^2}{dr^2} \alpha + \left[ \left( \frac{(n-2p+1)^2}{4} + \frac{n-2p+1}{2} \right) \left( \frac{f'}{f} \right)^2 - \frac{n-2p+1}{2} \frac{f''}{f} \right] \alpha + f^{-2} \cdot \nu \cdot \alpha, \tag{2.9}$$

$$D_{22,\mu}\beta(r) = -\frac{d^2}{dr^2} \beta + \left[ \left( \frac{(n-2p-1)^2}{4} - \frac{n-2p-1}{2} \right) \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{n-2p-1}{2} \frac{f''}{f} \right] \beta + f^{-2} \mu \beta, \tag{2.10}$$

und

$$\Delta'_{2,\mu} \begin{pmatrix} adr \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta'_{11}adr + (-1)^p \frac{2f'}{f^2} \delta_0 b dr \\ \Delta'_{22}b + (-1)^p \frac{2f'}{f^2} d_0 a \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$\Delta_{0,p-1}a = \nu a, \quad \delta_0 a = 0, \quad \Delta_{0,p}b = \mu b, \quad d_0 b = 0$$

ist. Einen Beweis hierfür findet man in [2]. Wir bezeichnen i. f. die Ausdrücke in eckigen Klammern von  $D_{11}$  bzw.  $D_{22}$  mit  $[ ]_{11}$  bzw.  $[ ]_{22}$ .

Jeder  $\lambda$ -Eigenraum von  $\Delta'_{2,\mu}$  wird von Ausdrücken der Gestalt

$$\alpha(r) a_\mu(u) dr + \beta(r) d_0 a_\mu(u)$$

erzeugt. Wir schreiben eine Eigenform zum Eigenwert  $\lambda$  in der Gestalt

$$(-1)^p \alpha(r) a_\mu(u) dr + \frac{1}{\sqrt{u}} \beta(r) d_0 a_\mu(u).$$

Aus der Eigenwertgleichung,

$$\begin{aligned} \Delta_{11,\mu} (-1)^p \alpha a_\mu dr + (-1)^p \frac{2f'}{f^2} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \beta d_0 a_\mu dr &= \lambda (-1)^p \alpha a_\mu dr \\ \Delta'_{22,\mu} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \beta d_0 a_\mu + (-1)^p \frac{2f'}{f^2} (-1)^p \alpha d_0 a_\mu &= \lambda \frac{1}{\sqrt{\mu}} \beta d_0 a_\mu \end{aligned} \quad (2.12)$$

erhält man unter Benutzung von

$$\begin{aligned} dr \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) &= 1, \quad \langle a_\mu, a_\mu \rangle_0 = 1, \quad \langle \delta_0 d_0 \bar{a}_\mu, a_\mu \rangle_0 = \langle \Delta_0 a_\mu, a_\mu \rangle_0 = \mu, \\ \langle d_0 a_\mu, d_0 a_\mu \rangle_0 &= \mu; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d^2}{dr^2} \alpha + [ ]_{11} \alpha + \mu f^{-2} \alpha + \frac{2f'}{f^2} \sqrt{\mu} \beta &= \lambda \alpha, \\ -\frac{d^2}{dr^2} \beta + [ ]_{22} \beta + \mu f^{-2} \beta + \frac{2f'}{f^2} \sqrt{\mu} \alpha &= \lambda \beta. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Definieren wir  $D_{2,\mu}$  für  $\alpha, \beta \in C_0^\infty(]0, a[)$  durch

$$D_{2,\mu} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dr^2} \alpha + [ ]_{11} \alpha + f^{-2} \mu \alpha + \frac{2f'}{f^2} \sqrt{\mu} \beta \\ -\frac{d^2}{dr^2} \beta + [ ]_{22} \beta + f^{-2} \mu \beta + \frac{2f'}{f^2} \sqrt{\mu} \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

so erhalten wir

$$\sigma(\Delta'_{2,\mu,F}) = \sigma(D_{2,\mu,F}). \quad (2.15)$$

Mit (2.1), (2.8)–(2.10), (2.15) wird die Abschätzung von  $\lambda_1(\Delta_F)$  von oben wesentlich auf die des 1. Spektralwertes der  $D$ -Operatoren reduziert.

### 3. Abschätzung des ersten Spektralwertes

In diesem Abschnitt soll eine effektive Abschätzung des 1. Spektralwertes in Abhängigkeit vom Supremum des Injektivitätsradius von  $(M^n, g)$  vorgenommen werden. Wir suchen zunächst nach Abschätzungen von oben. Seien für einen geodätischen Ball  $B_a$  ( $a$  = Injektivitätsradius an der entsprechenden Stelle)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,11,\nu} &= \min_{\substack{\lambda \in \sigma(D_{11,\nu,F}) \\ \lambda > 0}} \lambda, & \lambda_{1,22,\mu} &= \min_{\substack{\lambda \in \sigma(D_{22,\mu,F}) \\ \lambda > 0}} \lambda, & \lambda_{1,2,\mu} &= \min_{\substack{\lambda \in \sigma(D_{2,\mu,F}) \\ \lambda > 0}} \lambda, \\ \lambda_{1,11} &= \min_{\nu} \lambda_{1,11,\nu}, & \lambda_{1,22} &= \min_{\mu} \lambda_{1,22,\mu}, & \lambda_{1,2} &= \min_{\mu} \lambda_{1,2,\mu}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dann ist

$$\lambda_1(\Delta_F(M)) \leq \lambda_1(\Delta_F(B_a)) = \min\{\lambda_{1,11}; \lambda_{1,22}; \lambda_{1,2}\}. \quad (3.2)$$

Zum Vergleich der  $\lambda_{1,11,\nu}$ ,  $\lambda_{1,22,\mu}$ ,  $\lambda_{1,2,\mu}$  müssen wir das Spektrum der Laplaceoperatoren  $\Delta_{0,p-1}$  bzw.  $\Delta_{0,p}$  auf den  $(p-1)$ - bzw.  $p$ -Formen der  $S^{n-1}$  betrachten. Gemäß [5] ist  $(p-1)(n-p+1)$  bzw.  $(p+1)(n-p-1)$  bzw.  $p(n-p)$  das kleinste in Frage kommende  $\nu$  bzw.  $\mu$  für  $D_{11,\nu}$  bzw.  $D_{22,\mu}$  bzw.  $D_{2,\mu}$ . Für die kleinsten Eigenwerte der  $D$ -Operatoren gilt gemäß dem Courantschen Mini-Max-Prinzip:

$$\lambda_{1,11,\nu} = \inf_{\alpha \in C_0^\infty(]0,a[)} \frac{\int_0^a \{\alpha'^2 + ([ ]_{11} + f^{-2\nu}) \alpha^2\} dr}{\int_0^a \alpha^2 dr}, \quad (3.3)$$

$$\lambda_{1,22,\mu} = \inf_{\beta \in C_0^\infty(]0,a[)} \frac{\int_0^a \{\beta'^2 + ([ ]_{22} + f^{-2\mu}) \beta^2\} dr}{\int_0^a \beta^2 dr}, \quad (3.4)$$

$$\lambda_{1,2,\mu} = \inf_{\alpha, \beta \in C_0^\infty(]0,a[)} \frac{\int_0^a \left\{ \alpha'^2 + ([ ]_{11} + f^{-2\mu}) \alpha^2 + \beta'^2 + ([ ]_{22} + f^{-2\mu}) \beta^2 + \frac{4f'}{f^2} \alpha \beta \sqrt{\mu} \right\} dr}{\int_0^a (\alpha^2 + \beta^2) dr}. \quad (3.5)$$

Für  $\frac{n+1}{2} \leq p$  bzw.  $p \leq \frac{n-1}{2}$  gilt  $p(n-p) \leq (p-1)(n-p+1)$  bzw.

$$p(n-p) \leq (p+1)(n-p-1). \quad (3.6)$$

Wahl von  $\beta = 0$  bzw.  $\alpha = 0$  überführt den zu minimierenden Quotienten von (3.5) in den von (3.3) bzw. (3.4), wenn man ein fixiertes  $\mu$  zugrunde legt. Unter Berücksichtigung von (3.1)–(3.6) erhält man schließlich

$$\lambda_1(\Delta_F(M)) \leq \lambda_1(\Delta_F(B_a)) \leq \begin{cases} \lambda_{1,2} \leq \lambda_{1,11} & \text{für } \frac{n+1}{2} \leq p \\ \lambda_{1,2} \leq \lambda_{1,22} & \text{für } p \leq \frac{n-1}{2} \end{cases}. \quad (3.7)$$

Ferner gilt wegen (3.2) natürlich für alle  $p$ ,  $0 < p < n$ , auch  $\lambda_1(\Delta_F(M)) \leq \lambda_{1,ii}$ . Für  $p = \frac{n}{2}$  gilt  $D_{11} = D_{22}$ ,  $\lambda_{1,11} = \lambda_{1,22}$ .

Wir werden  $\lambda_1(\Delta_F(M))$  für  $K = -c < 0$  und  $p \geq \frac{n}{2}$ , für  $K = c > 0$ ,  $0 < p \leq \frac{n}{2}$  und für  $K = 0$ ,  $0 < p < n$  durch  $\lambda_{1,11}$  abschätzen. Übergang von  $p$  zu  $n-p$  liefert dann Schranken für den gesamten Bereich  $0 < p < n$ . In Satz 3.6 werden wir zeigen, daß für obige Wahl von  $p$  in Abhängigkeit von  $K$  stets  $\lambda_{1,11} \leq \lambda_{1,22}$  gilt und Übergang von  $p$  zu  $n-p$  gerade die im Komplementärbereich aus  $D_{22}$  zu gewinnenden Schranken liefert. Unser Vorgehen ist also in einem gewissen Sinne optimal.

Satz 3.1: Seien  $(M^n, g)$  kompakt und eben und  $a$  der Radius des größten in  $M^n$  enthaltenen geodätischen Balles.  $\Delta = \Delta_F(M)$  bezeichne den Laplaceoperator auf den  $p$ -Formen,  $0 < p < n$ . Dann gilt für den ersten Eigenwert  $\lambda_1(\Delta)$

$$\lambda_1(\Delta) < \frac{(n+2)(n+6)}{2a^2}. \quad (3.8)$$

Beweis: Wir wenden (2.1) auf  $U = B_a$  an,  $\lambda_1(\Delta_F(B_a))$  ist also von oben abzuschätzen. In geodätischen Polarkoordinaten gilt in  $B_a ds^2 = dr^2 + r^2 d\sigma^2$ , d. h., man hat  $f(r) = r$ . Zu bestimmen ist der kleinste Eigenwert  $\lambda$  von

$$D_{11, (p-1)(n-p+1)\alpha} - \lambda\alpha = 0, \quad \alpha(a) = 0, \quad (3.9)$$

d. h.

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dr^2} \alpha + \left[ \frac{n-2p+3}{2} \frac{n-2p+1}{2} \frac{1}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{(p-1)(n-p+1)}{r^2} \right] \alpha - \lambda\alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \alpha - \frac{n^2-1}{4r^2} \alpha + \lambda\alpha = 0. \quad (3.11)$$

(3.11) wird gemäß [6] von  $\alpha = \sqrt{r} J_{n/2}(\sqrt{\lambda}r)$  gelöst. Die Bedingung  $\alpha(a) = 0$  führt auf  $J_{n/2}(\sqrt{\lambda}a) = 0$ . Ist also  $j_{n/2}$  die erste positive Nullstelle von  $J_{n/2}$ , so hat man  $\sqrt{\lambda}a = j_{n/2}$ ,  $\lambda = j_{n/2}^2/a^2$ . Es ist wohlbekannt, daß  $j_{n/2}^2 < 2\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+3\right)$  ist [7], woraus  $\lambda_1 < \frac{(n+2)(n+6)}{2a^2}$  folgt ■

Wir behandeln nun den Fall  $K = -c < 0$ .

Satz 3.2: Seien  $(M^n, g)$  kompakt, von konstanter Schnittkrümmung  $K = -c < 0$  und  $a$  der größte Radius eines geodätischen Balles  $B_a$  in  $M^n$ . Dann gilt für  $\lambda_1(\Delta)$ ,  $\frac{n}{2} \leq p$ :

$$\lambda_1(\Delta) \leq \begin{cases} \left\{ \frac{(2m+1)^2}{4} - p(2m-p+1) + \frac{(1+2^m)\pi^2}{a^2} \right\} a^2 c, & n = 2m \\ \left\{ \frac{(2m+2)^2}{4} - p(2m+2-p) + \frac{(1-2^{2m})^2 \pi^2}{a^2} \right. \\ \left. + \left( \operatorname{sh} \frac{a}{1+2^{2m}} \right)^{-2} \right\} c, & n = 2m+1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Beweis: Einsetzen von  $f(r) = \frac{\sinh \sqrt{c} r}{\sqrt{c}}$  in  $D_{11, (p-1)(n-p+1)\alpha} - \lambda\alpha = 0$  ergibt

$$\begin{aligned} -\alpha'' + \left[ \frac{n-2p+3}{2} \frac{n-2p+1}{2} \operatorname{ctgh}^2 \sqrt{c} r + (p-1)(n-p+1) \operatorname{ctgh}^2 \sqrt{c} r \right. \\ \left. - \frac{n-2p+1}{2} - (p-1)(n-p+1) \right] c\alpha - \lambda\alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha'' + \left[ \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} \operatorname{ctgh}^2 \sqrt{c} r - \frac{n-2p+1}{2} \right. \\
 & \left. - (p-1)(n-p+1) \right] c\alpha - \lambda\alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Transformation  $\alpha = \left( \frac{\sinh \sqrt{c} r}{\sqrt{c}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \varphi$  überführt (3.14) in

$$\begin{aligned}
 & -\varphi'' - (n+1)\sqrt{c} \operatorname{ctgh} \sqrt{c} r \cdot \varphi' - \frac{n+1}{2} c \cdot \varphi - \frac{n-2p+1}{2} c\varphi \\
 & - (p-1)(n-p+1)c\varphi - \lambda\varphi = 0,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$-\varphi'' - (n+1)\sqrt{c} \operatorname{ctgh} \sqrt{c} r \varphi' - p(n-p+1)c\varphi - \lambda\varphi = 0. \tag{3.16}$$

Mit der Transformation  $\cosh \sqrt{c} r = x, r = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arcosh} x, \psi(x) = \varphi \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arcosh} x \right) = \varphi(r)$  erhält man schlieelich

$$\begin{aligned}
 & -\psi''(x^2-1)c - \psi'(n+2)xc - p(n-p+1)c\psi - \lambda\psi = 0, \\
 & \psi''(x^2-1) + (n+2)\psi'x + p(n-p+1)\psi + \lambda'\psi = 0, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{c}.
 \end{aligned}$$

Zu studieren ist also die Aufgabe

$$\begin{aligned}
 & \psi''(x^2-1) + (n+2)\psi'x + \lambda'\psi = 0, \\
 & \psi(\cosh \sqrt{c} a) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sei  $n = 2m$ . Dann erhält man aus [9: Seiten 19 und 402] oder [1: Seite 294]

$$\lambda_1' \leq \frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{(1+2m)^2 \pi^2}{a^2},$$

also

$$\lambda_1(\Delta) \leq \left\{ \frac{(2m+1)^2}{4} - p(2m-p+1) + \frac{(1+2m)^2 \pi^2}{a^2} \right\} c.$$

Die gleichen Literaturstellen liefern im Fall  $n+1 = 2(m+1)$

$$\lambda_1' \leq \frac{(2m+2)^2}{4} + \frac{(1+2^2m)^2 \pi^2}{a^2} + \left( \sinh \frac{a}{1+2^2m} \right)^{-2}$$

und damit die 2. Ungleichung von (3.12) ■

Bemerkung: Ersetzung von  $p$  durch  $n-p$  in (3.12) liefert die Schranken im Fall  $p \leq \frac{n}{2}$ . Bei Satz 3.1 brauchte diese Ersetzung effektiv gar nicht vorgenommen zu werden, da die Schranken von  $p$  unabhängig ausfielen.

Es sollen nun die erhaltenen Gleichungen bzw. Abschätzungen auf den Fall einfach zusammenhängender offener Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung  $K = -c < 0$  angewendet werden. Dabei werden entsprechende Modifikationen der Resultate von [3] erhalten. Dazu zitieren wir zunächst das Hauptresultat aus [3]. Dazu sei  $H^n$  der einfach zusammenhängende hyperbolische Raum konstanter Krümmung  $-1$  und  $\Delta_p = \Delta_p(H^n)$  der Laplaceoperator auf den  $p$ -Formen von  $H^n$ .

Satz 3.3: a)  $\Delta_p$  besitzt ein nichtleeres Punktspektrum genau dann, wenn  $p = \frac{n}{2}$  ist. Der einzige Eigenwert ist dann 0, und dieser besitzt unendliche Vielfachheit.  
 b) Für den ersten Spektralwert  $\lambda_1(\Delta_p)$  gilt

$$\lambda_1(\Delta_p) = \begin{cases} \frac{(n-1)^2}{4}, & p = 0, n \\ \min \left\{ \frac{(n-2p-1)^2}{4}, \frac{(n-2p+1)^2}{4} \right\}, & p \neq 0, n, \frac{n}{2} \\ 0, & p = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Wir beweisen jetzt folgenden

Satz 3.4: Sei  $(M^n, g)$  offen, vollständig, einfach zusammenhängend und von konstanter Schnittkrümmung  $K = -c < 0$ . Dann gilt für  $\frac{n}{2} \leq p < n$   $\sigma_{\text{ess}}(\Delta_p) \supseteq [\bar{\lambda}, \infty[$ , wobei  $\bar{\lambda} = \frac{(n-2p+1)^2}{4} \cdot c$  ist; und für  $0 < p \leq \frac{n}{2}$   $\sigma_{\text{ess}}(\Delta_p) \supseteq [\lambda, \infty[$ , wobei  $\lambda = \frac{(n-2p-1)^2}{4} \cdot c$  ist.

Beweis: Sei zunächst  $\frac{n}{2} \leq p < n$ . (3.12) gilt natürlich für  $M^n$  mit obigen Voraussetzungen, wobei  $a$  zwischen 0 und  $\infty$  frei wählbar ist. Man erhält  $\lambda_1 \leq \frac{(n-2p+1)^2}{4} \cdot c$ . Sei  $\frac{(n-2p+1)^2}{4} \cdot c < \lambda$ . Es werde  $a$  so gewählt, daß  $\lambda$  erster Eigenwert des

Dirichletproblems  $\Delta\omega = \lambda\omega$  für  $\Delta_F(B_a)$  auf  $B_a$  ist. Sei für ein fixiertes  $B_a$   $\omega$  eine zu  $\lambda$  gehörige Eigenform (die man durch Multiplikation der Lösung von (3.14) mit einer zu  $(p-1)(n+p+1)$  gehörigen Eigenform von  $\Delta_{0,p-1}$  und  $dr$  erhält). Diese werde als 0 außerhalb  $B_a$  fortgesetzt. Die Wahl unendlich vieler disjunkter Vollkugeln  $(B_a)$ , und entsprechender  $\omega$ , ergibt eine Weylsche Folge für  $\lambda$ . Also ist  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\Delta_F(M))$ .

Ersetzung von  $p$  durch  $n-p$  ergibt die Behauptung für  $0 < p \leq \frac{n}{2}$ , also insgesamt für  $0 < p < n$  ■

Folgerung: Für das Spektrum  $\sigma(\Delta_p(H^n))$  gilt

$$\sigma(\Delta_p(H^n)) = \sigma_{\text{ess}}(\Delta_p(H^n)) = \begin{cases} \left[ \frac{(n-2p+1)^2}{4}, \infty \right], & \frac{n}{2} < p < n \\ \left[ \frac{(n-2p-1)^2}{4}, \infty \right], & 0 < p < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Inklusionen  $\sigma_{\text{ess}}(\Delta) \subseteq \sigma(\Delta) \subseteq [\lambda_1, \infty[$  sowie den Sätzen 3.3b) und 3.4 ■

Abschließend behandeln wir den Fall  $K = c > 0$ . Für  $n = 2m$  sind die sphärischen Raumformen und das Spektrum  $\sigma(\Delta_p)$  vollständig bekannt. Abschätzungen erübrigen sich also. Es verbleibt nur der Fall  $n = 2m + 1$ . Jede Raumform  $M^{2m+1}$  konstanter Krümmung  $K = c > 0$  hat die Gestalt  $S_{1/\sqrt{c}}^{2m+1}/G$ , wobei  $G$  eine endliche frei operierende Gruppe von Isometrien auf  $S_{1/\sqrt{c}}^{2m+1}$  ist. Der Injektivitätsradius  $r_{\text{inj}}$  von



$S_{1/\sqrt{c}}^{2m+1}$  erfüllt sicher die Ungleichungen  $\pi/\sqrt{c} \cdot |G| \leq r_{\text{inj}} \leq \pi/\sqrt{c}$ , wobei  $|G|$  die Ordnung von  $G$  bezeichnet. Im Falle der Sphere  $S_{1/\sqrt{c}}^n$  ( $G = e$ ) wird  $\pi/\sqrt{c}$ , im Falle  $n = 1, G = Z_m$  wird  $\pi/\sqrt{c} \cdot m$  angenommen.  $\pi/\sqrt{c} |G|$  erhält man als untere Schranke für den Injektivitätsradius, wenn man den Extremfall annimmt, daß der Orbit eines Punktes auf einem Großkreis liegt. Für  $G \neq e$  und  $n > 1$  gilt also sicher  $\pi/\sqrt{c} \cdot |G| \leq r_{\text{inj}} \leq \pi/\sqrt{c}$ . Schranken für  $\lambda_1(\Delta_p)$  werden somit wesentlich von  $|G|$  abhängen.

Wir bezeichnen wie üblich mit  $P_\nu(x)$  eine der beiden linear unabhängigen normierten Legendreschen Funktionen, die

$$(x^2 - 1) \psi'' + 2x\psi' - \nu(\nu + 1) \psi = 0$$

lösen. Dann erfüllt  $\frac{d^m}{dx^m} P_\nu$  die Gleichung

$$(x^2 - 1) \psi'' + 2(m + 1) x\psi' - (\nu - m)(\nu + m + 1) \psi = 0. \tag{3.18}$$

Analog zum Fall  $K = -c < 0$  werden im Fall  $K = c > 0$  die Schranken für  $\lambda_1$  wesentlich aus Abschätzungen für die Nullstellen der entsprechenden sphärischen Funktionen erhalten. Bei  $K = -c < 0$  waren dies die Funktionen  $P_{-\frac{1}{2}+iq}, \frac{d^m}{dx^m} P_{-\frac{1}{2}+iq}$ , deren Nullstellen sich vergleichsweise einfach abschätzen lassen [9]. Für  $K = c > 0$  sind die Nullstellen von  $\frac{d^m}{dx^m} P_\nu$ ,  $\nu$  reell, abzuschätzen, was für nicht ganzzahliges  $\nu$  wesentlich schwieriger ist als für  $\frac{d^m}{dx^m} P_{-\frac{1}{2}+iq}$ . Sowohl  $P_\nu^m$  als auch  $\frac{d^m}{dx^m} P_\nu$  besitzen die gleichen Nullstellen. Für den Index  $\nu = \nu(m, \theta)$ , für den  $P_\nu^m(\cos \theta) = 0$  ist, existiert eine sehr komplizierte und umfangreiche Formel, die man in [9: Seite 409] auszugsweise findet. Wir verzichten hier auf das Zitat dieser Formel und begnügen uns mit deren Existenz. In unserem Fall ist  $\theta = \sqrt{c} r$  und  $\pi/\sqrt{c} \cdot |G|$  für  $r$  zu nehmen, also  $\theta = \pi/|G|$ . Also sehen wir  $\nu = \nu(m, \pi/|G|)$  als im Prinzip „berechenbar“ an.

Satz 3.5: Sei  $(M^n, g) = S_{1/\sqrt{c}}^n/G$  von konstanter Krümmung  $K = c > 0, n = 2m + 1$ .

Dann gilt für  $\lambda_1(\Delta), 0 < p \leq \frac{n}{2}$ :

$$\begin{aligned} p(n - p + 1) \cdot c &\leq \lambda_1(\Delta) \\ &\leq p(n - p + 1) \cdot c + \left[ (\nu - m)(\nu + m + 1) - \frac{4m + 3}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4m + 1}{4} \int_0^{\pi/\sqrt{c}|G|} (P_\nu^{(m)})^2 (x^2 - 1)^{-1} dx \right] \cdot c. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Beweis: Die Abschätzung  $p(n - p + 1) \leq \lambda_1(\Delta)$  ist schon in [5] enthalten. Die Gleichung  $D_{11, (p-1)(n-p+1)} \alpha - \lambda \alpha = 0$  lautet, ausgeschrieben

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{dr^2} \alpha + c \left[ \frac{n - 2p + 3}{2}, \frac{n - 2p + 1}{2} \text{ctg}^2 \sqrt{c} r + \frac{n - 2p + 1}{2} \right] \alpha \\ + \frac{c}{\sin^2 \sqrt{c} r} (p - 1)(n - p + 1) \alpha - \lambda \alpha = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$-\frac{d^2}{dr^2} \alpha + c \left[ \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \operatorname{ctg}^2 \sqrt{c} r + \frac{n-2p+1}{2} + (p-1)(n-p+1) \right] \alpha - \lambda \alpha = 0. \quad (3.20)$$

Die Transformation  $\alpha = \varphi \left( \frac{\sin \sqrt{c} r}{\sqrt{c}} \right)^{\frac{n+1}{2}}$  überführt (3.20) in

$$-\varphi'' - (n+1) \sqrt{c} \operatorname{ctg} \sqrt{c} r \cdot \varphi' + p(n-p+1) c \varphi - \lambda \varphi = 0. \quad (3.21)$$

Substitution  $\cos \sqrt{c} r = x$ ,  $r = \frac{1}{\sqrt{c}} \arccos x$ ,  $\psi(x) = \varphi \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \arccos x \right) = \varphi(r)$  ergibt unter Fortlassung des Termes  $p(n-p+1) \cdot c$  von (3.21)

$$c(x^2 - 1) \psi'' + (n+1) c x \psi' + \lambda \psi = 0.$$

Zu studieren ist also

$$(x^2 - 1) \psi'' + (n+2) x \psi' - \lambda' \psi = 0, \quad (3.22)$$

$$\psi(\cos \sqrt{c} a) = 0.$$

Sei in (3.22)  $n = 2m$ . Dann löst  $\frac{d^m}{dx^m} P$ , die Gleichung (3.22) mit  $\lambda' = (v-m) \times (v+m+1)$ . Wir haben (3.22) für den Fall  $n+2 = 1 + 2(m+1)$  zu lösen, d. h.

$$(x^2 - 1) \psi'' + (1 + 2(m+1)) x \psi' - \lambda' \psi = 0, \quad (3.23)$$

$$\psi(\cos \pi/|G|) = 0:$$

Eine einfache Rechnung ergibt Folgendes. Erfüllt  $\psi$  die Gleichung  $(x^2 - 1) \psi'' + 2(m+1) x \psi' - \lambda' \psi = 0$ , so erfüllt  $\chi = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} \psi$  die Gleichung

$$(x^2 - 1) \chi'' + (1 + 2(m+1)) x \chi' + \left( -\lambda' + \frac{4m+3}{4} + \frac{4m+1}{4} \frac{1}{x^2-1} \right) \chi = 0.$$

Hieraus folgt im Fall  $n = 1 + 2m$

$$\lambda' \leq (v-m)(v+m+1) - \frac{4m+3}{4} - \frac{4m+1}{4} \int_0^{\pi/\sqrt{c}|G|} (p_v^{(m)})^2 (x^2 - 1)^{-1} dx$$

und damit die Abschätzung (3.13) ■

**Bemerkung:** Es ist aus verschiedenen Überlegungen heraus klar, daß  $\lambda_1$  für fallendes Volumen und fallenden Durchmesser, d. h. für wachsende Ordnung  $|G|$  von  $G$  wachsen wird. (3.19) liefert eine obere Schranke für das Wachstum in  $|G|$ , die wesentlich quadratisch in  $v(m, \pi/|G|)$  ist. Die erwähnte Formel aus [9] zeigt, daß  $v(m, \theta)$  in  $\theta^{-1}$  wächst.

Wir rechtfertigen abschließend unser Vorgehen, indem wir die Satz 3.1 vorangehenden Bemerkungen beweisen.

Satz 3.6: a) Für  $K = -c < 0$  gilt  $\lambda_{1,11} \leq \lambda_{1,22}$  genau dann, wenn  $p \geq \frac{n}{2}$  ist.

b) Für  $K = c > 0$  gilt  $\lambda_{1,11} \leq \lambda_{1,22}$  genau dann, wenn  $p \leq \frac{n}{2}$  ist.

c) Für  $K = 0$  gilt  $\lambda_{1,11} = \lambda_{1,22}$  für alle  $p, 0 \leq p \leq n$ .

d) Übergang von  $p$  nach  $n - p$  liefert im Komplementurbereich genau die aus  $D_{22}$  zu gewinnenden Schranken.

Beweis: a) Sei  $K = -c < 0$ . Die beiden Randwertaufgaben

$$\begin{aligned} D_{11, (p-1)(n-p+1)}\alpha - \lambda\alpha &= 0, & \alpha(a) &= 0, \\ D_{22, (p+1)(n-p-1)}\beta - \lambda\beta &= 0, & \beta(a) &= 0 \end{aligned}$$

lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} -\alpha'' + \left[ \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} \operatorname{ctgh}^2 \sqrt{c} r - \frac{n-2p+1}{2} - (p-1)(n-p+1) \right] \\ \times c\alpha - \lambda\alpha &= 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} -\beta'' + \left[ \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} \operatorname{ctgh}^2 \sqrt{c} r + \frac{n-2p-1}{2} - (p+1)(n-p-1) \right] \\ \times c\beta - \lambda\beta &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt folglich  $\lambda_{1,11} \leq \lambda_{1,22}$  genau dann, wenn  $-\frac{n-2p+1}{2} - (p-1)(n-p+1) \leq \frac{n-2p-1}{2} - (p+1)(n-p-1)$  ist. Dies ist aber mit  $p \geq \frac{n}{2}$  gleichwertig.

b) Im Fall  $K = c > 0$  hat man diese Zahlen mit umgekehrtem Vorzeichen zu vergleichen und erhält  $p \leq \frac{n}{2}$ .

c) Im Fall  $K = 0$  gilt  $D_{11} = D_{22} = -\frac{d^2}{dr^2} + \left[ \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} \right] \frac{1}{r^2}$ .

d) Sei  $K = -c < 0, n = 2m$ .  $D_{11, (p-1)(n-p+1)}$  liefert gemäß (3.13) die Schranke

$$\left\{ \frac{(2m+1)^2}{4} - p(2m-p+1) + \frac{(1+2m)^2 \pi^2}{a^2} \right\} c.$$

Die von (3.24) ausgehende Rechnung liefert diejenige Schranke, die aus (3.13) entsteht, indem man  $p(2m-p+1) = p(n-p+1)$  durch  $(p+1)(n-p)$  ersetzt.  $p(n-p+1)$  wird aber durch  $p \rightarrow n-p$  in  $(p+1)(n-p)$  überführt. In der zweiten Ungleichung von (3.13) (d. h.  $n = 2m+1$ ) steht ebenfalls  $p(n-p+1)$ . Im Fall  $K = c > 0$  hat man ebenfalls  $p(n-p+1)$  bei  $D_{11}$  bzw.  $(p+1)(n-p)$  bei  $D_{22}$  stehen, nur mit einem anderen Vorzeichen behaftet ■

Bemerkung: Eine gewisse Sonderrolle spielt der Fall  $p = \frac{n}{2}$ , wie schon das Auftreten von  $L_2$ -harmonischen Formen auf offenen hyperbolischen Mannigfaltigkeiten zeigt. Die hier aus  $D_{11}, D_{22}$  für  $p = \frac{n}{2}$  gewonnenen Schranken fallen zu grob aus. Es ist  $D_{2, p(n-p)} = D_{2, p}$  zu studieren. Das Variationsprinzip liefert kleinere Schranken. Für  $K = -c < 0, p = \frac{n}{2}$  gilt

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{d^2}{dr^2} + \left[ \frac{4p^2-1}{4} \operatorname{ctgh}^2 \sqrt{c} r - p^2 + \frac{1}{2} \right] c, \quad \sqrt{\mu} = p,$$

für  $\beta = -\alpha$

$$\begin{aligned} \left\langle D_{2,p} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle &= 2\langle D_{11,p}\alpha, \alpha \rangle - 4pc^{3/2} \left\langle \frac{\cosh \sqrt{c} r}{\sinh^2 \sqrt{c} r} \alpha, \alpha \right\rangle \\ &= 2\langle D_{22,p}\alpha, \alpha \rangle - 4pc^{3/2} \left\langle \frac{\cosh \sqrt{c} r}{\sinh^2 \sqrt{c} r} \alpha, \alpha \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Minimierung von  $\left\langle D_{2,p} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle / \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle$  wird hier aber nicht weiter verfolgt.

#### 4. Abschätzungen für die höheren Eigenwerte

Sei  $(M^n, g)$  so beschaffen, daß  $m_0$  Eigenwerte  $\lambda_i$  unterhalb des Minimums des wesentlichen Spektrums von  $\Delta$  liegen,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{m_0}$ ,  $\lambda_i$  gezählt entsprechend der Vielfachheit,  $\tau_1, \dots, \tau_{m_0}$  seien zugehörige normierte Eigenformen. Ist  $m < m_0$ , so gilt

$$\lambda_{m+1} = \inf_{\substack{\omega \in C_0^\infty \\ \langle \omega, \tau_i \rangle = 0 \\ i=1, \dots, m}} \frac{\langle \Delta \omega, \omega \rangle}{\langle \omega, \omega \rangle}. \tag{4.1}$$

Eine einfache Abschätzung für  $\lambda_{m+1}$  liefert

**Lemma 4.1:** *Erfülle  $(M^n, g)$  obige Voraussetzungen. Sind dann  $B_{a_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) disjunkte geodätische Bälle derart, daß  $\lambda_1(\Delta_F(B_{a_i})) = \lambda$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ist, so gilt*

$$\lambda_{m+1}(\Delta_F(M)) \leq \lambda. \tag{4.2}$$

**Beweis:** Seien  $\omega_{a_i}$  normierte Eigenformen zu  $\lambda_i(\Delta_F(B_{a_i}))$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\langle \omega_{a_i}, \omega_{a_k} \rangle = 0$ ,  $i \neq k$ . Die  $\omega_{a_i}$  werden als Null fortgesetzt auf  $M$ . Es existieren sicher Zahlen  $y_1, \dots, y_{m+1}$  derart, daß  $\sum_{i=1}^{m+1} y_i \langle \tau_j, \omega_{a_i} \rangle = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) ist. Wegen der Disjunktheit der  $B_{a_i}$  ist  $\omega = \sum_{i=1}^{m+1} y_i \omega_{a_i} \neq 0$ . Dann gilt wegen (4.1) und  $\Delta_F(B_{a_i}) \subseteq \Delta_F(M)$

$$\lambda_{m+1} \leq \frac{\langle \Delta \omega, \omega \rangle}{\langle \omega, \omega \rangle} = \frac{\sum y_i^2 \lambda}{\sum y_i^2} = \lambda \blacksquare$$

Mit  $\text{vol}(M)$  werde i. f. das Volumen einer Mannigfaltigkeit bezeichnet.

**Satz 4.2:** *Sei  $(M^n, g)$  eine kompakte Raumform der konstanten Krümmung  $K = c$ . Dann gilt für den  $(m + 1)$ -ten Eigenwert  $\lambda_{m+1}(\Delta_F(M))$ :*

a)  $\lambda_{m+1} \leq 2\pi(n + 2)(n + 6) \cdot ((m + 1) \cdot \Gamma(n/2 + 1))^{-1} \cdot \text{vol}(M)^{-1/2n}$   
für  $K = 0$ ,  $0 < p < n$ . (4.3)

b)  $\lambda_{m+1} \leq \left\{ \frac{(n + 1)^2}{4} - p(n - p + 1) \right.$

$$\left. + (1 + 2^k)^2 \pi^2(m + 1) \cdot \text{vol}(S^{n-1}) \cdot n^{-1/2n} \cdot \left( \frac{\sinh(\sqrt{c} d_M)}{\sqrt{c} d_M} \right)^{2(n-2)/2} \right\} c$$

für  $K = -c < 0$ ,  $n = 2k$ ,  $p \geq \frac{n}{2}$ ,

bzw.

$$\lambda_{m+1} \cong \left\{ \frac{(n+1)^2}{4} - p(n-p+1) + (1+2^{2k})^2 \pi^2 ((m+1) \cdot \text{vol}(S^{n-1}) \cdot n^{-1})^{2/n} \cdot \left( \frac{\sinh(\sqrt{c} d_M)}{\sqrt{c} d_M} \right)^{2(n-2)/2} + \left[ \sinh((m+1)^{-1/n} \cdot \text{vol}(S^{n-1})^{-1/n} \cdot (\sqrt{c} d_M / \sinh(\sqrt{c} d_M))^{n-2/n} \times (1+2^{2k})^{-1} \right]^{-2} \right\} c \quad (4.4)$$

für  $K = -c < 0, n = 2k + 1, p \geq \frac{n}{2}$ .

$d_M$  bezeichne hierbei den Durchmesser von  $M$ .

Beweis: Die Voraussetzungen von Lemma 4.1 sind erfüllt, wenn in  $M^n$   $m + 1$  disjunkte geodätische Bälle von gleichem Radius  $a$  existieren. Gemäß [10] ist in einer Raumform die maximale Anzahl offener disjunkter geodätischer Bälle  $B_a$  vom Radius  $a$  in  $M$  nicht kleiner als  $\frac{\text{vol}(M)}{\text{vol}(B_{2a})}$ . Die Ungleichung  $m + 1 \geq \frac{\text{vol}(M)}{\text{vol}(B_{2a})}$  führt im Falle  $K = 0$  mit  $\text{vol}(B_{2a}) = \frac{(\pi(2a)^2)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$  auf  $\frac{1}{a^2} 2 \leq 4\pi \left( \frac{m+1}{\Gamma(n/2 + 1) \text{vol}(M)} \right)^{2/n}$ . Lemma 4.1 und (3.8) ergeben (4.3). Im Falle  $K = -c < 0$  hat man

$$\text{vol}(M) \leq (m+1) \text{vol}(S^{n-1}) \cdot \int_0^{2a} \left( \frac{\sinh \sqrt{c} \cdot r}{\sqrt{c}} \right)^{n-1} dr,$$

woraus

$$\frac{1}{\alpha^2} \leq \left( \frac{(m+1) \text{vol}(S^{n-1})}{n} \right)^{2/n} \cdot \left( \frac{\sinh \sqrt{c} d_M}{\sqrt{c} d_M} \right)^{\frac{2(n-2)}{n}} \quad (4.5)$$

folgt. Mit (4.5) folgt (4.4) wieder aus (3.13) und folgt Lemma 4.1 ■

## LITERATUR

- [1] CHENG, S. Y.: Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.* **143** (1975), 289–297.
- [2] EICHORN, J.: Spektraltheorie offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit einer rotationssymmetrischen Metrik, *Math. Nachr.* **104** (1981), 7–30.
- [3] DONNELLY, H.: The differential form spectrum of hyperbolic space. *Manuscr. Math.* **33** (1981), 365–385.
- [4] EICHORN, J.: Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einer zylinderähnlichen Endemetrik. *Math. Nachr.* **114** (1983), 23–51.
- [5] GALLOT, S., und C. MEYER: Operateur de courbure et Laplacien des formes d'une variete Riemannienne. *J. Math. pures et appl.* **54** (1975), 259–284.
- [6] АБРАМОВИТЗ, М., und I. А. СТЕГУН: Handbook of mathematical functions (russ. transl.). Изд-во Наука: Москва 1979.

- [7] WATSON, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Univ. Press.: Cambridge 1944.
- [8] TRIEBEL, H.: Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin, 1972.
- [9] HOBSON, E. W.: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics I, II. Univ. Press: Cambridge 1931.
- [10] GROMOV, M.: Paul Levy's isoperimetric inequality. Preprint IHES/M/80/320.

Manuskripteingang: 25. 09. 1982; in revidierter Fassung: 16. 06. 1983

VERFASSER:

Dr. JÜRGEN EICHHORN  
Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität  
DDR-2200 Greifswald, Ludwig-Jahn-Str. 15a