

## Zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ I<sup>1)</sup>

W. KLIESCH

Es werden zwei Formeln zur Berechnung des Abbildungsgrades einer stetigen Funktion  $\Phi$  für ein  $n$ -dimensionales Polyeder  $P^n$  angegeben, die auf einem gemeinsamen Konstruktionsprinzip beruhen.

Ist  $T$  eine Triangulation des Randes von  $P^n$  und  $f(e) = \text{sgn } \Phi(e)$ ,  $e \in E(T)$ , eine simpliziale Abbildung von  $T$  in eine Triangulation des Randes des  $n$ -dimensionalen Einheitswürfels, so gilt

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = k^{-1} \sum_{\sigma \in T_{n-1}} \text{sgn } d(\sigma, \Phi),$$

$$d(\sigma, \Phi) := \det (f(a^1) \dots f(a^n)), \quad \sigma = [a^1 \dots a^n],$$

falls  $T$  in geeigneter Weise orientiert ist.

Die zweite Formel verwendet eine simpliziale Abbildung von  $T$  in die natürliche Triangulation des Randes des  $n$ -dimensionalen Einheitsoktaeders.

Приводятся две формулы для вычисления степени отображения непрерывной функции  $\Phi$  для  $n$ -мерного многогранника  $P^n$ , которые получаются с помощью общего принципа конструкции.

Пусть  $T$  — триангуляция границы  $P^n$ , ориентированная подходящим образом, а  $f(e) = \text{sgn } \Phi(e)$ ,  $e \in E(T)$ , — симплициальное отображение  $T$  в триангуляцию границы  $n$ -мерного единичного куба. Тогда имеет место

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = k^{-1} \sum_{\sigma \in T_{n-1}} \text{sgn } d(\sigma, \Phi),$$

$$d(\sigma, \Phi) := \det (f(a^1) \dots f(a^n)), \quad \sigma = [a^1 \dots a^n].$$

Вторая формула использует симплициальное отображение  $T$  в естественную триангуляцию границы  $n$ -мерного единичного октаэдра.

Two formulas computing the topological degree of a continuous function  $\Phi$  relative to an  $n$ -dimensional polyhedron  $P^n$  are presented. Both formulas are based on the same idea of construction.

Let  $T$  be a triangulation of the boundary of  $P^n$  and let  $f(e) = \text{sgn } \Phi(e)$ ,  $e \in E(T)$ , be a simplicial mapping from  $T$  into a boundary triangulation of the  $n$ -dimensional unit cube, then the topological degree of the function  $\Phi$  relative to  $P^n$  is given by

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = k^{-1} \sum_{\sigma \in T_{n-1}} \text{sgn } d(\sigma, \Phi),$$

$$d(\sigma, \Phi) := \det (f(a^1) \dots f(a^n)), \quad \sigma = [a^1 \dots a^n],$$

if  $T$  is oriented in a suitable manner.

The second computation formula is based on a simplicial mapping from  $T$  into the natural boundary triangulation of the  $n$ -dimensional unit octahedron.

<sup>1)</sup> Der abschließende Teil II wird im folgenden Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

## 0. Einleitung

Der Abbildungsgrad ist seit langem ein wichtiges und wirkungsvolles Hilfsmittel für Existenzbeweise in der nichtlinearen Funktionalanalysis. Seine Axiomatisierung durch FÜHRER [5] und ZEIDLER [25] ermöglichte eine einheitliche Behandlung der verschiedenen Zugänge und ebnete den Weg für weitere Anwendungen.

In den letzten Jahren hat der Abbildungsgrad auch Eingang in die numerische Analysis gefunden, z. B. bei der Bestimmung von Bifurkationspunkten parameterabhängiger Gleichungssysteme und Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen (s. [13, 14, 17]).

Die Berechnung des Abbildungsgrades ist prinzipiell über den analytischen Zugang (Kroneckerintegral, Formel von HEINZ [8]; vgl. auch [25]) und den topologischen Zugang (Brouwersche Definition, Schnittzahl; s. [1, 3, 11]) möglich. Der analytische Zugang führt immer auf die numerische Auswertung von Integralen (vgl. [12]) und erlaubt nur eine isolierte Betrachtung des Abbildungsgrades. Der topologische Zugang ist aufwendiger und komplizierter als der analytische, aber er entspricht voll den Erfordernissen der simplizialen Methoden, die immer größere Bedeutung in der numerischen Analysis erlangen, und ermöglicht den Einsatz des Abbildungsgrades als „Hilfsgröße“ in simplizialen Algorithmen (s. [10, 13, 14, 17] und die in diesen Arbeiten angegebene Literatur). Die heute zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades am häufigsten verwendeten Formeln [9, 16, 21–23] kann man alle in die Rubrik „topologischer Zugang“ einordnen. Sie entstanden aus praktischen Erfordernissen (vgl. [6, 17]). So wurde zunächst auch das Hauptaugenmerk auf numerische und rechentechnische Aspekte gelegt und weniger auf theoretische Fragestellungen (Zusammenhang mit axiomatisch definiertem Abbildungsgrad u. ä.). Als ein erster Schritt in Richtung einer einheitlichen Behandlung der für die numerische Analysis wichtigen Darstellungen des Abbildungsgrades kann die Arbeit von PEITGEN und SIEGBERG [15] angesehen werden. Die Autoren zeigen für eine konstruktive Variante des Brouwerschen Abbildungsgrades, daß sie den Axiomen des Abbildungsgrades genügt. Allerdings lassen sich aus dieser Darstellung die gebräuchlichen Berechnungsformeln nicht herleiten.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die für die numerische Bestimmung des Abbildungsgrades wichtigen Formeln in die bestehende Theorie einzuordnen und weitere zu gewinnen. Ausgangspunkt der Überlegungen sind zwei Darstellungen des Abbildungsgrades, die auf einem gemeinsamen Konstruktionsprinzip beruhen, das im Abschnitt 3 ausführlich beschrieben wird. Ist  $\Phi$  eine auf dem  $n$ -dimensionalen Polyeder  $P^n$  des  $\mathbf{R}^n$  definierte stetige Funktion, die auf dem Rand von  $P^n$  keine Nullstellen besitzt, so läßt sich der Abbildungsgrad von  $\Phi$  bez. int  $P^n$  mit Hilfe der Formel

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = k^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}} \text{sgn } d(\sigma, \Phi); \quad (*)$$

$$d(\sigma, \Phi) := \det(\text{sgn } \Phi(a^1) \dots \text{sgn } \Phi(a^n)), \quad \sigma = [a^1 \dots a^n],$$

berechnen, falls die Randsimplexe  $\sigma$  einer Triangulation von  $P^n$  in geeigneter Weise orientiert und ihre Durchmesser hinreichend klein sind. Der Wert der Konstanten  $k$  ist bekannt. Im Abschnitt 4 wird gezeigt, daß die auf der rechten Seite von (\*) stehende Größe den Axiomen des Abbildungsgrades genügt. Die zweite Darstellung, die die gleiche Struktur wie die erste besitzt und sich von dieser nur in der Größe  $d(\sigma, \Phi)$  unterscheidet, wird im Abschnitt 5 betrachtet. Im Teil II dieser Arbeit werden aus den in diesem Teil behandelten Darstellungen des Abbildungsgrades eine Reihe bekannter sowie neuer Berechnungsformeln hergeleitet und Testergebnisse mitgeteilt.

Einen Abriss über die Geschichte des Abbildungsgrades unter besonderer Berücksichtigung des numerischen Aspektes findet man in [20]. Über die Axiomatisierung von Abbildungsgraden in allgemeineren Räumen kann man sich in [2] und [26] informieren.

## 1. Hilfsmittel der kombinatorischen Topologie

Über die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Sätze der kombinatorischen Topologie kann sich der Leser in den Büchern [19, 3] und [1] ausführlich informieren.

Ein durch die affin unabhängigen Punkte  $a^0, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$  aufgespanntes ( $k$ -) Simplex  $s$  wird durch  $s = \langle a^0, \dots, a^k \rangle$  und die Menge seiner Eckpunkte mit  $E(s)$  bezeichnet. Die Größe

$$\text{diam}(s) := \sup \{ \|x - y\| : x, y \in s \}$$

heißt *Durchmesser* von  $s$ . „ $s_0 \leq s$ “ bedeutet, daß  $s_0$  Seite von  $s$  ist. Für ein orientiertes Simplex  $\sigma$  wird die Schreibweise  $\sigma = [a^0 \dots a^k]$  verwendet, wobei die Orientierung durch die Reihenfolge der Eckpunkte  $a^0, \dots, a^k$  gegeben ist. Ist  $\pi$  eine Permutation auf  $\{0, \dots, k\}$ , so gilt

$$[a^0 \dots a^k] = \chi(\pi) [a^{\pi(0)} \dots a^{\pi(k)}]$$

( $\chi(\pi)$  — Charakter von  $\pi$ ).

Alle in dieser Arbeit auftretenden Komplexe werden als endlich, homogen  $n$ -dimensional und euklidisch vorausgesetzt. Bezeichnet  $\mathbf{K}$  einen solchen Komplex, so ist  $\mathbf{K}$  die Menge aller  $l$ -Simplexe aus  $\mathbf{K}$ ,  $|\mathbf{K}|$  das durch  $\mathbf{K}$  erzeugte  $n$ -dimensionale Polyeder,  $\text{Rd}(\mathbf{K})$  der Randkomplex von  $\mathbf{K}$  und  $E(\mathbf{K})$  die Vereinigung der Mengen  $E(s)$ ,  $s \in \mathbf{K}$ . Der *Feinheitsgrad einer Triangulation*  $\mathbf{K}$  des  $n$ -dimensionalen Polyeders  $|\mathbf{K}|$  ist durch  $\text{mesh}(\mathbf{K}) := \sup \{ \text{diam}(s) : s \in \mathbf{K} \}$  definiert. Wird ein Komplex  $\mathbf{K}$  mit einer Orientierung versehen, so wird der orientierte Komplex einfachheitshalber wieder mit  $\mathbf{K}$  bezeichnet.  $\varepsilon$  ist dann die zugehörige natürliche Berandungsfunktion.

**Definition:** Erfüllt jede reguläre Seite  $\tau$  eines orientierten Komplexes  $\mathbf{K}$  mit den beiden von  $\tau$  berandeten Simplexen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Gleichung  $\varepsilon(\tau, \sigma_1) + \varepsilon(\tau, \sigma_2) = 0$ , so heißt  $\mathbf{K}$  *kohärent orientiert*. Ist  $\mathbf{K}$  kohärent orientiert und unverzweigt, so nennt man  $\mathbf{K}$  *inzident-kohärent orientiert*, falls für alle Randsimplexe  $\tau$  von  $\mathbf{K}$  und die von ihnen berandeten  $n$ -Simplexe  $\sigma$  aus  $\mathbf{K}$  stets  $\varepsilon(\tau, \sigma) = 1$ ,  $|\tau| \leq |\sigma|$ , gilt.

Es gelten folgende einfach zu beweisende Lemmata.

**Lemma 1 [10]:** *Der Randkomplex einer inzident-kohärent orientierten Pseudomannigfaltigkeit ist kohärent orientiert.*

**Lemma 2 [10]:** *Sind die Grundsimplexe eines orientierten Komplexes  $\mathbf{K}$ ,  $|\mathbf{K}| \subseteq \mathbb{R}^n$ , alle gleichorientiert im  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $\mathbf{K}$  kohärent orientiert.*

$P^m$  sei ein  $m$ -dimensionales Polyeder im  $\mathbb{R}^m$ ,  $T$  eine Triangulation von  $P^m$ ,  $\psi: P^m \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m \geq n$ ) eine stetige Funktion und  $g := \psi|_{E(T)}$ . Jeder Punkt  $y \in s = \langle a^0, \dots, a^k \rangle$ ,  $s \in T$ , läßt sich mit Hilfe der Eckpunkte von  $s$  darstellen (baryzentrische Koordinaten):

$$y = \sum_{i=0}^k \lambda_i a^i \quad \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \text{ und } \lambda_i \geq 0, \quad i = 0(1)k \right).$$

Die Funktion  $g$  wird durch den Ansatz

$$\mathcal{A}_\psi^s(y) := \sum_{i=0}^m \lambda_i g(a^i), \quad s = \langle a^0, \dots, a^m \rangle,$$

zu einer stetigen Funktion  $\mathcal{A}_\psi$  mit  $\mathcal{A}_\psi|_s = \mathcal{A}_\psi^s$ ,  $s \in T_m$ , auf  $P^m$  fortgesetzt.  $\mathcal{A}_\psi$  bezeichnet man als *lineare Fortsetzung* von  $g$ .

**Definition:**  $0 \in \mathbf{R}^n$  heißt *regulär* für  $\mathcal{A}_\psi$ , falls  $\mathcal{A}_\psi^{-1}(0) \cap s = \emptyset$  für alle  $s \in T_{n-1}$  gilt. Ein  $n$ -Simplex  $s \in T$  wird als *regulär* für  $\mathcal{A}_\psi$  bezeichnet, falls  $0 \in \mathcal{A}_\psi(s)$  und  $0$  regulär für  $\mathcal{A}_\psi|_s$  ist.

Der folgende Satz ermöglicht eine Abschwächung des soeben eingeführten Regularitätsbegriffs.

**Satz 1 [15]:** Für jede stetige Funktion  $\psi$  und jede Triangulation  $T$  existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß für alle  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ )

- (i)  $0 \in \mathbf{R}^n$  regulär für  $\mathcal{A}_\psi - \bar{\varepsilon}$  ( $\bar{\varepsilon} := (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)^T$ ) und
- (ii) ein  $n$ -Simplex  $s \in T$  regulär für  $\mathcal{A}_\psi - \bar{\varepsilon}$  ist, falls  $s$  regulär für  $\mathcal{A}_\psi - c$  ( $0 < c < \varepsilon_0$ ) ist.

**Definition:** Ein  $n$ -Simplex  $s \in T$  heißt  $\bar{\varepsilon}$ -regulär für  $\mathcal{A}_\psi$ , falls ein  $\varepsilon_0 > 0$  existiert, so daß  $s$  für jedes  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ) regulär für  $\mathcal{A}_\psi - \bar{\varepsilon}$  ist.

**Definition:** Gilt  $\psi : P^n \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , und ist das orientierte  $n$ -Simplex  $\sigma = [a^0 \dots a^n]$   $\bar{\varepsilon}$ -regulär für  $\mathcal{A}_\psi$ , so wird die Größe

$$\text{or}(\sigma) = \text{or}(\sigma; g) := \text{sgn det} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a^0 & \dots & a^n \end{pmatrix} \text{sgn det} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g(a^0) & \dots & g(a^n) \end{pmatrix}$$

als *Orientierungszahl* von  $\sigma$  bezeichnet.

**Satz 2 [15]:**  $\mathcal{H} : P^{n+1} \subseteq \mathbf{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\bar{a} = (a, t) \rightarrow y$ , sei eine stetige Funktion mit  $\mathcal{H}(\cdot, 0) = \Phi_0$  und  $\mathcal{H}(\cdot, 1) = \Phi_1$  ( $\Phi_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $i = 0, 1$ ). Die orientierten  $n$ -Simplexe  $\tau_0, \tau_1 \in \text{Rd}(T)$  seien durch einen  $(n+1)$ -dimensionalen Weg verbunden und  $\bar{\varepsilon}$ -regulär für die lineare Fortsetzung von  $h := \mathcal{H}|_{\mathbf{E}(T)}$ . Sind  $|\tau_0|, |\tau_1|$  in  $\mathbf{R}^n \times \{0\} \cup \mathbf{R}^n \times \{1\}$  enthalten, so gilt:

- (i)  $\text{or}(\tau_0'; \mathbf{f}_i) + \text{or}(\tau_1'; \mathbf{f}_i) = 0$ , falls  $|\tau_0|, |\tau_1| \subseteq \mathbf{R}^n \times \{i\}$  ist,
- (ii)  $\text{or}(\tau_0'; \mathbf{f}_0) = \text{or}(\tau_1'; \mathbf{f}_1)$ , falls  $|\tau_0| \subseteq \mathbf{R}^n \times \{0\}$  und  $|\tau_1| \subseteq \mathbf{R}^n \times \{1\}$  ist ( $\tau' = [a^0 \dots a^n]$  für  $\tau = [\bar{a}^0 \dots \bar{a}^n]$  und  $\mathbf{f}_i = h(\cdot, i)$ ,  $i = 0, 1$ ).

**Definition:** Es sei  $N_0 = \{0, \dots, n\}$ . Ist  $M$  eine  $n$ -Pseudomannigfaltigkeit, so heißt eine Abbildung  $l : \mathbf{E}(M) \rightarrow N_0$  *Bewertung* auf  $M$ . Erfüllt ein Simplex  $s = \langle a^0, \dots, a^k \rangle \in M$  die Beziehung  $\{l(a^0), \dots, l(a^k)\} = N_0 \setminus \{j\}$ ,  $j \in N_0$ , so nennt man  $s$  *vollständig* ( $j$ -fast vollständig) *bewertet* oder kurz *cl-Simplex* ( $j$ -cl-Simplex).

Der folgende Satz ist eine orientierte Variante des bekannten Sperrerschen Lemmas.

**Satz 3 [16]:**  $T$  sei eine Triangulation des Simplexes  $s = \langle a^0, \dots, a^n \rangle$  und  $l$  eine Bewertung mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $l(a^k) = k$ ,  $k = 0(1)n$ ;
- (ii) Ist  $b \in \mathbf{E}(T)$  in der Seite  $s_k = \langle a^i, \dots, a^i \rangle$  ( $0 < k \leq n$ ) von  $s$  enthalten, so gilt  $l(b) \in \{l(a^{i_0}), \dots, l(a^{i_k})\}$ .

Dann ist

$$\operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a^0 & \dots & a^n \end{pmatrix} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ b^0 & \dots & b^n \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathfrak{R} = \{\sigma = [b^0 \dots b^n] : |\sigma| \in \mathbb{T}; l(b^k) = k, k = 0(1)n\}.$$

## 2. Definition des Abbildungsgrades

$J^n$  bezeichne die Klasse aller offenen, beschränkten und nichtleeren Teilmengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\Omega}$  den Abschluß und  $\mathfrak{b}(\Omega)$  den Rand von  $\Omega$ . Für  $\Omega \in J^n$  sei

$$D(\bar{\Omega}) = \{\Phi \in C(\bar{\Omega}) : \Phi(\mathfrak{b}(\bar{\Omega})) \cap \{0\} = \emptyset\},$$

wobei  $C(\bar{\Omega})$  wie üblich die Klasse aller stetigen Funktionen  $\Phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezeichnet.  $\Gamma$  sei die Menge der ganzen Zahlen.

Definition: Eine Familie  $\operatorname{deg} = (\operatorname{deg}(\cdot, \Omega))$ ,  $\Omega \in J^n$ , von Abbildungen

$$\operatorname{deg}(\cdot, \Omega) : D(\bar{\Omega}) \rightarrow \Gamma$$

heißt *Abbildungsgrad*, wenn für jedes  $\Omega \in J^n$  die folgenden Axiome erfüllt sind:

$A_1$ : Aus  $\Phi \in D(\bar{\Omega})$  und  $\Phi^{-1}(0) = \emptyset$  folgt  $\operatorname{deg}(\Phi, \Omega) = 0$ .

$A_2$ : Für  $\Phi(x) = x - p$  ( $p \in \Omega$ ) ist  $\operatorname{deg}(\Phi, \Omega) = 1$ .

$A_3$ : Zerfällt  $\Omega$  in der Form  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m \bar{\Omega}_i$  mit paarweise disjunkten  $\Omega_i \in J^n$ , und ist  $\Phi \in D(\bar{\Omega}_i)$  für  $i = 1(1)m$ , so gilt

$$\operatorname{deg}(\Phi, \Omega) = \sum_{i=1}^m \operatorname{deg}(\Phi, \Omega_i).$$

$A_4$ : Sind die Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2 \in D(\bar{\Omega})$  auf  $\mathfrak{b}(\bar{\Omega})$  homotop, so gilt

$$\operatorname{deg}(\Phi_1, \Omega) = \operatorname{deg}(\Phi_2, \Omega).$$

Theorem 1 [25: S. 270]: *Es existiert genau ein Abbildungsgrad, der den Axiomen  $A_1, \dots, A_4$  genügt.*

## 3. Das Standardkörper-Prinzip

$P$  und  $Q$  seien  $n$ -dimensionale Polyeder im  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{L}$  Triangulationen von  $P$  bzw.  $Q$ . Das Polyeder  $Q$  sei außerdem konvex. Nach bekannten Sätzen der Topologie ist  $\mathbf{L}$  eine Pseudomannigfaltigkeit und der Randkomplex  $\operatorname{Rd}(\mathbf{L})$  von  $\mathbf{L}$  eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit. Versieht man  $\operatorname{Rd}(\mathbf{L})$  mit einer kohärenten Orientierung (das ist im vorliegenden Fall stets möglich), so ist  $z = \sum_{i=1}^m \delta_i$  ein Zyklus auf

$\operatorname{Rd}(\mathbf{L})$ , falls  $\delta_1, \dots, \delta_m$  sämtliche  $(n-1)$ -Simplexe von  $\operatorname{Rd}(\mathbf{L})$  sind. Der Komplex  $\mathbf{K}$  ist offensichtlich homogen  $n$ -dimensional und unverzweigt. Er sei nun so orientiert, daß alle seine Grundsimplexe im  $\mathbb{R}^n$  gleichorientiert sind und daß jedes Grundsimplex, das von einem Randsimplex berandet wird, mit diesem gleichsinnig orientiert ist.  $\mathbf{K}$  ist somit inzident-kohärent orientiert (s. Lemma 2). Bezeichnen  $\tau_1, \dots, \tau_k$  sämtliche Grundsimplexe und  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  sämtliche Randsimplexe von  $\mathbf{K}$ , so ist

$c = \sum_{i=1}^k \tau_i$  eine Kette auf  $\mathbf{K}$ , für deren Rand  $\partial c = \sum_{i=1}^l \sigma_i$  gilt. Ist nun  $f$  eine simpliziale

Abbildung von  $\text{Rd}(\mathbf{K})$  in  $\text{Rd}(\mathbf{L})$  und  $F$  die durch  $f$  induzierte Kettenabbildung von  $C_{n-1}(\text{Rd}(\mathbf{K}))$  in  $C_{n-1}(\text{Rd}(\mathbf{L}))$ , so ist bekanntlich  $F(\partial c)$  ein Zyklus auf  $\text{Rd}(\mathbf{L})$ . Da  $Q$  als konvex vorausgesetzt wurde, ist  $\text{Rd}(\mathbf{L})$  monozyklisch. Folglich gilt  $F(\partial c) = \gamma \hat{z}$ ,  $\gamma \in I$ . Die Zahl  $\gamma$  wird in der Homologietheorie als *Abbildungsgrad* der simplizialen Abbildung  $f$  bezeichnet (vgl. [19]). Ist die Triangulation  $\mathbf{L}$  explizit bekannt, so kann man den Abbildungsgrad von  $f$  bestimmen, indem untersucht wird, wie oft ein  $(n-1)$ -Simplex  $\delta \in \text{Rd}(\mathbf{L})$  unter Beachtung seiner Orientierung in der Kette  $F(\partial c)$  enthalten ist.

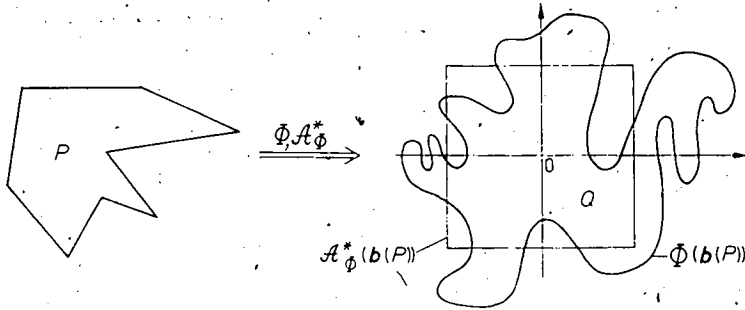


Abb. 1

Mit Hilfe dieses Abbildungsgrades für simpliziale Abbildungen läßt sich ein Abbildungsgrad für stetige Funktionen  $\Phi : P \rightarrow \mathbf{R}^n$  definieren, der den Axiomen des Abbildungsgrades im  $\mathbf{R}^n$  genügt. Hierzu wird zunächst eine stetige, stückweise lineare Funktion  $\mathcal{A}_\Phi^* : P \rightarrow Q$  konstruiert, die auf dem Rand von  $P$  zu  $\Phi$  homotop ist und deren Einschränkung  $\mathcal{A}_\Phi^*|_{\mathbf{E}(\mathbf{K})}$  eine simpliziale Abbildung von  $\mathbf{K}$  in  $\mathbf{L}$  ist. Um diese Bedingungen erfüllen zu können, muß gegebenenfalls die Triangulation  $\mathbf{K}$  durch eine Verfeinerung ersetzt werden. Da nun Funktionen, die auf dem Rand eines Gebietes homotop sind, den gleichen Abbildungsgrad besitzen, genügt es also zur Bestimmung des Abbildungsgrades von  $\Phi$ , den Abbildungsgrad für  $\mathcal{A}_\Phi^*$  zu berechnen, der mit Hilfe der durch die simpliziale Abbildung  $\mathcal{A}_\Phi^*|_{\mathbf{E}(\mathbf{K})}$  bestimmten Kettenabbildung nach dem oben beschriebenen Prinzip berechnet werden kann. Entscheidend für die numerische Berechenbarkeit des Abbildungsgrades einer stetigen Funktion  $\Phi : P \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  ist also deren Ersetzung durch eine Polyederabbildung  $\mathcal{A}_\Phi^* : P \rightarrow Q$ , deren Wertebereich explizit bekannt ist (s. Abb. 1).

Im folgenden wird für das Polyeder  $Q$  einmal der  $n$ -dimensionale Einheitswürfel (Kubusdarstellung) und zum anderen das  $n$ -dimensionale Einheitsoktaeder (Oktaederdarstellung) verwendet. Während für das Einheitsoktaeder auf natürliche Weise eine Triangulation gegeben ist, muß man sich für den Einheitswürfel erst eine geeignete Triangulation beschaffen.

#### 4. Die Kubusdarstellung

Es sei

$P^n \subseteq \mathbf{R}^n$  ein  $n$ -dimensionales Polyeder ( $n > 1$ ),

$\mathbf{M}$  eine Triangulation von  $P^n$ ,

$\mathbf{T} = \text{Rd}(\mathbf{M})$  und  $|\text{Rd}(\mathbf{M})| = \mathbf{b}(|\mathbf{M}|)$ ,

$W^n := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$  der  $n$ -dimensionale Einheitswürfel des  $\mathbf{R}^n$ ,

$K$  eine Triangulation von  $W^n$ ,

$L = \text{Rd}(K)$ ,

$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : P^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion aus  $D(P^n)$ , mit  $P^n \in J^n$ ,

$\text{sgn } y := (\text{sgn } y_1, \dots, \text{sgn } y_n)^T$  für  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ .

Ein orientiertes Simplex  $\sigma = [a^0 \dots a^n]$  im  $\mathbb{R}^n$  wird *positiv orientiert* genannt, wenn  $\det(a^1 - a^0, a^2 - a^0, \dots, a^n - a^0) > 0$  gilt.

Definition: Der Rand von  $P^n$  heißt  $\alpha_0$ -*fein zerlegt* bez. der Funktion  $\Phi$ , wenn eine Triangulation  $T$  von  $\mathbf{b}(P^n)$  existiert, die der folgenden Bedingung genügt:

$B_0$ : Für jedes Grundsimplex  $s \in T$  existiert ein Index  $i_s$  mit  $\text{sgn } \varphi_{i_s}(x) = \text{const} \neq 0$   
 $\forall x \in s$ .

$T$  wird dann als  $\alpha_0$ -*Triangulation* von  $\mathbf{b}(P^n)$  bez.  $\Phi$  bezeichnet.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von  $\alpha_0$ -Triangulationen erhält man aus einem in [23] angegebenen Satz.

Lemma 3: Jede *simpliciale Unterteilung einer  $\alpha_0$ -Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  bez. einer Funktion  $\Phi$  ist wieder eine  $\alpha_0$ -Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  bez.  $\Phi$ .*

Definition: Eine  $\alpha_0$ -Triangulation  $T$  von  $\mathbf{b}(P^n)$  heißt *L-zulässig* für  $\Phi$ , wenn die Abbildung  $f(e) = \text{sgn } \Phi(e)$ ,  $e \in E(T)$ , eine *simpliciale Abbildung* von  $T$  in  $L$  ist.

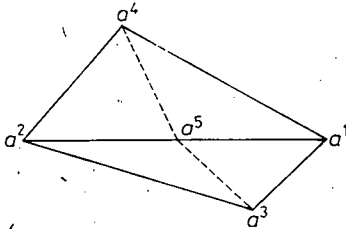


Abb. 2

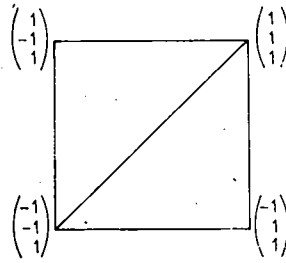


Abb. 3

Eine *simpliciale Unterteilung einer L-zulässigen Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  für  $\Phi$  ist nicht notwendig wieder eine L-zulässige Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  für  $\Phi$ , wie das folgende Beispiel zeigt. Zwei 2-Simplexe einer L-zulässigen Triangulation des Randes eines 3-dimensionalen Polyeders mögen — wie in Abb. 2 dargestellt — unterteilt sein, wobei*

$$\text{sgn } \varphi_1(a^i) = (-1)^{i+1} \text{ für } i = 1, 5,$$

$$\text{sgn } \varphi_2(a^i) = -1 \text{ für } i = 2, 3, 5,$$

$$\text{sgn } \varphi_2(a^i) = 1 \text{ für } i = 1, 4$$

und

$$\text{sgn } \varphi_3(a^i) = 1 \text{ für } i = 1(1)5$$

gilt.  $L$  sei eine Triangulation des Randes von  $W^3$ , wobei der relevante Teil von  $\mathbf{b}(W^3)$  entsprechend Abb. 3 trianguliert sei.

Während die Simplexe  $\langle f(a^1), f(a^2), f(a^3) \rangle$  und  $\langle f(a^1), f(a^2), f(a^4) \rangle$  zu  $L$  gehören, sind die Simplexe  $\langle f(a^1), f(a^4), f(a^5) \rangle$  und  $\langle f(a^2), f(a^4), f(a^5) \rangle$  keine Elemente von  $L$ .

Definition: Ist  $\mathbf{M}$  ein homogen  $n$ -dimensionaler Komplex, so werden dessen Teilkomplexe  $\mathbf{M}^i$ ,  $i = 1(1)l$ , als *Zerlegung* von  $\mathbf{M}$  bezeichnet, wenn

- (i) jedes  $\mathbf{M}^i$  homogen  $n$ -dimensional ist,
- (ii)  $\mathbf{M} = \bigcup_{i=1}^l \mathbf{M}^i$  gilt und
- (iii)  $\dim(\mathbf{M}^i \cap \mathbf{M}^j) \leq n - 1$  für  $i \neq j$  ist.

Definition: Ein orientierter homogen  $n$ -dimensionaler Komplex  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *kanonisch* orientiert, falls

- (i)  $\mathbf{Q}$  inzident-kohärent orientiert ist und
- (ii) alle Grundsimplexe von  $\mathbf{Q}$  im  $\mathbb{R}^n$  positiv orientiert sind.

Mit  $D_L(P^n, \mathbf{T})$  wird die Menge aller Funktionen aus  $D(P^n)$  bezeichnet, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\mathbf{T}$  ist eine  $L$ -zulässige Triangulation von  $b(P^n)$ .
- (ii) Ist  $\mathbf{M}$  eine Triangulation von  $P^n$  mit  $\text{Rd}(\mathbf{M}) = \mathbf{T}$  und bilden deren Teilkomplexe  $\mathbf{M}^i$ ,  $i = 1(1)l$ , eine Zerlegung von  $\mathbf{M}$ , so sind die Randkomplexe  $\text{Rd}(\mathbf{M}^i)$   $L$ -zulässige Triangulationen von  $b(|\mathbf{M}^i|)$ .

Theorem 2: Sind die Triangulationen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  von  $P^n$  bzw.  $W_1^n$  kanonisch orientiert, und enthält  $\mathbf{K}$  genau  $k$  Randsimplexe, so gilt für jede Funktion  $\Phi \in D_L(P^n, \mathbf{T})$

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = k^{-1} \sum_{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1}} \text{sgn } d(\sigma, \Phi), \quad (1)$$

$$d(\sigma, \Phi) = \det(\text{sgn } \Phi(a^1) \dots \text{sgn } \Phi(a^n)), \quad \sigma = [a^1 \dots a^n].$$

Beweis: Wie bereits im Abschnitt 2 festgestellt wurde, ist  $\mathbf{K}$  eine Pseudomannigfaltigkeit und  $\text{Rd}(\mathbf{K})$  eine geschlossene  $(n - 1)$ -Pseudomannigfaltigkeit. Auf Grund der Lemmata 1 und 2 ist  $\mathbf{K}$  inzident-kohärent und  $\text{Rd}(\mathbf{K})$  kohärent orientiert.

Bezeichnen  $\delta_1, \dots, \delta_k$  sämtliche Grundsimplexe von  $L$ , so ist  $\hat{z} = \sum_{i=1}^k \delta_i$  ein Zyklus auf  $L$ .

$\mathbf{M}$  ist ein unverzweigter homogen  $n$ -dimensionaler Komplex. Sind  $\tau_1, \dots, \tau_l$  sämtliche Grundsimplexe und  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sämtliche Randsimplexe von  $\mathbf{M}$ , so gilt

$$\partial c = \sum_{j=1}^m \sigma_j, \quad c = \sum_{i=1}^l \tau_i,$$

wie sofort aus den nachfolgenden Überlegungen ersichtlich wird. Ist  $\tau = [a^0 \dots a^n]$  und  $\sigma = [a^1 \dots a^n]$  eine Seite von  $\tau$ , so folgt aus den Darstellungen

$$\tau = [a^0 \dots a^n] = (-1)^j [a^i a^0 \dots \hat{a}^j \dots a^n], \quad \tau = \varepsilon(\sigma, \tau) [a^i a^1 \dots a^n]$$

die Gleichung  $(-1)^j [a^0 \dots \hat{a}^j \dots a^n] = \varepsilon(\sigma, \tau) \sigma$ . Da  $\mathbf{M}$  inzident-kohärent orientiert ist, folgt

$$z = \partial c = \partial \left( \sum_{j=1}^l \tau_j \right) = \sum_{j=1}^l \partial \tau_j = \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma \leq \tau_j} \varepsilon(\sigma, \tau_j) \sigma = \sum_{j=1}^m \sigma_j.$$

Die Kette  $z$  ist ein  $(n - 1)$ -Rand auf  $\mathbf{M}$  und somit ein Zyklus. Folglich ist  $z$  auch ein Zyklus auf  $\mathbf{T}$ .

Die Abbildung  $f(e) = \text{sgn } \Phi(e)$ ,  $e \in \mathbf{E}(\mathbf{T})$ , ist nach Voraussetzung eine simpliziale Abbildung von  $\mathbf{T}$  in  $L$ . Für die durch  $f$  induzierte Kettenabbildung  $F: C_{n-1}(\mathbf{T}) \rightarrow C_{n-1}(L)$  gilt

$$F(z) = \sum_{j=1}^m F(\sigma_j) = \gamma \sum_{j=1}^k \delta_j = \gamma \hat{z}, \quad \gamma \in \Gamma. \quad (2)$$



Man definiert für  $j = 1(1)k$

$$S_j^\pm := \{\sigma \in T_{n-1} : F(\sigma) = \pm \delta_j\}, \quad \mu_j^\pm := \text{card } S_j^\pm$$

und erhält aus (2)

$$\gamma = \mu_j^+ - \mu_j^-, \quad j = 1(1)k. \quad (3)$$

$\delta$  sei ein beliebiges  $(n-1)$ -Simplex aus  $\mathbf{L}$  und  $\hat{\tau} = [a^0 \dots a^n]$  jenes Simplex aus  $\mathbf{K}$ , das von  $\delta$  berandet wird. Es kann angenommen werden, daß  $a^0$  kein Eckpunkt von  $\delta$  ist. Da nach Voraussetzung  $\varepsilon(\delta, \hat{\tau}) = 1$  ist, gilt somit  $\delta = [a^1 \dots a^n]$ .

Ist  $x$  ein beliebiger Punkt des  $\mathbf{R}^n$  und

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & a^1 & \dots & a^n \end{pmatrix},$$

so erhält man durch Entwicklung der Determinante von  $A_x$  nach der ersten Spalte die Gleichung

$$\det A_x = \det(a^1 \dots a^n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i \det A_x^i,$$

wobei  $A_x^i$  die Matrix bezeichnet, die durch Streichen der ersten Spalte und  $(i+1)$ -ten Zeile von  $A_x$  entsteht.  $\det A_x$  ist genau dann Null, wenn  $x$  in der durch die Eckpunkte von  $|\delta|$  aufgespannten Hyperebene  $\mathbf{E}$  des  $\mathbf{R}^n$  liegt. Liegen die Punkte  $x, y \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{E}$  im gleichen Halbraum bez.  $\mathbf{E}$ , so folgt aus der Definition des Halbraumes  $\text{sgn } \det A_x = \text{sgn } \det A_y$ . Die Punkte  $y = \mathbf{0}$  und  $x = a^0$  sind beide innere

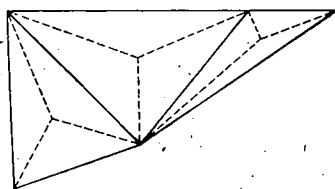


Abb. 4

Punkte von  $W^n$  und liegen wegen der Konvexität von  $W^n$  im gleichen Halbraum bez.  $\mathbf{E}$ . Für  $\delta$  erhält man nun  $\det(a^1 \dots a^n) = \det A_0$  und  $\det A_{a^0} > 0$ , da  $\hat{\tau}$  nach Voraussetzung im  $\mathbf{R}^n$  positiv orientiert ist. Die folgenden Gleichungen sind damit klar:

$$\mu_j^\pm = \pm \sum_{\sigma \in S_j^\pm} \text{sgn } d(\sigma, \Phi), \quad j = 1(1)k.$$

$d(\sigma, \Phi)$  ist genau dann Null, wenn  $f$  auf  $|\sigma|$  ausgeartet ist. Da die Mengen  $S_j^\pm$  paarweise disjunkt sind, ergibt sich aus (3)

$$k\gamma = \sum_{j=1}^k (\mu_j^+ - \mu_j^-) = \sum_{j=1}^k \sum_{\sigma \in S_j} \text{sgn } d(\sigma, \Phi) = \sum_{i=1}^m \text{sgn } d(\sigma_i, \Phi),$$

$S_j = S_j^+ \cup S_j^-$ , womit der Nachweis der Ganzzahligkeit von (1) erbracht ist:

Zur Vereinfachung späterer Überlegungen möge der Komplex  $\mathbf{M}$  folgender Bedingung genügen:

Ist  $s_0 = \langle a^1, \dots, a^n \rangle$  ein Randsimplex von  $\mathbf{M}$  und  $s = \langle a^0, a^1, \dots, a^n \rangle$  das von  $s_0$  berandete Grundsimplex, so sei  $a^0$  innerer Punkt von  $P^n$ .

Durch einfache baryzentrische Unterteilung (vgl. [3] oder [7]) sämtlicher Grundsimplexe von  $\mathbf{M}$  kann diese Bedingung immer erfüllt werden (s. Abb. 4). Der Randkomplex  $\mathbf{T}$  wird dabei nicht verändert!

Es sei

$$f^*(e) := \begin{cases} \operatorname{sgn} \Phi(e), & \text{falls } e \in E(\operatorname{Rd}(\mathbf{M})) \\ q & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $q \neq 0$  ein beliebiger innerer Punkt von  $W^n$  ist. Die Abbildung  $f^*$  ist eine simpliziale Abbildung von  $\mathbf{M}$  in die Zentralunterteilung  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}, q)$  (vgl. [19: S. 328 ff.]).  $\mathcal{A}_\phi^*$  sei die lineare Fortsetzung von  $f$ . Offensichtlich gilt  $f^*|_{E(\operatorname{Rd}(\mathbf{M}))} = f$ , so daß  $\mathcal{A}_\phi := \mathcal{A}_\phi^*|_{\mathbf{h}(P^n)}$  die lineare Fortsetzung von  $f$  ist. Die Funktionen  $\Phi$  und  $\mathcal{A}_\phi^*$  sind auf  $\mathbf{h}(P^n)$  homotop, denn für die Abbildung

$$\mathcal{H}(y, t) = t\Phi(y) + (1 - t)\mathcal{A}_\phi^*(y), \quad (y, t) \in P^n \times [0, 1],$$

gilt  $\mathcal{H}(y, t) \neq 0$  für alle  $(y, t) \in \mathbf{h}(P^n) \times [0, 1]$ , da es nach Voraussetzung zu jedem  $(n - 1)$ -Simplex  $s = \langle a^1, \dots, a^n \rangle \in \mathbf{T}$  eine Koordinatenfunktion  $\varphi_j$  gibt mit  $\operatorname{sgn} \varphi_j(y) = \operatorname{const} \neq 0$  für alle  $y \in s$ , so daß

$$t\varphi_j(y) + (1 - t) \sum_{i=1}^n \lambda_i \operatorname{sgn} \varphi_j(a^i) \neq 0 \quad \forall y \in s \quad \forall t \in [0, 1]$$

ist. Aus dem Axiom  $A_4$  folgt  $\operatorname{deg}(\Phi, \operatorname{int} P^n) = \operatorname{deg}(\mathcal{A}_\phi^*, \operatorname{int} P^n)$ . Somit genügt es zum Beweis des Theorems zu zeigen, daß die durch (2) definierte Abbildung  $\gamma(\cdot, P^n) := \gamma$  für die Funktionen  $\mathcal{A}_\phi^*, \Phi \in \mathbf{D}_L(P^n, \mathbf{T})$ , die Axiome  $A_1, \dots, A_4$  erfüllt.

Zu  $A_1$ : Es wird die Negation von  $A_1$  bewiesen.

Ist  $\gamma(\mathcal{A}_\phi^*, P^n) \neq 0$ , so besteht wegen (2) die Beziehung

$$\mathcal{A}_\phi^*(\mathbf{h}(P^n)) = \mathbf{h}(W^n). \tag{4}$$

Es gilt sogar  $\mathcal{A}_\phi^*(P^n) = W^n$ . Die Relation  $\mathcal{A}_\phi^*(P^n) \subseteq W^n$  ist auf Grund der Konstruktion von  $\mathcal{A}_\phi^*$  sofort klar. Angenommen, es gilt  $\mathcal{A}_\phi^*(P^n) \neq W^n$ . Dann gibt es ein  $n$ -Simplex  $\hat{s}$  aus der Zentralunterteilung  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}, q)$  mit  $\{s \in \mathbf{M}_n : \mathcal{A}_\phi^*(s) = \hat{s}\} = \emptyset$ .  $\hat{s}$  besitzt eine  $(n - 1)$ -Seite  $\hat{s}_0 \in \mathbf{L}$ . Wegen (4) gibt es mindestens ein  $(n - 1)$ -Simplex  $s_0 \in \mathbf{T}$  mit  $\mathcal{A}_\phi^*(s_0) = \hat{s}_0$ . Der Komplex  $\mathbf{M}$  ist homogen  $n$ -dimensional, also ist  $s_0$  Seite eines  $n$ -Simplexes  $s = \langle a^0, \dots, a^n \rangle$ .  $f^*$  muß nun auf  $s$  ausgeartet sein, da anderenfalls  $\mathcal{A}_\phi^*(s) = \hat{s}$  gilt, was obiger Annahme widerspricht. Andererseits sind die Punkte  $f^*(a^0), \dots, f^*(a^{n-1}), f^*(a^n) = q$  affin unabhängig, was ein Widerspruch zu der Tatsache ist, daß  $f^*$  auf  $s$  ausgeartet ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Da der Nullpunkt ein Element von  $W^n$  ist, folgt aus  $\mathcal{A}_\phi^*(P^n) = W^n$  die Existenz eines Punktes  $p \in \operatorname{int} P^n$  mit  $\mathcal{A}_\phi^*(p) = 0$ .

Zu  $A_2$ : Die Funktion  $\Phi(x) = x - p, p \in \operatorname{int} P^n$ , ist ein Isomorphismus und folglich  $\mathbf{M}^0 = \{\Phi(s) : s \in \mathbf{M}\}$  ein zu  $\mathbf{M}$  isomorpher Komplex, der  $\Phi(P^n)$  trianguliert. Die Grundsimplexe des orientierten Komplexes

$$\mathbf{M}^0 = \{\bar{\sigma} = [\Phi(a^0) \dots \Phi(a^l)] : \sigma = [a^0 \dots a^l] \in \mathbf{M}\}$$

sind im  $\mathbf{R}^n$  positiv orientiert.  $\bar{f}(a) := \Phi(a), a \in E(\mathbf{T})$ , ist eine simpliziale Abbildung von  $\mathbf{T}$  in  $\operatorname{Rd}(\mathbf{M}^0)$ .

Man kann annehmen, daß  $p$  im Inneren eines Grundsimplexes von  $\mathbf{M}$  liegt. Anderenfalls wählt man einen Punkt  $a \in E(s) \setminus E(\mathbf{T})$  und ersetzt ihn durch einen Punkt  $a_\varepsilon$  aus  $\mathbf{R}^n \setminus E(\mathbf{M})$  mit  $\|a - a_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Man prüft leicht, daß eine derartige Störung keinen Einfluß auf den Komplex  $\mathbf{T}$  hat und die Grundsimplexe des gestörten orientierten Komplexes im  $\mathbf{R}^n$  alle positiv orientiert sind.

Da  $\Phi$  ein Isomorphismus ist, liegt der Nullpunkt des  $\mathbf{R}^n$  in genau einem Grundsimplex von  $\mathbf{M}^0$ , so daß für die Ordnung des Nullpunktes bez. der Kette  $\bar{F}(z)$  (vgl. [3]) stets  $v(0, \bar{F}(z)) = 1$  gilt ( $\bar{F}$  bezeichne die durch  $\bar{f}$  induzierte Kettenabbildung). Für den  $(n-1)$ -Rand  $\hat{z}$  erhält man ebenfalls  $v(0, \hat{z}) = 1$ . Da die Abbildungen  $\Phi$  und  $\mathcal{A}_\Phi$  auf dem Rand von  $P^n$  homotop sind, folgt aus dem Satz von POINCARÉ/BOHL [1, 3]  $v(0, F(z)) = v(0, \bar{F}(z))$ . Somit erhält man  $\gamma = \gamma v(0, \hat{z}) = v(0, F(z)) = v(0, \bar{F}(z)) = 1$ .

Zu  $A_3$ :  $\mathbf{M}^1, \dots, \mathbf{M}^l$  sei eine Zerlegung von  $\mathbf{M}$ . Alle Komplexe  $\mathbf{M}^i$  sind homogen  $n$ -dimensional und unverzweigt. Für die durch sie bestimmten  $n$ -dimensionalen Polyeder  $Q_i^n$  gilt

$$\text{int } Q_i^n \cap \text{int } Q_j^n = \emptyset \quad \text{für } i \neq j.$$

Es sei  $\mathbf{T}^i := \text{Rd}(\mathbf{M}^i)$ ,  $i = 1(1)l$ . Nach Voraussetzung ist jeder Komplex  $\mathbf{T}^i$  eine  $L$ -zulässige Triangulation von  $\text{h}(Q_i^n)$  bez. der Funktion  $\Phi$ . Die orientierten Komplexe  $\mathbf{M}^i$  seien kanonisch orientiert. Analog zu früheren Betrachtungen erhält man, daß jede Kette  $z_i = \sum_{j=1}^{m(i)} \sigma_{ij}$  ein Zyklus auf  $\mathbf{T}^i$  ist, falls  $\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{im(i)}$  sämtliche Grundsimplexe von  $\mathbf{T}^i$  sind ( $i = 1(1)l$ ).

Für die durch die simplizialen Abbildungen  $f_i(e) := \text{sgn } \Phi(e)$  ( $e \in E(\mathbf{T}^i)$ ,  $i = 1(1)l$ ) induzierten Kettenabbildungen  $F_i$  gilt  $F_i(z_i) = \gamma_i \hat{z}$ ,  $\gamma_i \in L$ . Das Axiom  $A_3$  wird offenbar erfüllt, wenn

$$\gamma = \sum_{i=1}^l \gamma_i$$

gezeigt ist. Dazu wird auf  $L$  die Kette

$$c = \sum_{i=1}^l F_i(z_i) = \sum_{i=1}^l \gamma_i \hat{z} \quad (5)$$

betrachtet. Jedes Grundsimplex aus  $\mathbf{T}$  ist in genau einem der Randkomplexe  $\mathbf{T}^i$  enthalten. Da nach Voraussetzung die orientierten Komplexe  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{T}^i$  kanonisch orientiert sind, gilt für jedes Grundsimplex  $\sigma$  aus dem orientierten Komplex  $\mathbf{T}$

$$\dot{\sigma} = \bar{\sigma}, \quad \text{falls } \bar{\sigma} \in \mathbf{T}^i \quad \text{und} \quad |\sigma| = |\bar{\sigma}|$$

ist. Somit läßt sich die Kette  $c$  in folgender Weise zerlegen:

$$c = F(z) + \sum_{\sigma \in S} F^*(\sigma),$$

$$S = \left\{ \sigma_{ij} \in \bigcup_{i=1}^l \mathbf{T}^i : |\sigma_{ij}| \neq |\sigma_r|, r = 1(1)m \right\}.$$

$F^*$  ist dabei eine Abbildung von  $S$  in  $C_{n-1}(L)$ , die der Bedingung

$$F^* \hat{=} F_i|_{S \cap C_{n-1}(\mathbf{T}^i)}, \quad i = 1(1)l,$$

genügt. Jedes Simplex  $|\sigma|$ ,  $\sigma \in S$ , ist eine reguläre Seite von  $\mathbf{M}$  und somit Seite zweier  $n$ -Simplexe  $s_1, s_2 \in \mathbf{M}$ , die in verschiedenen Teilkomplexen der eingangs beschriebenen Art liegen. Es kann  $s_1 \in \mathbf{M}^1$  und  $s_2 \in \mathbf{M}^2$  angenommen werden.  $|\sigma|$  ist dann Element von  $\mathbf{T}^1$  und  $\mathbf{T}^2$ . Auf Grund eines bekannten Satzes der kombinatorischen Topologie [7] liegen  $s_1$  und  $s_2$  bez. der Trägerebene von  $|\sigma|$  in verschiedenen Halbräumen des  $\mathbf{R}^n$ , und die orientierten Simplexe  $\tau_i \in \mathbf{M}^i$ ,  $|\tau_i| = s_i$  ( $i = 1, 2$ ), induzieren

in das Simplex  $|\sigma|$  entgegengesetzte Orientierungen (s. [1, S. 167]). Folglich gibt es zu jedem  $\sigma \in S$  ein Simplex  $\sigma' \in S$  mit  $\sigma = -\sigma'$ . Darüber hinaus besteht die Beziehung  $F^*(\sigma) = -F^*(\sigma')$ . Somit ist  $\sum_{\sigma \in S} F^*(\sigma) = \theta$  und  $c = F(z) = \gamma z$  (mit  $\theta$  gleich der Nullkette). Ein Vergleich mit (5) liefert nun sofort die angestrebte Aussage.

Zu  $A_4$ : Die Funktionen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  aus  $D_L(P^n, T)$  seien auf  $b(P^n)$  homotop. Also existiert eine stetige Abbildung

$$\mathcal{H}_0: b(P^n) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$\mathcal{H}_0(\cdot, 0) =: \Phi_0|_{b(P^n)}, \quad \mathcal{H}_0(\cdot, 1) = \Phi_1|_{b(P^n)}$$

und

$$\mathcal{H}_0(x, t) \neq 0 \quad \forall (x, t) \in b(P^n) \times [0, 1].$$

Ist  $Q := P^n \times [0, 1]$ , so läßt sich die stetige Funktion

$$\mathcal{H}_1: b(Q) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$\mathcal{H}_1(\cdot, 0) = \Phi_0, \quad \mathcal{H}_1(\cdot, 1) = \Phi_1 \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_1|_{b(P^n) \times [0, 1]} = \mathcal{H}_0$$

auf Grund des Erweiterungssatzes von TIETZE (vgl. [4: S. 95]) fortsetzen zu einer stetigen Funktion  $\mathcal{H}: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die Triangulation  $M$  von  $Q$  induziert auf natürliche Weise eine Triangulation in der Menge  $(P^n \times \{0\}) \cup (P^n \times \{1\})$ . Mit Hilfe der Zylinderkonstruktion (s. [1] oder [3]) erhält man eine Triangulation  $Z$  von  $Q$ . Der Komplex  $Z$  ist homogen  $(n+1)$ -dimensional und unverzweigt. Im folgenden werden verschiedene simpliziale Unterteilungen von  $Z$  und mit diesen verbundene Hilfsfunktionen betrachtet. Den anschließenden Ausführungen folgt eine Gegenüberstellung (s. Abb. 5) dieser verschiedenen Triangulationen von  $Q$ , die die Gemeinsamkeiten und Unterschiede etwas verdeutlichen soll.

Wegen der Kompaktheit von  $b(P^n) \times [0, 1]$  und der Tatsache, daß  $\mathcal{H}_0$  eine Homotopie auf  $b(P^n) \times [0, 1]$  ist, gilt

$$\varrho := \inf \{ \|\mathcal{H}(x, t)\| : (x, t) \in b(P^n) \times [0, 1] \} > 0.$$

Wir wählen eine simpliziale Unterteilung  $Z^*$  von  $Z$ , deren Feinheitgrad der Ungleichung  $\text{mesh}(Z^*) < \delta$  genügt, wobei  $\delta > 0$  so gewählt sei, daß für alle  $n$ -Simplexe  $s$  aus  $\text{Rd}(Z^*)$  die Beziehung

$$\|\mathcal{H}(y) - \mathcal{H}(\bar{y})\| \leq \varrho_1 < \varrho \quad \forall y, \bar{y} \in s$$

erfüllt ist. Die gleichmäßige Stetigkeit von  $\mathcal{H}$  auf  $Q$  sichert die Existenz eines solchen  $\delta$ .  $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$  sei die lineare Fortsetzung von  $h := \mathcal{H}|_{\mathbb{E}(Z^*)}$  und  $\mathcal{A}_\varepsilon := \mathcal{A}_{\mathcal{H}} - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ), wobei  $\varepsilon_0$  so gewählt sei, daß der Nullpunkt ein regulärer Wert für die Funktionen  $\mathcal{A}_\varepsilon$  ist (s. Satz 1) und die Ungleichung  $\|\bar{\varepsilon}_0\| < \min(1, \varrho - \varrho_1)$  erfüllt.

Ist nun  $y \in s = \langle y^0, \dots, y^n \rangle \in \text{Rd}(Z^*)$ ,  $s \subseteq b(P^n) \times [0, 1]$ , und  $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i y^i$  ( $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i = 0(1)n$ ), so gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\varepsilon(y)\| &= \|\mathcal{H}(y) - (\mathcal{H}(y) - \mathcal{A}_{\mathcal{H}}(y) - \bar{\varepsilon})\| \\ &\geq \|\mathcal{H}(y)\| - \|\mathcal{H}(y) - \mathcal{A}_{\mathcal{H}}(y)\| - \|\bar{\varepsilon}\| \\ &\geq \varrho - \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i (\mathcal{H}(y) - \mathcal{H}(y^i)) \right\| - \|\bar{\varepsilon}\| \\ &\geq \varrho - \max_{0 \leq i \leq n} \|\mathcal{H}(y) - \mathcal{H}(y^i)\| - \|\bar{\varepsilon}\| \geq \varrho - \varrho_1 - \|\bar{\varepsilon}_0\| > 0. \end{aligned}$$

Somit sind die Funktionen  $\mathcal{A}_i(\cdot, 0)$  und  $\mathcal{A}_i(\cdot, 1)$  auf  $\mathfrak{h}(P^n)$  homotop. Alle für  $\mathcal{A}_i$  regulären  $n$ -Simplexe, die Randsimplexe von  $Z^*$  sind, sind in der Menge  $(P^n \times \{0\}) \cup (P^n \times \{1\})$  enthalten.

$R^i$  ( $i = 0, 1$ ) sei jener Teilkomplex von  $Rd(Z^*)$ , der die Menge  $P^n \times \{i\}$  trianguliert. Durch  $R^i$  wird in das Polyeder  $P^n$  eine Triangulation  $M^i$  induziert, die auf Grund der Konstruktion von  $Z^*$  eine simpliziale Unterteilung von  $M$  ist. Für die Abbildungen  $g_i := \Phi_i|_{E(M^i)}$  gilt:

$$g_i = \Phi_i|_{E(M^i)} = \mathcal{H}(\cdot, i)|_{E(M^i)} = \mathcal{A}(\mathcal{H}(\cdot, i)|_{E(M^i)}).$$

$\mathcal{A}(\mathcal{H}(\cdot, i))$  ist also die lineare Fortsetzung von  $g_i$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Bezeichnung ein: Ist  $g$  eine Abbildung von der Eckpunktmenge eines Komplexes  $K'$  in den  $R^n$ , so sei  $\mathfrak{R}(g; K')$  die Menge der  $\bar{\varepsilon}$ -regulären Simplexe für die lineare Fortsetzung von  $g$ .

$M^0$  und  $M^1$  seien kanonisch orientiert. Dann folgt aus Satz 2

$$\sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_i; M^i)} \text{or}(\tau') = \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_i; M^1)} \text{or}(\tau'). \tag{6}$$

Ist  $\bar{f}_i := \Phi_i|_{E(M)}$ , so sei für  $e \in E(M^i)$

$$g_i^*(e) := \begin{cases} \bar{f}_i(e), & \text{falls } e \in E(M) \\ \bar{f}_i(e'), & \text{falls } e \in E(M^i) \setminus E(M) \end{cases} \quad (i = 0, 1),$$

wobei  $e'$  ein beliebiger Eckpunkt des Trägersimplexes von  $e$  bez.  $M$  ist.

Da die Komplexe  $M^i$  ( $i = 0, 1$ ) simpliziale Unterteilungen von  $M$  sind, so gibt es zu jedem orientierten  $n$ -Simplex  $\tau \in M$   $n$ -Simplexe  $\tau'_{ij_1}, \dots, \tau'_{ij_n} \in M^i$  mit

$$|\tau| = \bigcup_{k=1}^{q(i)} |\tau'_{ij_k}|.$$

Es gibt also für jedes  $n$ -Simplex  $\tau \in M$  und  $i = 0, 1$  einen Teilkomplex  $K^i(\tau)$  von  $M^i$ , der  $|\tau|$  trianguliert.

Die Abbildung  $g_i^*$  induziert auf  $K^i(\tau)$  eine Bewertung  $l_i$  durch

$$l_i(e) = k, \quad \text{falls } g_i^*(e) = g_i(a^k) \text{ ist}$$

( $e \in E(K^i(\tau))$  und  $\tau = [a^0 \dots a^n]$ ;  $i = 0, 1$ ). Die Konstruktion der Bewertungen  $l_i$  sichert, daß die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt sind. Es sei  $\mathcal{A}'_{\Phi_i}$  die lineare Fortsetzung von  $\bar{f}_i$ , und  $\mathcal{G}_i^*$  die lineare Fortsetzung von  $g_i^*$  ( $i = 0, 1$ ). Ist nun  $|\tau|$  ein für die Funktion  $\mathcal{A}'_{\Phi_i}$   $\bar{\varepsilon}$ -reguläres  $n$ -Simplex, so sind alle  $cl$ -Simplexe von  $K^i(\tau)$   $\bar{\varepsilon}$ -regulär für  $\mathcal{G}_i^*$ , denn das Simplex  $s = (\mathcal{A}'_{\Phi_i}(a^0) - \bar{\varepsilon}, \dots, \mathcal{A}'_{\Phi_i}(a^n) - \bar{\varepsilon})$  enthält den Nullpunkt, und jedes  $cl$ -Simplex von  $K^i(\tau)$  wird durch  $\mathcal{G}_i^* - \bar{\varepsilon}$  auf  $s$  abgebildet. Somit erhält man unter Verwendung des Satzes 3 für  $i = 0, 1$

$$\text{or}(\tau; \bar{f}_i) = \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_i^*; K^i(\tau))} \text{or}(\tau'). \tag{7}$$

Für das Polyeder  $Q$  konstruieren wir nun unter Verwendung der Triangulationen  $M^i$  von  $P^n$  mit Hilfe der Zylinderkonstruktion Triangulationen  $Z^i$  ( $i = 0, 1$ ). Auf den Eckpunkt Mengen  $E(Z^i)$  seien die Abbildungen

$$h_i^*(a) = t g_i(x) + (1 - t) g_i^*(x) \quad (a = (x, t) \in E(Z^i); i = 1, 2)$$

definiert.  $\mathcal{H}_i^*$  bezeichne die lineare Fortsetzung von  $h_i^*$ . Für einen beliebigen Punkt  $a = (x, t) \in (b(P^n) \times [0, 1]) \cap s$ ,  $s = \langle a^0, \dots, a^n \rangle \in \text{Rd}(Z^i)$ , gilt

$$\mathcal{H}_i^*(a) = \sum_{j=0}^n \lambda_j h_i^*(a^j) = \sum_{j=0}^n \lambda_j (t_j g_i(x^j) + (1 - t_j) g_i^*(x^j)) \neq 0,$$

$a^j = (x^j, t_j) \in E(s)$  für  $j = 0(1)n$ , da der Komplex  $T$  eine  $\alpha_0$ -Triangulation von  $b(P^n)$  bez.  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  ist. Somit gilt auf Grund des Satzes 2

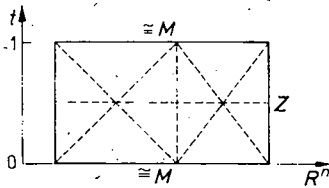
$$\sum_{\tau \in \mathcal{R}(g_i^*; M^i)} \text{or}(\tau') = \sum_{\tau \in \mathcal{R}(g_i; M^i)} \text{or}(\tau') \quad (i = 0, 1). \tag{8}$$

Die linearen Fortsetzungen der auf  $E(Z)$  definierten Abbildungen

$$\bar{h}_i(a) = t f_i^*(x) + (1 - t) \bar{f}_i(x) \quad (a = (x, t) \in P^n \times [0, 1])$$

sind Homotopien auf  $b(P^n) \times [0, 1]$ , da nach Voraussetzung die Triangulation  $T$  von  $b(P^n)$  eine  $\alpha_0$ -Triangulation der Funktionen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  ist ( $f_i^*$  ist analog zu der zu Beginn der Beweisführung erklärten Abbildung  $f^*$  definiert). Der Satz 2 liefert für diesen Fall

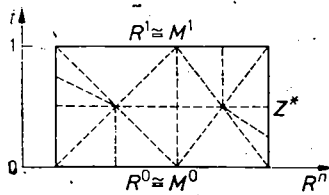
$$\sum_{\tau \in \mathcal{R}(f_i^*; M)} \text{or}(\tau) = \sum_{\tau \in \mathcal{R}(\bar{f}_i; M)} \text{or}(\tau) \quad (i = 0, 1). \tag{9}$$



$$\bar{h}_i(\cdot, 0) = \bar{f}_i = \Phi_i|_{E(M)},$$

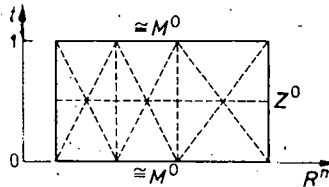
$$\bar{h}_i(\cdot, 1) = f_i^* = \text{sgn } \Phi_i|_{E(M)} \quad (i = 0, 1).$$

Die lineare Fortsetzung von  $\bar{h}_i$  ist eine Homotopie auf  $b(P^n) \times [0, 1]$ .



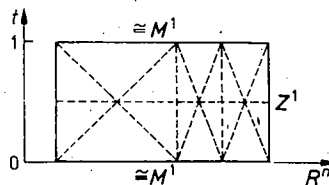
$$g_i = \Phi_i|_{E(M^i)} = \mathcal{A} \mathcal{H}(\cdot, i)|_{E(M^i)} \quad (i = 0, 1).$$

$\mathcal{A} \mathcal{H}$  ist Homotopie auf  $b(P^n) \times [0, 1]$ .



$$g_0 = \mathcal{H}_0^*(\cdot, 1)|_{E(M^0)}, \quad g_0^* = \mathcal{H}_0^*(\cdot, 0)|_{E(M^0)}.$$

$\mathcal{H}_0^*$  ist Homotopie auf  $b(P^n) \times [0, 1]$ .



$$g_1 = \mathcal{H}_1^*(\cdot, 1)|_{E(M^1)}, \quad g_1^* = \mathcal{H}_1^*(\cdot, 0)|_{E(M^1)}.$$

$\mathcal{H}_1^*$  ist Homotopie auf  $b(P^n) \times [0, 1]$ .

Die durch die simplizialen Abbildungen  $f_i^*$  ( $i = 0, 1$ ) bestimmten Kettenabbildungen von  $C_n(\mathbf{M})$  in  $C_n(\mathbf{K})$  werden der Einfachheit halber ebenfalls mit  $F_i$  bezeichnet. Die Schnittzahl der Kette  $F_i(c)$  mit dem Nullpunkt wird mit  $i(0, F_i(c))$  bezeichnet. Aus den Definitionen der Schnittzahl (s. [3]) und der Orientierungszahl folgt für ein  $n$ -Simplex  $\tau \in \mathbf{M}$

$$i(0, F_i(\tau)) = \text{or}(\tau; f_i^*), \quad (10)$$

da die Grundsimplexe der Komplexe  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  im  $\mathbf{R}^n$  positiv orientiert sind.

Unter Verwendung der Gleichungen (7) bis (10) und der Tatsache, daß sämtliche Grundsimplexe von  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}^i$  ( $i = 0, 1$ ) im  $\mathbf{R}^n$  positiv orientiert sind, erhält man für  $i = 0, 1$

$$\begin{aligned} \gamma_i &= v(0, \dot{\gamma}_i z) = v(0, F_i(z)) = v(0, F_i(\partial c)) \stackrel{(10)}{=} \sum_{\tau \in \mathfrak{R}(f_i^*; \mathbf{M})} \text{or}(\tau) \\ &\stackrel{(9)}{=} \sum_{\tau \in \mathfrak{R}(\bar{f}_i; \mathbf{M})} \text{or}(\tau) \stackrel{(7)}{=} \sum_{\tau \in \mathfrak{R}(\bar{f}_i; \mathbf{M})} \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_i^*; \mathbf{K}(\tau))} \text{or}(\tau') \\ &= \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_i^*; \mathbf{M}^i)} \text{or}(\tau') \stackrel{(8)}{=} \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_i; \mathbf{M}^i)} \text{or}(\tau'). \end{aligned}$$

Die Beziehung (6) liefert nun das gewünschte Resultat:

$$\gamma_0 = \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_0; \mathbf{M}^0)} \text{or}(\tau') = \sum_{\tau' \in \mathfrak{R}(g_1; \mathbf{M}^1)} \text{or}(\tau') = \gamma_1 \quad \blacksquare$$

Ist in einem Zusammenhang die genaue Kenntnis der zur Berechnung des Abbildungsgrades verwendeten Triangulationen von  $\mathbf{b}(P^n)$  bzw.  $\mathbf{b}(W^n)$  erforderlich, so erscheinen diese als untere Indizes an der Größe  $\gamma(\Phi, P^n)$ ; also  $\gamma_{\mathbf{T}, \mathbf{L}}(\Phi, P^n)$ .

**Definition:**  $\mathbf{D}_L(P^n)$  bezeichne die Klasse aller Funktionen aus  $\mathbf{D}(P^n)$ , für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es existiert eine Triangulation  $\mathbf{M}$  von  $P^n$ , so daß  $\text{Rd}(\mathbf{M})$  eine  $\mathbf{L}$ -zulässige Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  ist.

(ii) Es sei  $P^n = \bigcup_{i=1}^m Q_i^n$ , wobei jedes  $Q_i^n$  ein  $n$ -dimensionales Polyeder ist mit  $\text{int } Q_i^n \cap \text{int } Q_j^n = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Dann existiert eine Triangulation  $\mathbf{M}^0$  von  $P^n$ , die Teilkomplexe  $\mathbf{M}^i$  ( $i = 1(1)m$ ) enthält, für die

a)  $|\mathbf{M}^i| = Q_i^n$  und

b)  $\text{Rd}(\mathbf{M}^i)$  eine  $\mathbf{L}$ -zulässige Triangulation von  $\mathbf{b}(Q_i^n)$  ist.

Auf  $\mathbf{D}_L(P^n)$  definieren wir eine Funktion

$$\gamma_{\mathbf{L}}(\cdot, P^n) : \mathbf{D}_L(P^n) \rightarrow \Gamma$$

durch

$$\gamma_{\mathbf{L}}(\Phi, P^n) := \gamma_{\mathbf{T}, \mathbf{L}}(\Phi, P^n), \quad \text{falls } \Phi \in \mathbf{D}_L(P^n, \mathbf{T}) \text{ ist.}$$

Besitzt  $\mathbf{b}(P^n)$  zwei  $\mathbf{L}$ -zulässige Triangulationen  $\mathbf{T}^1$  und  $\mathbf{T}^2$  für  $\Phi$ , so gibt es eine gemeinsame simpliziale Unterteilung  $\mathbf{T}$  (vgl. [10]). Unter Verwendung der Formel (7) und der in diesem Zusammenhang benutzten Argumente erhält man

$$\gamma_{\mathbf{T}^1, \mathbf{L}}(\Phi, P^n) = \gamma_{\mathbf{T}, \mathbf{L}}(\Phi, P^n) = \gamma_{\mathbf{T}^2, \mathbf{L}}(\Phi, P^n),$$

womit die Korrektheit unserer Definition gezeigt ist.

Korrolar 1: Für alle Funktionen  $\Phi \in \mathbf{D}_L(P^n)$  gilt

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = \gamma_L(\Phi, P^n).$$

Beweis: Man sieht leicht, daß die Abbildung  $\gamma_L(\cdot, P^n)$  die Axiome  $A_1, A_2$  und  $A_3$  für alle  $\Phi \in \mathbf{D}_L(P^n)$  erfüllt.

Zu  $A_4$ :  $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathbf{D}_L(P^n)$  seien homotop auf  $\mathbf{b}(P^n)$ . Der Komplex  $M^i$  ( $i = 0, 1$ ) sei eine Triangulation von  $P^n$ , so daß  $\text{Rd}(M^i) = T^i$  eine  $L$ -zulässige Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  bez.  $\Phi_i$  ist. Für  $M^0$  und  $M^1$  existiert eine gemeinsame simpliziale Unterteilung  $M$  (vgl. [10]). Der Randkomplex  $T = \text{Rd}(M)$  ist wegen Lemma 3 eine  $\alpha_0$ -Triangulation bez.  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$ .

Für  $i = 0, 1$  sei  $\mathcal{A}_i$  die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$f_i(e) = \begin{cases} \text{sgn } \varphi_i(e), & \text{falls } e \in \mathbf{E}(T^i) \\ \text{sgn } \varphi_i(\bar{e}), & \text{falls } e \in \mathbf{E}(T) \setminus \mathbf{E}(T^i) \end{cases} \quad (e \in T),$$

wobei  $\bar{e}$  ein beliebiger Eckpunkt des Trägersimplexes von  $e$  bez.  $T^i$  ist.  $\varphi_i$  sei die stetige Fortsetzung von  $\mathcal{A}_i$  auf  $P^n$  (Erweiterungssatz von TIETZE; s. [4]). Die Funktionen  $\varphi_i$  gehören offensichtlich zu  $\mathbf{D}_L(P^n)$ .

Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie

$$\mathcal{H}_2 : \mathbf{b}(P^n) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

mit  $\mathcal{H}_2(\cdot, i) = \Phi_i|_{\mathbf{b}(P^n)}$ ,  $i = 0, 1$ . Die Abbildungen

$$\mathcal{H}_1(x, t) = t\Phi_0(x) + (1-t)\psi_0(x), \quad \mathcal{H}_3(x, t) = t\psi_1(x) + (1-t)\Phi_1(x),$$

$(x, t) \in \mathbf{b}(P^n) \times [0, 1]$ , sind ebenfalls Homotopien, da der Komplex  $T$  eine  $\alpha_0$ -Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  bez.  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  ist. Die Funktion

$$\mathcal{H}(x, t) := \mathcal{H}_i(x, t) \quad \text{im Falle} \quad \frac{i-1}{3} \leq t \leq \frac{i}{3}$$

ist eine Homotopie auf  $\mathbf{b}(P^n) \times [0, 1]$ . Somit sind die Funktionen  $\psi_0$  und  $\psi_1$  auf  $\mathbf{b}(P^n)$  homotop, und es gilt

$$\gamma_{T,L}(\psi_0, P^n) = \gamma_{T,L}(\psi_1, P^n). \quad (11)$$

Man erhält nun für  $i = 0, 1$

$$\gamma_L(\Phi_i, P^n) = \gamma_{T,L}(\Phi_i, P^n) = \gamma_{T,L}(\psi_i, P^n) = \gamma_{T,L}(\psi_i, P^n)$$

und wegen (11)  $\gamma_L(\Phi_0, P^n) = \gamma_L(\Phi_1, P^n)$  ■

Im Verlaufe des Beweises von Theorem 2 wurden Beziehungen zwischen der Zahl  $\gamma$  und anderen Größen hergestellt, die nun auch Darstellungen des Abbildungsgrades sind. Im folgenden Korrolar sind diese Größen zusammengestellt.

Korrolar 2: Ist  $\Phi \in \mathbf{D}_L(P^n)$ , so bestehen für den Abbildungsgrad die Beziehungen

- (i)  $\deg(\Phi, \text{int } P^n) = \mu^+ - \mu^-$ ,
- (ii)  $\deg(\Phi, \text{int } P^n) = \sum_{z \in \mathfrak{R}(f, M)} \text{or}(\tau)$ ,
- (iii)  $\deg(\Phi, \text{int } P^n) = v(\mathbf{0}, F(z))$ .



## 5. Die Oktaederdarstellung

Bei genauer Betrachtung des Beweises von Theorem 2 erkennt man, daß der Einheitswürfel  $W^n$  durch ein beliebiges konvexes Polyeder, das den Nullpunkt enthält, ersetzt werden kann. Es ist nur zu sichern, daß die Abbildung  $f$  eine simpliziale Abbildung in die Triangulation des Randes dieses Polyeders ist und daß die lineare Fortsetzung von  $f$  zu der Funktion  $\Phi$  auf dem Rand des Polyeders  $P^n$  homotop ist. Für den Fall des  $n$ -dimensionalen Einheitsoktaeders soll dies nun etwas genauer betrachtet werden.

Die Punkte der Menge  $E^n := \{y^0, y^1, \dots, y^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  seien durch

$$y_k^i := \begin{cases} (-1)^i, & \text{falls } k = \left[ \frac{i-1}{2} \right] + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (k = 1(1)n)$$

definiert ( $[a]$  bezeichnet den ganzen Teil der Zahl  $a$ ). Offensichtlich ist  $y^0 = 0$ .

Eine  $(n+1)$ -elementige Teilmenge  $B = \{y^0, y^i, \dots, y^n\} \subseteq E^n$  heißt *s-zulässig*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$y^j + y^k \neq y^0, \quad j = 1(1)(n-1) \quad \text{und} \quad k = (j+1)(1)n. \quad (12)$$

Wie man leicht sieht, sind die Punkte jeder *s*-zulässigen Teilmenge von  $E^n$  affin unabhängig. Folglich ist die konvexe Hülle jeder *s*-zulässigen Teilmenge von  $E^n$  ein Simplex. Die Menge  $K^0$  aller Seiten der Simplexe aus der Menge  $\{\text{conv } B : B \subseteq E^n \text{ und } B \text{ s-zulässig}\}$  ist ein Komplex. Das durch  $K^0$  erzeugte  $n$ -dimensionale Polyeder  $O^n$  wird als *n-dimensionales Einheitsoktaeder* und  $K^0$  als *natürliche Triangulation von  $O^n$*  bezeichnet.

**Lemma 4 [10]:** (i) *Der Komplex  $K^0$  ist eine  $n$ -Pseudomannigfaltigkeit, und der Randkomplex  $\text{Rd}(K^0)$  ist eine geschlossene  $(n-1)$ -Pseudomannigfaltigkeit.*

(ii) *Ein  $(n-1)$ -Simplex  $s \in K^0$  ist genau dann ein Randsimplex, wenn  $y^0 \notin E(s)$  gilt.*

(iii) *Der Randkomplex  $\text{Rd}(K^0)$  enthält genau  $2^n$  Grundsimplexe.*

Mit  $\text{St}(e)$  bezeichnen wir den durch den Eckpunkt  $e \in E(K^0)$  erzeugten Stern aus dem Komplex  $K^0$ ; vgl. [19]. Weiterhin sei  $N := \{1, \dots, n\}$ .

**Lemma 5:** *Die Abbildung  $g = (g_1, \dots, g_n) : E(T) \rightarrow E(\text{Rd}(K^0))$ , deren Koordinatenfunktionen  $g_i$  durch*

$$g_i(e) := \begin{cases} \text{sgn } \varphi_i(e), & \text{falls } i = \eta(e) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$\eta(e) := \min \{i \in N : \text{sgn } \varphi_i(x) = \text{const} \neq 0 \quad \forall x \in |\text{St}(e)|\}$ , definiert sind, ist eine simpliziale Abbildung.

**Beweis:** Es genügt zu beweisen, daß die Menge  $\{g(a^1), \dots, g(a^n)\}$  eines  $(n-1)$ -Simplexes  $s = \langle a^1, \dots, a^n \rangle \in T$  kein Antipodenpaar enthält. Angenommen, die Punkte  $g(a^i)$  und  $g(a^j)$  ( $a^i, a^j \in E(s)$  und  $i \neq j$ ) bilden ein Antipodenpaar. Dann gilt

$$\eta(a^i) = \eta(a^j) = k \quad \text{und} \quad \text{sgn } \varphi_k(a^i) = -\text{sgn } \varphi_k(a^j). \quad (13)$$

Weiterhin gilt  $s \in \text{St}(a^i) \cap \text{St}(a^j)$ , also

$$\text{sgn } \varphi_k(x) = \text{sgn } \varphi_k(a^i) \quad \text{und} \quad \text{sgn } \varphi_k(x) = \text{sgn } \varphi_k(a^j) \quad \forall x \in s,$$

was wegen (13) ein Widerspruch ist ■

Unter Verwendung der in obigem Lemma eingeführten simplizialen Abbildung kann man nun eine Darstellung des Abbildungsgrades einführen, die auf dem Standardkörperprinzip beruht und das  $n$ -dimensionale Einheitsoktaeder verwendet. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 2.

**Definition:** Der Rand  $b(P^n)$  eines Polyeders  $P^n$  heißt  $\alpha_1$ -*fein zerlegt* bez. der Funktion  $\Phi$ , falls für  $b(P^n)$  eine Triangulation  $T$  existiert, so daß für jeden Eckpunkt  $e \in E(T)$  eine Koordinatenfunktion  $\varphi_i$  existiert mit  $\text{sgn } \varphi_i(x) = \text{const} \neq 0 \forall x \in [\text{St}(e)]$ .  $T$  bezeichnet man als  $\alpha_1$ -*Triangulation* von  $b(P^n)$  bez.  $\Phi$ .

**Definition:**  $D_1(P^n)$  ist die Menge aller Funktionen  $\Phi \in D(P^n)$ , für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es existiert eine  $\alpha_1$ -Triangulation von  $b(P^n)$  bez.  $\Phi$ .
- (ii) Es gilt die Bedingung (ii) aus der Definition von  $D_1(P^n)$ .

**Theorem 3:** Sind die Triangulationen  $M$  und  $K^0$  von  $P^n$  bzw.  $O^n$ -kanonisch orientiert, so gilt für  $\Phi \in D_1(P^n)$

$$\text{deg}(\Phi, \text{int } P^n) = 2^{-n} \sum_{\sigma \in T_{n-1}} d^*(\sigma, \Phi),$$

$$d^*(\sigma, \Phi) := \det(g(a^1) \dots g(a^n)), \quad \sigma = [a^1 \dots a^n],$$

falls  $T = \text{Rd}(M)$  eine  $\alpha_1$ -Triangulation von  $b(P^n)$  bez.  $\Phi$  ist.

**Bemerkungen:** 1. Die Kubusdarstellung läßt sich rechenstechnisch besser realisieren als die Oktaederdarstellung, da die simpliziale Abbildung im ersten Fall allein durch die Funktionswerte in den Eckpunkten von  $T$  bestimmt ist, während im zweiten Fall zusätzlich noch das Verhalten der Funktion auf dem Stern des jeweiligen Eckpunktes berücksichtigt werden muß.

2. Die Oktaederdarstellung hat den Vorteil, daß die Abbildung  $g$  stets eine simpliziale Abbildung von  $T$  in  $\text{Rd}(K^0)$  ist. Gegenüber der Darstellung (1) entfällt damit eine Voraussetzung (L-Zulässigkeit von  $f$ ), die praktisch nicht überprüfbar ist.

3. Die Kubus- und die Oktaederdarstellung können auch zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades von stetigen Funktionen bez. beliebiger Gebiete  $\Omega \in J^n$  verwendet werden. Hierzu ist  $\Omega$  nur in geeigneter Weise durch ein  $n$ -dimensionales Polyeder zu approximieren (vgl. das Vorgehen in [15]).

4. Aussagen über die Existenz von  $\alpha_1$ -Triangulationen erhält man wieder aus dem in [23] angegebenen Satz.

## LITERATUR

- [1] ALEXANDROFF, P., und H. HOFF: Topologie I (berichtigter Reprint). Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1974.
- [2] AMANN, H., and S. WEISS: On the uniqueness of the topological degree. Math. Z. **130** (1973), 39—54.
- [3] CRONIN, J.: Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis (Math. surveys Nr. 11). Amer. Math. Soc.: Providence (R.I.) 1964.
- [4] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis. VEB Dt. Verl. Wiss.: Berlin 1971.
- [5] FÜHRER, L.: Ein elementarer analytischer Beweis der Eindeutigkeit des Abbildungsgrades im  $\mathbb{R}^n$ . Math. Nachr. **54** (1972), 259—267.
- [6] HARVEY, C., and F. STENGER: A two-dimensional analogue to the method of bisections for solving nonlinear equations. Quart. Appl. Math. **34** (1976), 351—368.

- [7] HARZHEIM, E.: Einführung in die kombinatorische Topologie. Wiss. Buchges.: Darmstadt 1978.
- [8] HEINZ, E.: An elementary theory of the degree of a mapping in  $n$ -dimensional space. *J. Math. Mech.* **8** (1959), 231—247.
- [9] KEARFOTT, B.: An efficient degree-computation method for generalized method of bisection. *Numer. Math.* **32** (1979), 109—127.
- [10] KLIESCH, W.: Zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades im  $\mathbb{R}^n$  und seiner Anwendung bei der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme (Dissertation). Karl-Marx-Universität: Leipzig 1983.
- [11] KRASNOSEL'SKII, M. A.: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations (Übers. a. d. Russ.). Pergamon Press: Oxford 1964.
- [12] O'NEIL, T., and J. W. THOMAS: The calculation of the topological degree by quadrature. *SIAM J. Numer. Anal.* **12** (1975), 673—680.
- [13] PEITGEN, H.-O.: Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nichtlinearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme. *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **84** (1982), 107—162.
- [14] PEITGEN, H.-O., and M. PRÜFER: The Leray-Schauder continuation method is a constructive element in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems. In: *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points (Lecture Notes in Mathematics 730)*. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1980, pp. 326—409.
- [15] PEITGEN, H.-O., and H. W. SIEGBERG: An  $\varepsilon$ -perturbation of Brouwer's definition of degree. In: *Théorie des Points Fixes (Lecture Notes in Mathematics 886, Ed.: E. Fadell)*. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1981, pp. 331—366.
- [16] PRÜFER, M.: Simpliciale Topologie und globale Verzweigung. Dissertation: Univ. Bonn 1978.
- [17] PRÜFER, M.: Calculating global bifurcation. In: *Continuation Methods (Ed.: H. Wacker)*. Academic Press: New York 1978, pp. 187—213.
- [18] PRÜFER, M., and H. W. SIEGBERG: On computational aspects of topological degree in  $\mathbb{R}^n$ . Preprint no. 257 SB 72 Universität Bonn 1979.
- [19] RINOW, W.: Lehrbuch der Topologie. VEB Dt. Verl. Wiss.: Berlin 1975.
- [20] SIEGBERG, H. W.: Brouwer degree: History and numerical computation. Preprint no. 265 SB 72. Universität Bonn 1979.
- [21] STENGER, F.: Computing the topological degree of a mapping in  $\mathbb{R}^n$ . *Numer. Math.* **25** (1975), 23—38.
- [22] STYNES, M.: A simplification of Stenger's topological degree formula. *Numer. Math.* **33** (1979), 147—156.
- [23] STYNES, M.: An algorithm for numerical calculation of topological degree. *Appl. Anal.* **9** (1979), 63—77.
- [24] STYNES, M.: On the construction of sufficient refinements for computation of topological degree. *Numer. Math.* **37** (1981), 453—462.
- [25] ZEIDLER, E.: Existenz, Eindeutigkeit, Eigenschaften und Anwendungen des Abbildungsgrades im  $\mathbb{R}^n$ . In: *Theory of Nonlinear Operators*. Akademie-Verlag: Berlin 1974, S. 259 bis 312.
- [26] ZEIDLER, E.: Zur Eindeutigkeit von Fixpunktindizes für nichtkompakte Operatoren. *Math. Nachr.* **72** (1976), 51—85.
- [27] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I<sup>1</sup> — Fixpunktsätze (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 2). BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1976.

Manuskripteingang: 16. 02. 1983

#### VERFASSER:

Dr. WOLFGANG KLIESCH  
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität  
DDR - 7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 11