Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (4) 1984, S. 303–313

# Spektrale Geometrie und Huygenssches Prinzip für Tensorfelder und Differentialformen II[1])

R. Schimming und G. Teumer

Geometrische Eigenschaften (lokale Flachheit u. a.) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit werden aus analytischen Eigenschaften (Spektrum bzw. Huygenssches Prinzip) eines Laplaceoperators erschlossen. Insbesondere wird das „Definitheitsproblem" der Spektralgeometrie geschlossener Mannigfaltigkeiten für den auf Differentialformen wirkenden kanonischen Laplaceoperator gelöst.

Геометрические свойства (исчезновение кривизны или её части) отражаются в аналитических свойствах (спектр или принцип гюйгенса), некоторого оператора Лапласа. В особенности решается „проблема определённости" спектральной геометрии замкнутых многообразий для канонического оператора Лапласа, действующего на дифференциальные формы.

Geometrical properties (especially local flatness) of a Riemannian manifold are recognized from analytical properties (spectrum or Huygens' principle) of a Laplace operator. Especially, the "definiteness problem" of the spectral geometry of closed manifolds is solved for the canonical Laplace operator which acts on differential forms.

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit setzt [I] fort und stützt sich des weiteren auf [3, 4]. Der allgemeine Rahmen und die Bezeichnungen werden aus [I] übernommen; es werden aber dort offen gebliebene Probleme behandelt.

Grob gesprochen geht es darum, geometrische Eigenschaften (Flachheit, Ricci-Flachheit, ...) einer $n$-dimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, g)$ aus analytischen Eigenschaften (Spektrum bzw. Huygens-Eigenschaft) eines Laplaceoperators

$$L = \Delta + C \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta + C$$

zu erschließen, welcher wahlweise auf kovariante Tensorfelder $p$-ter Stufe, alternierende (für $\varepsilon = -1$) bzw. symmetrische (für $\varepsilon = 1$) $p$-Differentialformen, spurfreie symmetrische Formen wirkt. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen sei $n \geqq 4$ vorausgesetzt; die Riemannsche Metrik ist entweder definit oder lorentzsch. Für

$$C = 0, \quad -\frac{n-2}{4(n-1)} RI, \quad \varepsilon Z$$

liegt beziehentlich der „reine Laplacian", der „Laplacian mit verschwindender Cottoninvariante", der „kanonische Laplacian" vor. Letzterer wirkt nur auf Formen und baut sich gemäß

$$\varepsilon\delta d - d\delta = \Delta + \varepsilon Z$$

[1]) Teil I erschien in 1 (1982) 2 dieser Zeitschrift.

aus dem äußeren Differential $d$ und dem inneren Differential $\delta$ auf; $Z$ bezeichnet den bekannten *Weitzenböck-Operator*. Auf Grund der Dualität brauchen alternierende Formen nur für Stufen $p \leqq n/2$ betrachtet zu werden.

Unsere Hauptergebnisse zur Spektralgeometrie, für definites $g$ und geschlossenes $M$, können folgendermaßen charakterisiert werden:

1. *Bei dem auf alternierende p-Formen wirkenden kanonischen Laplacian* $-(d\delta + \delta d) = \Delta - Z$ *gibt es Schranken* $p_i^\pm = p_i^\pm(n)$ $(i = 0, 1)$ *derart, daß für*

$$\textit{entweder } p_1^- < p \leqq p_0^- \textit{ oder } p_0^+ \leqq p < p_1^+$$

*die (lokale) Flachheit von* $(M, g)$ *aus dem Spektrum von* $L$ *erschlossen werden kann.*

2. *Bei dem auf symmetrische p-Formen wirkenden kanonischen Laplacian* $\delta d - d\delta = \Delta + Z$ *gibt es eine Schranke* $p^+ = p^+(n)$ *derart, daß für* $p > p^+$ *die Flachheit aus dem Spektrum erschlossen werden kann.*

3. *Bei spezieller (im einzelnen angegebener)*

$$\textit{Situation} := (\textit{Feldtyp, Typ von } L,\ n,\ p)$$

*kann die Eigenschaft konstanter Krümmung aus dem Spektrum erschlossen werden.*

4. *Bei spezieller Situation innerhalb der Klasse der Einstein-Mannigfaltigkeiten bzw. der Mannigfaltigkeiten mit verschwindender Skalarkrümmung kann die Eigenschaft der Ricci-Flachheit erschlossen werden.*

Von der Methode her handelt es sich darum, für welche Situationen die aus dem 2. Hadamardkoeffizienten $U_2(x, y)$ gebildete Spektralinvariante

$$U_2[M] := \int_M \operatorname{Tr} U_2(x, x)\, d \operatorname{Vol}(x)$$

eine definite quadratische Form in der Krümmung von $(M, g)$ bzw. in einem Bestandteil der Krümmung darstellt. Dieses „Definitheitsproblem" wird hier für den kanonischen Laplacian allgemein gelöst, während in der Literatur (siehe die in [I] gegebenen Zitate) bisher nur Spezialfälle für kleine $n$ bzw. $p$ betrachtet wurden. Als neuen Gesichtspunkt führen wir zahlentheoretische (diophantische) Probleme in die Spektralgeometrie ein. Ein Ergebnis zum Huygensschen Prinzip (*HP*), bei $n = 6$ und lorentzschem $g$, lautet wie folgt:

*Ist der auf symmetrische p-Formen mit* $p \geqq 2$ *wirkende kanonische Laplacian huygenssch und* $\Delta R \geqq 0$, *und sind* $|S|^2$, $|Weyl|^2$ *positiv definit, so ist* $(M, g)$ *flach.*

Wie in [I] sei

$$Riem = \text{Krümmungstensor},\quad Ric = \text{Riccitensor},\quad R = \text{Skalarkrümmung},$$

$$S := Ric - \frac{1}{n} Rg,\quad Weyl = \text{Konformkrümmungstensor}.$$

Durch $|\ldots|^2$ wird die Überschiebung (bezüglich $g$) eines Tensors mit sich selbst angezeigt. Definitheitsbedingungen sind jeweils für eine ganze Klasse von Metriken $g$ zu interpretieren. So ist oben gemeint, daß in der betrachteten Klasse gilt:

$$|S|^2 \geqq 0 \text{ und gleich null genau dann, wenn } S = 0;$$

$$|Weyl|^2 \geqq 0 \text{ und gleich null genau dann, wenn } Weyl \doteq 0.$$

(In [I] wurden Klassen von Metriken mit diesen Eigenschaften diskutiert.) Beim $HP$ für $n = 6$ wird die unintegrierte Gleichung

$$Tr\, U_2(x, x) = 0$$

auf Definitheit untersucht ($Tr$ = Trace = Spur eines linearen Operators). Die Methode geht im Prinzip auf [1] zurück; siehe im übrigen die in [I] zitierte Literatur zum $HP$.

Die Autoren danken Herrn Dr. W. Quapp für die Durchführung von Computerrechnungen.

## § 1. Lösung des Definitheitsproblems für den kanonischen Laplacian

In diesem und im folgenden Abschnitt setzen wir $M$ als geschlossen und $g$ als definit voraus. Der Terminus „proportional" bzw. das Zeichen $\sim$ sollen hier stets einschließen, daß der Proportionalitätsfaktor in allen in Frage kommenden Situationen positiv ist.

Satz 1.1: *Die 2. Spektralinvariante $U_2[M]$ ist beim kanonischen Laplacian proportional zum Matrizenprodukt*

$$\left(2N_0{}^4, 5N_2{}^4 m, 15m(m - N_1{}^2)\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2\varepsilon & 6 & -1 \\ 1 & 4\varepsilon & 2 + \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|R\|^2 \\ \|Ric\|^2 \\ \|Riem\|^2 \end{pmatrix}$$

*mit* $m := p(n + \varepsilon p)$.

Der Beweis ergibt sich durch Fortsetzung der Rechnungen von [I]. Bei der Integration über $M$ werden aus den Quadraten $|\ldots|^2$ die Normen $\|\ldots\|^2$ und der Term mit $\Delta R$ fällt weg ∎

In das Matrizenprodukt setzen wir nun ein

$$N_q{}^p = (n + \varepsilon q)(n + \varepsilon q + \varepsilon) \ldots (n + \varepsilon p - \varepsilon)/(p - q)!,$$

$$|Ric|^2 = |S|^2 + \frac{1}{n} R^2,$$

$$|Riem|^2 = |Weyl|^2 + \frac{4}{n-2} |S|^2 + \frac{2}{n(n-1)} R^2$$

und erhalten nach einiger Rechnung

Satz 1.2: 1. *Für den auf alternierende $p$-Formen wirkenden kanonischen Laplacian sind die Faktoren von $\|R\|^2$, $\|S\|^2$, $\|Weyl\|^2$ in $U_2[M]$ der Reihe nach proportional zu*

$$z^2 - 20(n^2 - n + 1)\, z + 20n(n - 1)(5n^2 - 7n + 6) =: c_0,$$

$$-z^2 + 5(3n^2 - 2n + 4)\, z - 10n(n - 1)(n - 2)(n - 6) =: c_1,$$

$$z^2 - 10n(n + 1)\, z + 40n(n - 1)(n - 2)(n - 3) =: c_2$$

*mit* $z := 60m = 60p(n - p)$.

*Die Koeffizienten $c_0$, $c_1$, $c_2$ sind nicht gleichzeitig negativ. Genauer ist $c_2$ positiv definit für $n \geqq 18$ und die Gleichungen $c_i = 0$ $(i = 0, 1)$ haben für $n \geqq 18$ reelle Wurzeln $z_i^-$, $z_i^+$ mit*

$$0 < z_1^- < z_0^- < z_0^+ < z_1^+ < 15n^2.$$

2. *Für den auf symmetrische p-Formen wirkenden kanonischen Laplacian sind die Faktoren von* $\|R\|^2$, $\|S\|^2$, $\|Weyl\|^2$ *in* $U_2[M]$ *der Reihe nach proportional zu*

$$z^2 + 60(n^3 + 2n^2 - 4n - 15)\,z + 180n(n+1)^2\,(n+3)\,(5n^2 - 7n + 6) =: c_0,$$

$$z^2 + 15(3n^3 - 5n^2 - 46n - 60)\,z - 90n(n+1)^2\,(n+2)\,(n+3)\,(n-6) =: c_1,$$

$$z^2 - 10(n+1)\,(n^2 + 23n + 24)\,z + 120n(n+1)^3\,(n+2)\,(n+3) =: c_2$$

*mit* $z := 180(n+1)\,m = 180(n+1)\,p(n+p)$.

*Der Koeffizient* $c_0$ *ist positiv definit für* $n \geqq 4$ *und* $c_2$ *ist positiv definit für* $n \geqq 16$. *Die Gleichung* $c_1 = 0$ *hat für* $n \geqq 7$ *genau eine positive Wurzel* $z^+$.

Wir skizzieren einen Beweis der behaupteten Vorzeichen-Eigenschaften: 1. Wegen

$$(n-2)\,c_0 + 2(n-1)\,c_1 + nc_2 = 120n^2(n-1)^2\,(n-2) > 0$$

ist wenigstens ein $c_i$ positiv. Die Diskriminanten der quadratischen Funktionen $c_i = c_i(z)$ $(i = 0, 1, 2)$ sind der Reihe nach

$$d_0 = 20(2n^3 + 2n^2 - 4n + 5),$$

$$d_1 = \frac{5}{4}\,(37n^4 + 12n^3 - 20n^2 + 16n + 80),$$

$$d_2 = 5(-3n^3 + 58n^2 - 83n + 48).$$

Die für $n \geqq 18$ gültigen Abschätzungen

$$d_2 < 0, \quad 36n^3 < d_0 < 9n^4, \quad (13n^2)^2 < 4d_1 < (14n^2)^2$$

ergeben

$$z_1^- > 0, \quad z_0^- - z_1^- > n(6n+5), \quad z_0^+ - z_0^- > 12n^{3/2},$$

$$z_1^+ - z_0^+ > n(n+5), \quad z_1^+ < 15n^2.$$

2. Die Diskriminante von $c_2 = c_2(z)$ ist proportional zu

$$-19n^4 + 86n^3 + 2621n^2 + 192(28n + 15)$$

und ist negativ für $n \geqq 16$. Die Behauptungen über $c_0$, $c_1$ lassen sich aus den Vorzeichen der Faktoren von $z^2$, $z$, 1 ablesen ∎

Theorem 1: 1. *Wenn der auf alternierende p-Formen wirkende kanonische Laplacian isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit ist und wenn entweder* $(n, p)$ *der Tabelle*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 4, 5 | 6, 7 | 9, 10 | 11, 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| $p =$ | 0 | 2 | 3 | 3, 4 | 4 | 2, 4, 5 | 4, 5 | 1, 4, 5, 6 | 1, 2, 5, 5, 6 |

*entnommen wird oder* $n \geqq 18$ *und gleichzeitig*

$$f_0 :\equiv 90p^2(n-p)^2 - 30(n^2-n+1)\,p(n-p) + (5n^2-7n+6)\binom{n}{2} \geqq 0,$$

$$f_1 :\equiv 60p^2(n-p)^2 - 5(3n^2-2n+4)\,p(n-p) + (n-6)\binom{n}{3} < 0$$

*ist, dann ist* $(M, g)$ *selbst flach. Bei Beschränkung auf* $2p \leqq n$ *sind die Ungleichungen äquivalent zu*

$$\textit{entweder}\ p_1^- < p \leqq p_0^- \quad \textit{oder}\quad p_0^+ \leqq p < p_1^+,$$

*wo die* $p_i^\pm = p_i^\pm(n)$ *die eindeutigen Lösungen von*

$$f_i \equiv f_i(n, p) = 0, \quad 0 \leqq p_i^- < p_i^+ \leqq n/2 \quad (i = 0, 1)$$

*bezeichnen. Jedes der Intervalle* $]p_1^-, p_0^-]$, $]p_0^-, p_0^+[$, $[p_0^+, p_1^+[$ *enthält für* $n \geqq 18$ *natürliche Zahlen.*

2. *Wenn der auf symmetrische p-Formen wirkende kanonische Laplacian isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit ist und wenn entweder* $n \leqq 15$ *und* $p \geqq 2$ *oder* $n \geqq 16$ *und*

$$f :\equiv 60(n+1)\,p^2(n+p)^2 + 5(3n^3-5n^2-46n-60)\,p(n+p) - 4(n-6)\binom{n+3}{4} > 0$$

*ist, dann ist* $(M, g)$ *selbst flach. Die Ungleichung ist äquivalent zu* $p > p^+$, *wo* $p^+ = p^+(n)$ *die eindeutige positive Lösung von* $f \equiv f(n, p) = 0$ *bezeichnet.*

Beweis: 1. Wir haben die Proportionalitäten $c_0 \sim f_0$, $c_1 \sim -f_1$. Wenn $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ ist, so ist $U_2[M]$ eine positiv definite quadratische Form in der Krümmung und $U_2[M] = 0$ ergibt $Riem = 0$. Im Grenzfall $c_0 = 0$, $c_1 > 0$ ergibt $U_2[M] = 0$ nur konstante Krümmung. Aus dem Verschwinden der 1. Spektralinvarianten

$$U_1[M] \sim (1-6m) \int_M R d\,\mathrm{Vol}$$

erhalten wir dann zusätzlich $R = 0$. (Der Fall $c_0 = 0$, $6m = 1$ kann nicht auftreten.) Für $2p \leqq n$, $0 \leqq 4m \leqq n^2$ wird $m = p(n-p)$ eindeutig durch

$$2p = n - (n^2 - 4m)^{1/2}$$

aufgelöst und die Abschätzung für zwei Paare $(p', m')$, $(p'', m'')$

$$m' - m'' = (n - p' - p'')(p' - p'') \leqq n(p' - p'')$$

zeigt uns Monotonie. Deshalb wird aus der Anordnung der $z_i^\pm$ eine analoge Anordnung der $p_i^\pm$ $(i = 0, 1)$. Darüber hinaus erhalten wir:

$$p_0^+ - p_1^- > (6n+5)/60 > 1 \quad \text{für}\ n \geqq 18,$$

$$p_0^+ - p_0^- > \sqrt{n}/5 > 1 \quad \text{für}\ n \geqq 26,$$

$$p_1^+ - p_0^+ > (n+5)/60 > 1 \quad \text{für}\ n \geqq 56.$$

Die fehlenden Werte $18 \leqq n \leqq 25$ bzw. $18 \leqq n \leqq 55$ wurden ebenso wie die Behauptungen zur obigen Tabelle durch Computerrechnungen geliefert.

2. Wir haben $c_1 \sim f$. Die Beziehung $m = p(n + p)$ wird eindeutig durch

$$2p = (n^2 + 4m)^{1/2} - n$$

aufgelöst; folglich entspricht der Schranke $z^+ > 0$ eindeutig eine Schranke $p^+ > 0$. Der Bereich $n \leqq 15$, $p \geqq 2$ wurde wieder durch Computerrechnungen erfaßt ∎

Beispiel 1: *Paare $(n, p)$ aus der Tabelle für alternierende Formen*

| $n =$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p \in$ | [1, 3], [5, 7] | [1, 5], [8, 11] | [1, 7], [10, 15] | [1, 9], [12, 19] | [2, 19], [23, 38] | [3, 39], [45, 78] |

*bzw. für symmetrische Formen*

| $n =$ | 20 | 50 | 100 | 200 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p \geqq$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 11 |

*genügen der Voraussetzung von Theorem 1.*

Man kann die Schranken $p_i^{\pm}(n)$ bzw. $p^+(n)$ auf recht brauchbare Weise durch Linearkombinationen von $n$, $\sqrt{n}$, 1 ersetzen: Die Abschätzungen für alternierende Formen

$$n \geqq 18 \text{ und}$$

entweder

$$5(\sqrt{6} - \sqrt{\alpha_+})\, n - 0{,}92 \sqrt{6} \leqq 10 \sqrt{6} p \leqq 5(\sqrt{6} - \sqrt{2})\, n - 2(5n)^{1/2} - 4\sqrt{2}$$

oder

$$5(\sqrt{6} - \sqrt{2})\, n + 2(5n)^{1/2} - 4\sqrt{2} \leqq 10\sqrt{6} p \leqq 5(\sqrt{6} - \sqrt{\alpha_-})\, n - 3{,}01\sqrt{6}$$

mit

$$\sqrt{5}\, \alpha_{\pm} := 3\sqrt{5} \pm \sqrt{37}$$

bzw. für symmetrische Formen

$$n \geqq 16 \text{ und } 1590p \geqq 530\,(\sqrt{\alpha} - 1)\, n + 2(2 - 31\sqrt{5}\sqrt{53})/\sqrt{\alpha}$$

mit

$$30\alpha := 15 + \sqrt{5}\sqrt{53}$$

sind hinreichend für die Ungleichungen in Theorem 1 und sind die bestmöglichen Abschätzungen dieser Art bei dreistelliger Genauigkeit.

## § 2. Diophantische Probleme in der Spektralgeometrie

In der Spektralgeometrie geschlossener Mannigfaltigkeiten ist die Invariante $U_2[M]$ eine Linearkombination von $\|R\|^2$, $\|S\|^2$, $\|Weyl\|^2$, und die Faktoren sind hierbei jeweils proportional zu einem Polynom in $n$ und $p$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Das Verschwinden eines der drei Polynome führt auf ein diophantisches Problem und gibt dann Anlaß zu einem Vergleichssatz der Spektralgeometrie. Die in Rede stehenden Polynome sind für die beiden nichtkanonischen Laplaceoperatoren aus den Formeln (3.2), (4.20), (5.3) der Arbeit [I] abzulesen und wurden für den kanonischen Laplaceoperator gerade in § 1 berechnet.

Satz 2.1: *Es sei* $L = \Delta$ *oder* $L = \Delta - \dfrac{n-2}{4(n-1)} RI$. *Der Koeffizient von* $\|Weyl\|^2$ *in* $U_2[M]$ *verschwindet genau dann, wenn*
— *bei Tensorfeldern* $15p = n$ *ist;*
— *bei alternierenden Formen* $(n, p)$ *aus dem Wertebereich des Rekursionssystems*

$$n_k = 13n_{k-1} - n_{k-2} + 2, \qquad p_k = 13p_{k-1} - p_{k-2} + 1$$

*ist, mit* $k = 2, 3, 4, \ldots$ *und* $(n_0, p_0) = (0, 0)$, $(n_1, p_1) = (1, 1)$;
— *bei symmetrischen Formen* $(n, p)$ *aus dem Wertebereich des Rekursionssystems*

$$n_k = 287n_{k-1} - n_{k-2} + 30, \qquad p_k = 287p_{k-1} - p_{k-2} - 15$$

*ist, mit* $k = 2, 3, 4, \ldots$ *und* $(n_0, p_0) = (0, 0)$, $(n_1, p_1) = (15, 1)$;
— *bei spurfreien symmetrischen Formen* $(n, p)$ *aus dem Wertebereich des Rekursionssystems*

$$n_k = 271n_{k-1} + 255p_{k-1} - 495, \qquad p_k = 17n_{k-1} + 16p_{k-1} - 31$$

*ist, mit* $k = 2, 3, 4, \ldots$ *und*

$$(n_1, p_1) = (15, 1) \triangleq \textit{erste Familie von Lösungen},$$
$$(n_1, p_1) = (31, 2) \triangleq \textit{zweite Familie von Lösungen}.$$

Beweis: Bei Formen ist die diophantische Gleichung

$$15p(n + \varepsilon p) = n(n + \varepsilon)$$

zu lösen. Die lineare Transformation $N := (15 + 4\varepsilon)\, n + 2$, $P := n + 2\varepsilon p$ ergibt eine Gleichung vom Pellschen Typ $N^2 - 15(15 + 4\varepsilon)\, P^2 = 4$. Gemäß der in [2] dargelegten Theorie sind die Lösungen $(N, P)$ im Bereich der natürlichen Zahlen rekursiv gegeben durch

$$N_k = N_1 N_{k-1} - N_{k-2}, \qquad P_k = N_1 P_{k-1} - P_{k-2},$$
$$(N_0, P_0) = (2, 0), \qquad (N_1, P_1) = (15 + 2\varepsilon, 1).$$

Die Zusatzbedingung $N_k \equiv 2(-\varepsilon)^k \bmod (15 + 4\varepsilon)$ ist bei alternierenden Formen von selbst erfüllt, schließt aber bei symmetrischen Formen die ungeraden $k$ aus. Die elementare Theorie linearer Differenzengleichungen liefert dann ein neues Rekursionssystem für die $(N_k, P_k)$ mit geradem $k$. Bei der Rücktransformation auf $(n, p)$ entstehen dann keine weiteren Bedingungen mehr.

Bei spurfreien symmetrischen Formen ist ebenfalls die Theorie in [2] anwendbar:

$$15p(n + p - 2) = n(n - 1), \qquad N := 19n - 32, \qquad P := 19p - 3,$$
$$15(P^2 - PN) - N^2 = 19 \cdot 29,$$

$$N_k = 16N_{k-1} + 15P_{k-1}, \qquad P_k = N_{k-1} + P_{k-1}$$

$$(N_1, P_1) = (13,3) \triangleq \text{erste Familie}, \qquad (N_1, P_1) = (32,3) \triangleq \text{zweite Familie},$$

$$N_k \equiv (-1)^k 6 \quad \text{und} \quad P_k \equiv -(-1)^k 3 \bmod 19.$$

Daraus folgt, daß nur gerade $k$ zulässig sind ∎

Beispiel 2.1: *Die jeweils drei ersten Lösungen* $(n, p)$ *in Satz 2.1 sind*

| | | | |
|---|---|---|---|
| (15, 1), | (30, 2), | (45, 3) | *bei Tensorfeldern;* |
| (15, 1), | (196, 14), | (2535, 182) | *bei alternierenden Formen;* |
| (15, 1), | (4335, 272), | (1244160, 78048) | *bei symmetrischen Formen;* |
| (15, 1), | (31, 2), | (3825, 240) | *bei spurfreien symmetrischen Formen.* |

Satz 2.2: *Es sei* $L = \Delta$ *oder* $L = \Delta - \dfrac{n-2}{4(n-1)} RI$. *Der Koeffizient von* $\|S\|^2$ *in* $U_2[M]$ *verschwindet genau dann, wenn* $n = 6$, $p = 0$ *ist.*

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt $6 - n \geqq 0$; es sind also nur die Fälle $n = 4, 5, 6$ zu durchmustern ∎

Satz 2.3: *Es sei* $L = \Delta$. *Der Koeffizient von* $\|R\|^2$ *in* $U_2[M]$ *verschwindet*

— *bei Tensorfeldern genau dann, wenn*

$$n \equiv 0, 5, 8, 18, 20, 30, 33, 38, 45, 48, 50, 53 \bmod 60$$

*und* $60p = n(5n^2 - 7n + 6)$ *ist* ($p$ *ist dann ganzzahlig!*);

— *bei alternierenden Formen niemals;*

— *bei symmetrischen Formen und* $n \leqq 150$ *genau für* $(n, p) = (15, 57)$;

— *bei spurfreien symmetrischen Formen und* $n \leqq 150$ *genau für* $(n, p) = (33, 288)$.

Beweis: Bei Tensorfeldern erhalten wir die notwendigen und hinreichenden Kongruenzen

$$0 \equiv n^2(n-2) \bmod 3; \quad 0 \equiv n(n-1)(n-2) \bmod 4; \quad 0 \equiv 2n(n-3) \bmod 5.$$

Der Durchschnitt der Lösungsscharen ergibt die obigen Kongruenzen mod 60.

Bei alternierenden Formen ist $60p(n-p) = n(n-1)(5n^2 - 7n - 6)$ zu lösen. Einsetzen der für $n \geqq 4$ gültigen Ungleichung $12p(n-p) \leqq 3n^2 \leqq 4n(n-1)$ ergibt den Widerspruch $5n^2 - 7n + 6 \leqq 20$ für $n \geqq 4$. Bei symmetrischen und spurfreien symmetrischen Formen folgt das Ergebnis aus Computerrechnungen ∎

Satz 2.4: *Es sei* $L = \Delta - \dfrac{n-2}{4(n-1)} RI$. *Der Koeffizient von* $\|R\|^2$ *in* $U_2[M]$ *verschwindet genau dann, wenn*

— *bei Tensorfeldern* $(n, p) = (6, 0), (10, 6)$,

— *bei alternierenden Formen* $(n, p) = (6, 0), (8, 2)$,

— *bei symmetrischen Formen* $(n, p) = (6, 0)$ *ist.*

*Bei spurfreien symmetrischen Formen ist* $(n, p) = (6, 0)$ *eine Lösung.*

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt $n - 6 \geqq 0$, d. h. $n \geqq 6$. Bei Tensorfeldern haben wir

$$240(n-1)p = n(n-6)(5n^2 - 18n + 4) \equiv: \Phi(n)$$

zu studieren. Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist $\Phi(n) = \Phi(1) + \Phi'(1)(n - 1) + \cdots$ genau dann ohne Rest durch $n - 1$ teilbar, wenn $\Phi(1) = 45$ diese Eigenschaft hat. Also kommen $n = 6, 10, 16, 46$ in Frage. Ein zugehöriges $p$ gibt es aber nur für $n = 6, 10$.

Bei alternierenden Formen ist $240p(n - p) = n(n - 6)(5n^2 - 18n + 4)$ zu lösen. Einsetzen der für $n \geqq 9$ gültigen Ungleichung $4p(n - p) \leqq n^2 \leqq 3n(n - 6)$ ergibt den Widerspruch $5n^2 - 18n + 4 \leqq 180$ für $n \geqq 9$. Also kommen $n = 6, 7, 8$ in Frage. Für $n = 7$ gibt es aber kein zugehöriges $p$.

Bei symmetrischen Formen verläuft der Beweis analog zu dem bei Tensorfeldern ∎

In [I] wurden die Koeffizienten von $\|Weyl\|^2$, $\|S\|^2$, $\|R\|^2$ in $U_2[M]$ bis auf Proportionalität mit $b_2$, $b_1$, $b_0$ bezeichnet und es wurde gezeigt:

$$b_1 < b_2 < b_0 \text{ für } \Delta \text{ und für } \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI, \; n \geqq 7;$$

$$b_0 \leqq b_1 < b_2 \quad \text{für } \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI, \; n = 4, 5, 6.$$

Die einzige Situation, in der zwei Koeffizienten gleichzeitig verschwinden, ist

$$n = 6, \qquad p = 0, \qquad L = \Delta - \frac{1}{5} RI, \qquad b_0 = b_1 = 0.$$

Für den kanonischen Laplacian sind die diophantischen Probleme recht kompliziert und werden von uns nicht behandelt. Wir geben spezielle Ergebnisse an:

Beispiel 2.2: *Für den auf alternierende Formen wirkenden kanonischen Laplacian sind alle Lösungen von $b_i(n, p) = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, $n \leqq 20$, in der folgenden Tabelle enthalten; sie wurden auch bereits in* [5, 6] *gefunden. Die Tabelle enthält zusätzlich die Vorzeichen der restlichen (nichtverschwindenden) $b_i$:*

| $n$ | $p$ | sign $b_0$ | sign $b_1$ | sign $b_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | $-$ | $+$ | 0 |
| 8 | 2 | $+$ | $+$ | 0 |
| 6 | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| 15 | 1 | 0 | $+$ | $+$ |
| 15 | 2 | 0 | $+$ | $+$ |
| 16 | 2 | 0 | $+$ | $+$ |

*Für den auf symmetrische Formen wirkenden kanonischen Laplacian sind alle Lösungen von $b_i(n, p) = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, $n \leqq 20$, in der folgenden Tabelle enthalten;*

| $n$ | $p$ | sign $b_0$ | sign $b_1$ | sign $b_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| 15 | 1 | $+$ | $+$ | 0 |

Jetzt sind wir soweit, die zahlentheoretischen Egebnisse in Ergebnisse zur Spektralgeometrie umzusetzen.

Theorem 2.1: *Es liege eine Situation mit* $b_0 = 0$, $(n, p) \neq (6, 0)$ *vor entsprechend Satz 2.3, Satz 2.4 oder Beispiel 2.2.*

a) *Wenn dann der Laplacian isospektral zum entsprechenden Laplacian einer Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung ist, so hat* $(M, g)$ *selbst konstante Krümmung.*
b) *Wenn andrerseits der Laplacian isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit ist, so ist* $(M, g)$ *selbst flach.*

Beweis: a) Wir werten das Verschwinden der 2. Spektralinvarianten aus:

$$0 = U_2[M] \sim (n - 2)\, b_2\, \|Weyl\|^2 + 4b_1\, \|S\|^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{sign} b_2 = \operatorname{sign} b_1 \neq 0.$$

Das hat $Weyl = 0$, $S = 0$ und somit konstante Krümmung zur Folge.

b) Wie unter a) ergibt sich konstante Krümmung und daraus noch $R = \text{const}$. Zusätzlich werten wir das Verschwinden der 1. Spektralinvariante aus:

$$0 = U_1[M] \sim \int_M R d\,\mathrm{Vol} = R \cdot \mathrm{Vol}\,(M).$$

Also ist $R = 0$ ∎

Theorem 2.2: $(M, g)$ *habe verschwindende Skalarkrümmung oder sei eine Einstein-Mannigfaltigkeit. Weiter liege eine Situation mit* $b_2 = 0$ *vor entsprechend Satz 2.1 (siehe auch Beispiel 2.1) oder Beispiel 2.2. Wenn dann der Laplacian isospektral zum entsprechenden Laplacian einer Ricci-flachen Mannigfaltigkeit ist, so ist* $(M, g)$ *selbst Ricci-flach.*

Beweis: Wir schließen: entweder ist $(0 = U_2[M] \sim \|S\|^2 \Rightarrow S = 0)$ oder $(0 = U_2[M] \sim \|R\|^2 \Rightarrow R = 0)$ ∎

Abschließend in diesem Abschnitt sei bemerkt, daß die Auswertung von $b_1 = 0$ entsprechend Satz 2.2 bzw. Beispiel 2.2 kein neues Ergebnis liefert.

## § 3. Ergebnisse zum Huygensschen Prinzip

In diesem Abschnitt setzen wir $n = 6$ und lorentzsche Signatur von $g$ voraus. Wir können uns auf $p \geqq 1$ beschränken, da $p = 0$ bereits in [I] mit erfaßt wurde.

Theorem 3.1: *Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) $g = g' + g''$ *ist (lokal) zerlegbar in eine Metrik* $g'$ *der Dimension* $n' \geqq 2$ *und eine flache Metrik* $g''$;

(2) $|S'|^2$ *ist positiv definit für* $n' \geqq 3$,
$|Weyl'|^2$ *ist positiv definit für* $n' \geqq 4$;

(3) $\Delta' R' \leqq 0$ *oder* $M$ *wird von einer* $n''$*-parametrigen Schar geschlossener* $n'$*-dimensionaler Riemannscher Untermannigfaltigkeiten* $(M', g')$ *überdeckt;*

(4) $(p = 2$ *und* $n' \leqq 6)$ *oder* $(p = 3$ *und* $n' \leqq 4)$.

*Wenn dann der auf alternierende* $p$*-Formen wirkende kanonische Laplacian dem Huygensschen Prinzip genügt, so ist* $(M, g)$ *flach.*

Beweis: Durch eine Modifikation von in [I] durchgeführten Rechnungen erhalten wir: $Tr\, U_2$, die Spur des 2. Hadamardkoeffizienten, ist proportional zum Matrizenprodukt

$$(2, 2m, m(m - 5)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\Delta' R' \\ R'^2 \\ 2\,|Ric'|^2 \\ |Riem'|^2 \end{pmatrix}$$

mit $m = p(6 - p)$. Hier drücken wir $Ric'$, $Riem'$ durch $R'$, $S'$, $Weyl'$ aus, wobei eine Fallunterscheidung bezüglich $n'$ zu machen ist, und gehen die Stufen $p = 1, 2, 3$ durch ($p = 4, 5, 6$ brauchen auf Grund der Dualität nicht betrachtet zu werden). Unter der Voraussetzung (4) sind die Koeffizienten von $R'^2$, $|S'|^2$, $|Weyl'|^2$ in der Bedingung $Tr\ U_2 = 0$ positiv und der Koeffizient von $\Delta' R'$ ist negativ. Dagegen ist für $p = 1$ und alle $n'$ der quadratische Anteil von $Tr\ U_2$ indefinit. Haben wir die Behauptung des Satzes für ein bestimmtes $n'$ bestätigt, so gilt sie dann auch für alle kleineren $n'$ ∎

Es sei ausdrücklich darauf verwiesen, daß in Theorem 3.1 auch die uneigentliche Zerlegbarkeit $n' = 6$ zugelassen ist.

Theorem 3.2: *Es seien $|S|^2$, $|Weyl|^2$ positiv definit und $\Delta R \geqq 0$ oder $M$ geschlossen. Wenn dann der auf symmetrische p-Formen wirkende kanonische Laplacian für ein $p \geqq 2$ dem Huygensschen Prinzip genügt, so ist $(M, g)$ flach.*

Beweis: Theorem 1/2. nebst Beweis kann auf den in der Krümmung quadratischen Anteil in der Bedingung $Tr\ U_2 = 0$ umgedeutet werden; dieser ist für $n = 6$, $p \geqq 2$ positiv definit. Der Koeffizient von $\Delta R$ in $Tr\ U_2$ ist proportional zu $7 + 25m$ mit $m = p(6 + p)$ und damit stets positiv ∎

## LITERATUR


[I] Schimming, R.: Spektrale Geometrie und Huygenssches Prinzip für Tensorfelder und Differentialformen I. Z. f. Analysis u. Anw. **1** (1982) 2, 71–95.

[1] Günther, P.: Über die Darbouxsche Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten. Math. Nachr. **22** (1960), 285–321.

[2] Scholz, A., und B. Schoeneberg: Einführung in die Zahlentheorie (Sammlung Göschen Bd. **435**). Berlin 1961.

[3] Teumer, G.: Spektralgeometrie und Äquivalenzen Riemannscher Strukturen. DissertationA: Greifswald 1979.

[4] Тоймер, Г.: Спектр лапласиана и конформно плоские римановы многообразия. Изв. вуз. Математика 1982, 2, 87–88.

[5] Tsagas, G.: On the spectrum of the Laplacian on the 1-forms on a compact Riemannian manifold. Tensor **32** (1978), 140–144.

[6] Tsagas, G., and C. Kockinos: The geometry and the Laplace operator on the exterior 2-forms on a compact Riemannian manifold. Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979), 109–116.


Manuskripteingang: 10. 12. 1982

VERFASSER:

Dr. sc. nat. Rainer Schimming

Dr. rer. nat. Gunter Teumer
Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
DDR-2200 Greifswald, Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a