Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (5) 1984, S. 401–412

Konforminvarianten vom Gewicht −1 eines Zusammenhanges oder Eichfeldes

R. Schimming

Ein Zusammenhang bzw. Eichfeld in einem Vektorbündel über einer riemannschen Mannigfaltigkeit wird mit Hilfe eines Differentialoperators eingeführt. Unter Anwendung neuer Ergebnisse von P. Günther und V. Wünsch wird eine Folge von Konforminvarianten vom Gewicht −1 des Eichfeldes konstruiert. Diese spielen u. a. in der Theorie des Huygensschen Prinzips eine Rolle. Wir berechnen die relativen Konforminvarianten für verschiedene Beispiele; so verschwinden sie z. B. für die Klasse der Instantonen-Eichfelder.

Связность или калибровочное поле в векторном расслоении над римановым многообразием введётся через оператор типа Лапласа. Применяя новые результаты П. Гюнтера и В. Вюнша мы построим из калибровочного поля последовательность конформных инвариантов веса −1. Они встречаются, например, в теории принципа Гюйгенса. В некоторых примеров относительные конформные инварианты вычисляются. В частности, они обращаются в нуль для калибровочных полей типа инстантонов.

A connection or a gauge field in a vector bundle over a riemannian manifold is introduced by means of some given Laplace-like operator. Applying new results of P. Günther and V. Wünsch we construct a sequence of conformal invariants of weight −1 for a gauge field. These are relevant e.g. in the theory of Huygens' principle. We calculate the relative conformal invariants for some examples; especially they vanish for any instanton gauge field.

Einleitung

Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m + 2 \geqq 4$ und E ein Vektorbündel über M. (Diese und alle folgenden Objekte seien von der Differenzierbarkeitsklasse C^∞.) Ein Differentialoperator $\Delta : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ mit Laplace-Hauptteil ist gleichwertig zu den drei „Bausteinen“

— riemannsche Metrik (beliebiger Signatur) $g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ über M,
— Zusammenhang bzw. kovariante Ableitung $D = dx^\alpha D_\alpha$ in E bzw. $C^\infty(E)$,
— Schnitt W des Endomorphismenbündels $End\ E$.

Die Koeffizienten des Zusammenhangs D werden im physikalisch orientierten Sprachgebrauch auch als *Eichfeldpotentiale* bezeichnet. Durch Kombination von $D = dx^\alpha D_\alpha$ mit dem riemannschen Zusammenhang $\nabla = dx \nabla_\alpha$ zu g kann man, wie im Anhang (Punkt 9) erläutert, iterierte oder höhere D-Ableitungen bilden. Mit diesen ergibt sich dann

$$\Delta = g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + W, \tag{1}$$

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)\, u =: F_{\alpha\beta} u \quad \text{für} \quad u \in C^\infty(E), \tag{2}$$

$$F := F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \in C^\infty(End\ E \otimes \Lambda^2 TM). \tag{3}$$

Man nennt F die *Krümmung* von D bzw. im physikalischen Sprachgebrauch auch *Eichfeldstärke*.

Eichtransformationen der Schnitte $u \in C^\infty(E)$ und konforme Transformationen der Metrik g können derart auf das Tripel (g, D, W) ausgedehnt werden, daß die Form des Differentialausdrucks Δu erhalten bleibt. Unser Interesse beschränkt sich hier auf die konformen Transformationen.

Definition: Eine *konforme Transformation* $\Delta \to \bar{\Delta}$ bzw. $(g, D, W) \to (\bar{g}, \bar{D}, \bar{W})$ mit dem *konformen Exponenten* $\varphi \in C^\infty(M)$ sei erklärt durch

$$\bar{\Delta} u := e^{-(m+2)\varphi} \Delta(e^{m\varphi} u). \tag{4}$$

Mit den Methoden von [12] kann man die Gleichwertigkeit von (4) zu den drei Bedingungen

$$\bar{g} = e^{2\varphi} g, \tag{5}$$

$$\bar{D} u = D u, \tag{6}$$

$$\bar{W} = e^{-(m+2)\varphi} \Delta(e^{m\varphi} I) \tag{7}$$

zeigen. Hierbei sei I der identische Operator, und in Anwendung auf Schnitte von $End\, E$ sei $\Delta := g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + W$ (siehe Anhang, Punkt 7).

Als einen Beitrag zum allgemeinen Problem der Bestimmung der (relativen) Konforminvarianten von Δ bzw. von (g, D, W) werden wir eine spezielle Folge von Konforminvarianten vom Gewicht -1 von (g, D) konstruieren. Die Konstruktion arbeitet mit den D-Ableitungen verschiedener Ordnung der Eichfeldkrümmung F und den ∇-Ableitungen verschiedener Ordnung des durch

$$(n-2)\, L := Ric - \frac{1}{2(n-1)} R \cdot g \tag{8}$$

definierten symmetrischen Tensors

$$L = L_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \in C^\infty(\Pi^2 TM).$$

Dabei geht L nur über die sogenannten konform-kovarianten Ableitungen C_α von P. Günther und V. Wünsch in das Ergebnis ein. Mit diesen in § 1 erläuterten C-Ableitungen erhalten wir für jede Stufe $p \geqq 4$:

Der bezüglich der Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ symmetrische und (bezüglich g) spurfreie Anteil von

$$\sum_{q=1}^{p-1} a(q, p-q)\, C_{\alpha_3} \ldots C_{\alpha_{q+1}} F^\alpha{}_{\alpha_1} C_{\alpha_{q+2}} \ldots C_{\alpha_p} F_{\alpha\alpha_2} \tag{9}$$

mit Konstanten $a(q, p-q)$ ist konforminvariant vom Gewicht -1 genau dann, wenn

$$a(q, p-q) = (-1)^q \binom{p}{q-1} \binom{p}{q+1} \tag{10}$$

bis auf einen nur von p abhängigen Proportionalitätsfaktor ist.

Wir illustrieren diese relativen Konforminvarianten durch Beispiele und Anwendungen. In einer späteren Arbeit sollen weitere Anwendungen gegeben werden. Ansätze zur Konstruktion der durch (9), (10) beschriebenen Größen finden sich bereits in der Arbeit [12] des Autors.

§ 1. Konforminvariante polynomiale Tensoren

Nach einem klassischen Resultat läßt sich ein Tensor, der als ein Polynom in den $g^{\alpha\beta}$ und in den partiellen Ableitungen der Ordnungen 0, 1, ..., k der $g_{\alpha\beta}$ gebildet wird, als Polynom in den $g^{\alpha\beta}$ und den ∇-Ableitungen der Ordnungen 0, 1, ..., $k-2$ der Komponenten $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ des riemannschen Krümmungstensors darstellen (siehe etwa [13]). Geht man nun zu kombinierten TM- und E-Tensoren über und nimmt in die Definition des polynomialen Tensors partielle Ableitungen der Zusammenhangskoeffizienten von D mit auf, so läßt er sich als Polynom in den $g^{\alpha\beta}$, den $g_{\alpha\beta}$, den ∇-Ableitungen von $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ und den D-Ableitungen bis zur entsprechenden Ordnung der Krümmungskomponenten $F_{\alpha\beta}$ darstellen (siehe etwa [10]). Ein solcher polynomialer Tensor $T = T[g, D]$ heißt vom (konformen) *Gewicht* ω, falls

$$T[\bar{g}, \bar{D}] = e^{2\omega\varphi}T[g, D] \tag{1.1}$$

bei einer beliebigen Skalentransformation oder Homothetie, d. h. einer konformen Transformation mit $\varphi = \text{const}$, ist. Gilt (1.1) sogar für beliebige konforme Transformationen, so heißt T *konforminvariant vom Gewicht* ω oder eine *Konforminvariante vom Gewicht* ω oder einfach *konforminvariant*. Man spricht auch bei $\omega \neq 0$ von einer *relativen* Konforminvarianten und bei $\omega = 0$ von einer *absoluten* Konforminvarianten.

Für den rein metrischen Fall $T = T[g]$ haben P. Günther und V. Wünsch [6–8] (siehe auch [14]) unlängst neue Ergebnisse über konforminvariante polynomiale Tensoren gewonnen. Wir gehen davon aus, daß sich Ergebnisse aus [6–8] auf den Fall der Einbeziehung von Eichfeldern extrapolieren lassen. Zu einer solchen — im einzelnen noch auszuarbeitenden — Extrapolation würden etwa die folgenden Punkte gehören:

— Für einen polynomialen Tensor vom Gewicht ω sei gesetzt

$$X_\Phi T := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} (T[\bar{g}, \bar{D}] - e^{2\varepsilon\omega\Phi}T[g, D]), \tag{1.2}$$

wobei $\bar{g}$, $\bar{D}$ sich auf den konformen Exponenten $\varphi = \varepsilon\Phi$ beziehen.

— Genau dann enthält das konforme Transformationsgesetz von T höchstens 1. Ableitungen des konformen Exponenten φ, wenn es eine Darstellung

$$X_\varphi T = \varphi_\alpha X^\alpha T \quad \text{mit} \quad \varphi_\alpha := \nabla_\alpha\varphi \tag{1.3}$$

gibt (in der die $X^\alpha T$ nicht mehr von φ abhängen). Das konforme Transformationsgesetz der $X^\alpha T$ enthält dann ebenfalls höchstens 1. Ableitungen von φ.

— Ein polynomialer Tensor T vom Gewicht ω ist konforminvariant genau dann, wenn

$$X_\varphi T = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(M)! \tag{1.4}$$

ist.

— Für einen polynomialen Tensor T, dessen konformes Transformationsgesetz höchstens 1. Ableitungen von φ enthält, sei die sogenannte konform-kovariante Ableitung CT durch ihre Komponenten

$$C_\alpha T := D_\alpha T - L_{\alpha\beta}X^\beta T \tag{1.5}$$

definiert. Das konforme Transformationsgesetz von CT enthält dann wieder höchstens 1. Ableitungen von φ.

— Sowohl die X^α als auch die C_α sind Ableitungsoperationen in dem Sinne, daß sie der Summenregel und der Leibnizschen Produktregel genügen. Sie sind ferner mit der Operation der Verjüngung vertauschbar.

§ 2. Konstruktion der relativen Konforminvarianten

Aus (2), (6) liest man die Konforminvarianz der Krümmung ab:

$$\bar{F} = F. \tag{2.1}$$

Die Theorie des *Huygensschen Prinzips* (siehe etwa [9, 4, 5, 11, 14, 12]) legt nahe, daß sich aus den D-Ableitungen verschiedener Ordnung von F weitere relative Konforminvarianten bilden lassen, und zwar solche folgenden Typs:

— quadratisch in F,
— $End\,E \otimes \Pi^p T^*M/g$-wertig,
— genau eine Verjüngung bezüglich g enthaltend.

Im Sinne des § 1 würde man für die gesuchten Größen einen Ansatz mit den C-Ableitungen anstelle der D-Ableitungen machen. Dabei entsteht dann die Notwendigkeit von Formeln für iterierte oder höhere C-Ableitungen. Um derartige Formeln zu umgehen, schlagen wir im folgenden einen etwas anderen Weg ein.

Definition 2.1: Eine Folge von *Größen*

$$F_p = F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, \partial_\alpha \otimes dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p} \in C^\infty(End\,E \otimes TM \otimes \Pi^p T^*M)$$
$$\text{für} \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2}$$

sei *rekursiv* definiert durch

$$\begin{aligned} F_1 &:= F^{\alpha}{}_{\cdot\beta}\, \partial_\alpha \otimes dx^\beta, \\ F_2 &:= DF_1 = D_{\alpha_2} F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1}\, \partial_\alpha \otimes dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2}, \\ F_{p+1} &:= DF_p + (p^2 - 1)\, LF_{p-1} \quad \text{für} \quad p = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definition 2.2: Es sei Γ der von den beiden Größen

$$g = g_{\alpha_1\alpha_2}\, dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \in C^\infty(\Pi^2 T^*M), \qquad \partial_\alpha \otimes dx^\alpha \in C^\infty(TM \otimes T^*M) \tag{2.4}$$

erzeugte Untervektorraum von $C^\infty(End\,E \otimes TM \otimes \Pi T^*M)$ und die

$$\Gamma_p := \Gamma \cap C^\infty(End\,E \otimes TM \otimes \Pi^p T^*M) \quad \text{mit} \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.5}$$

seien seine p-homogenen direkten Summanden. (Das heißt, Γ bzw. Γ_p enthält alle Vielfachen der 2-Form g und alle Vielfachen des Kroneckertensors $\partial_\alpha \otimes dx^\alpha$.)

Es stellt sich sogleich heraus, daß die Komponenten $F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ von F_p im wesentlichen gleich den iterierten konform-kovarianten Ableitungen

$$C_{\alpha_2} \ldots C_{\alpha_p} F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1} \tag{2.6}$$

sind. „Im wesentlichen" soll hierbei gerade *modulo* g und *modulo* $\partial_\alpha \otimes dx^\alpha$ bedeuten.

Satz 2.1: *Es gilt*

$$F_p = C^{p-1} F_1 \quad \textit{mod}\ \Gamma_p, \tag{2.7}$$

$$X_\varphi F_p = -(p^2 - 1)\, d\varphi F_{p-1} \quad \textit{mod}\ \Gamma_p. \tag{2.8}$$

Beweis: Nach [12] verhalten sich die D-Ableitungen eines *End E*-wertigen Tensorfeldes bei einer konformen Transformation formal wie die ∇-Ableitungen eines echten Tensorfeldes. Demnach gilt in Komponenten

$$\bar{D}_\beta F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1\ldots\alpha_p} = D_\beta F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1\ldots\alpha_p} + \varphi_\mu \Big(g^{\mu\alpha}_{\beta\nu} F^{\nu}{}_{\cdot\alpha_1\ldots\alpha_p} - \sum_{q=1}^{p} g^{\mu\nu}_{\beta\alpha_q} F^{\alpha}{}_{\cdot\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}\nu\alpha_{q+1}\ldots\alpha_p}\Big)$$

mit der Abkürzung

$$g^{\mu\nu}_{\alpha\beta} := \delta_\alpha{}^\mu \delta_\beta{}^\nu + \delta_\beta{}^\mu \delta_\alpha{}^\nu - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu}.$$

Durch den Übergang zu den symmetrischen Anteilen und zum Rechnen *modulo* Γ_{p+1} reduziert sich dieses Transformationsgesetz auf

$$\bar{D}F_p = DF_p - (2p + 1)\, d\varphi F_p \quad mod\ \Gamma_{p+1}.$$

Die Behauptungen (2.7), (2.8) ergeben sich nun simultan durch vollständige Induktion über p:

Sei $X_\varphi F_p = -(p^2 - 1)\, d\varphi F_{p-1}$ $mod\ \Gamma_p$. Dann folgt

$$CF_p = DF_p + (p^2 - 1)\, LF_p = F_{p+1} \quad mod\ \Gamma_{p+1} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{p+1} &= \bar{D}\bar{F}_p + (p^2 - 1)\, \bar{L}\bar{F}_{p-1} \\ &= [D - (2p + 1)\, d\varphi]\, [F_p - (p^2 - 1)\, d\varphi F_{p-1}] \\ &\quad + (p^2 - 1)\, [L + \nabla^2\varphi - (d\varphi)^2]\, [F_{p-1} - p(p - 2)\, d\varphi F_{p-1}] \\ &= \cdots = F_{p+1} - p(p + 2)\, d\varphi F_p \quad mod\ \Gamma_{p+1},\ mod\ (d\varphi)^2. \end{aligned}$$

Das ergibt $X_\varphi F_{p+1} = -p(p + 2)\, d\varphi F_p$ $mod\ \Gamma_{p+1}$.

Das im § 1 Gesagte gewährleistet, daß das konforme Transformationsgesetz von $F_{p+1} = CF_p$ $mod\ \Gamma_{p+1}$ nur wieder 1. Ableitungen von φ enthält, und es rechtfertigt die Vernachlässigung von in φ quadratischen Termen in der Zwischenrechnung ∎

Im folgenden fassen wir zur technischen Vereinfachung, ähnlich wie in der Kombinatorik üblich, alle F_p zu einer „erzeugenden Funktion" zusammen. Da die auftretenden unendlichen Reihen rein formal sind, treten keinerlei Konvergenzfragen auf (siehe Anhang, Punkt 2).

Satz 2.2: *Die Potenzreihe in der reellen Variablen* t

$$F(t) := \sum_{p=1}^{\infty} t^p F_p/(p - 1)!\, (p + 1)! \in C^\infty(End\ E \otimes TM \otimes \Pi T^*M) \tag{2.9}$$

genügt der Relation

$$X_\varphi F(t) = -t\, d\varphi F(t)\ mod\ \Gamma. \tag{2.10}$$

Der Beweis liegt auf der Hand ∎

Theorem: *Die Potenzreihe in* t

$$I(t) := \langle F(-t), F(t) \rangle \in C^\infty(End\ E \otimes \Pi T^*M), \tag{2.11}$$

wobei die bilineare Operation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *gemäß dem Anhang (Punkt* 13) *erklärt ist, ist modulo g konforminvariant vom Gewicht* -1, *ebenso wie ihre durch*

$$I(t) =: -\sum_{p=2}^{\infty} t^p I_p/(p!)^2 \tag{2.12}$$

definierten Koeffizienten

$$I_p = \sum_{q=1}^{p-1} (-1)^q \binom{p}{q - 1} \binom{p}{q + 1} \langle F_q, F_{p-q} \rangle \in C^\infty(End\ E \otimes \Pi^p T^*M). \tag{2.13}$$

Beweis: Das Rechnen *modulo* Γ reduziert sich jetzt auf das Rechnen *modulo* g, denn

$$\langle F(-t), \partial_\alpha \otimes dx^\alpha \rangle = \langle \partial_\alpha \otimes dx^\alpha, F(t) \rangle = 0,$$

wie man leicht in Komponenten nachprüft. Nach (2.10) ist nun

$$X_\varphi I(t) = \langle X_\varphi F(-t), F(t) \rangle + \langle F(-t), X_\varphi F(t) \rangle = 0 \quad mod\, g.$$

Das Ergebnis (2.13) ergibt sich durch Ausmultiplizieren der formalen Potenzreihen $F(t)$ und $F(-t)$ ∎

Die Werte $(-1)^q \binom{p}{q-1} \binom{p}{q+1}$ der Koeffizienten der $\langle F_q, F_{p-q} \rangle$ in den I_p sind im folgenden Sinne eindeutig bestimmt.

Satz 2.3: *Wenn ein Ausdruck der Form*

$$I_p = \sum_{q+r=p} a(q, r) \langle F_q, F_r \rangle \tag{2.14}$$

modulo g konforminvariand vom Gewicht -1 ist, so gilt

$$a(q, p-q) = (-1)^q \binom{p}{q-1} \binom{p}{q+1} \tag{2.15}$$

bis auf einen nur von p abhängigen Proportionalitätsfaktor.

Beweis: Nach (2.8) einerseits und wegen der Konforminvarianz andererseits ist der Faktor von $-d\varphi \langle F_q, F_r \rangle$ in $X_\varphi I_p$ gleich

$$q(q+2)\, a(q+1, r) + r(r+1)\, a(q, r+1) = 0$$

$$\text{für } q, r \geqq 1, \quad q + r = p - 1.$$

Die Lösung dieses Rekursionssystems für die Koeffizienten a ergibt die Behauptung ∎

§ 3. Spezialfälle und Beispiele

Die I_p zeigen Symmetrieeigenschaften, wobei die beiden Fälle $p = 0$ und $p = 1$ *modulo* 2 zu unterscheiden sind.

Satz 3.1: *Für gerades $p = 2k$ ist I_p eine Linearkombination der Antikommutatoren*

$$\{F_q, F_{p-q}\} := \langle F_q, F_{p-q} \rangle + \langle F_{p-q}, F_q \rangle \quad mit \quad q = 1, 2, \ldots, k.$$

Für ungerades $p = 2k + 1$ ist I_p eine Linearkombination der Kommutatoren

$$[F_q, F_{p-q}] := \langle F_q, F_{p-q} \rangle - \langle F_{p-q}, F_q \rangle \quad mit \quad q = 1, 2, \ldots, k.$$

Beweis: Bei der Ersetzung $q \to p - q$ multiplizieren sich die Zahlenfaktoren der $\langle F_q, F_{p-q} \rangle$ in I_p mit $(-1)^p$ ∎

Folgerungen: 1. *Für gerades p ist die modulo g genommene Spur im End E-Sinne*

$$\operatorname{Tr} I_p \in C^\infty(\Pi^p T^* M) \quad bzw. \quad \in C^\infty(\Pi^p T^* M/g)$$

eine (nichttriviale) vom Gewicht -1 konforminvariante symmetrische Differentialform. Für ungerades p gilt $\operatorname{Tr} I_p = 0$ *mod g.*

2. *Für ein „abelsches Eichfeld", insbesondere also für das elektromagnetische Feld, verschwinden die I_{2k+1} identisch und liefern keine Information. Die I_{2k} sind für das elektromagnetische Feld symmetrische Differentialformen, d. h. Schnitte von $\Pi^{2k}T^*M$.*

Wir geben die ersten Glieder der Folge der I_p an:

$$-I_2 = \langle F_1, F_1\rangle, \qquad -I_3 = 3[F_1, F_2],$$

$$-I_4 = 2(3\langle F_1, F_3\rangle - 8\langle F_2, F_2\rangle), \qquad -I_5 = 10([F_1, F_4] - 5[F_2, F_3]).$$

Genau diese Anfangsglieder sind in der Literatur zum Huygensschen Prinzip zu finden, allerdings ohne die Vereinbarungen, die bei uns jetzt zur Vereinfachung der Darstellung geführt haben; und zwar für den abelschen Fall I_2 in [4] und I_4 zuerst in [11]; für den allgemeinen Fall siehe [12].

Wegen der Konforminvarianz von F ist I_2 trivialerweise konforminvariant vom Gewicht -1. Andererseits enthält I_2 besonders viel Information. Der bezüglich g spurfreie Anteil von $-\mathrm{Tr}\, I_2$ kann als Energie-Impuls-Tensor des Eichfeldes angesprochen werden. Im Spezialfall $E = T^*M$, $D = \nabla$, $n = 4$, g lorentzsch (in dem allerdings sowohl die Eichkovarianz als auch die Konformkovarianz gebrochen ist) enthält I_2 als einen algebraischen Bestandteil den sogenannten *Superenergietensor* von L. Bel und J. Robinson (siehe dazu [12]). Die Theorie des Huygensschen Prinzips ist ein heuristischer Ausgangspunkt zur Konstruktion der I_p; sie liefert dann natürlicherweise eine Anwendung: Es sei $n = 4$, g lorentzsch, und alle betrachteten Objekte seien sogar analytisch. Dann läßt sich die Folge der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für huygenssches Verhalten des hyperbolischen Differentialoperators Δ auf die Form bringen

$$W - \frac{R}{6} I = 0, \tag{3.1}$$

$$D^\beta F_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.2}$$

$$I_p = 0 \quad mod\,Weyl, mod\, g. \tag{3.3}$$

(Hierbei bedeutet *mod Weyl* die Weglassung von Summanden, welche den Konformkrümmungstensor oder *Weyl*-Tensor bzw. seine Ableitungen als Faktor enthalten.) Ist die Regularität nur C^∞, so sind die Bedingungen (3.1)—(3.3) nur notwendig.

Die Theorie des Huygensschen Prinzips für höhere geradzahlige Dimensionen $n = 2m + 2$ legt nahe, daß es in F quadratische, $End\, E \otimes \Pi^p T^*M$-wertige Konforminvarianten vom Gewicht $-m$ gibt, die genau m Verjüngungen bezüglich g enthalten. Deren Konstruktion ist komplizierter als die der I_p und sicher mit den hier angewandten Methoden allein nicht zu bewältigen.

Wir wollen nun die I_p bzw. I_p *modulo* g für Beispiele mit gegebenem Δ bzw. (g, D) errechnen.

Beispiel 1: Die Mannigfaltigkeit $M = \mathbf{R}^{2N}$ sei mit (globalen) reellen Koordinaten x_k, y_k und mit komplexen Koordinaten $z_k = x_k + iy_k$, $\bar z_k = x_k - iy_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ versehen und $E = M \times \mathbf{R}$ sei das (triviale) Bündel der reellen Skalare. Wir setzen

$$\partial/\partial z_k := \partial/\partial x_k - i\partial/\partial y_k, \qquad \partial/\partial \bar z_k := \partial/\partial x_k + i\partial/\partial y_k,$$

$$\Delta := \Re\mathrm{n} \sum_{k=1}^{N} (\partial/\partial \bar z_k - iz_k)(\partial/\partial z_k + i\bar z_k),$$

und erhalten daraus

$$g = \sum_{k=1}^{N} dz_k\, d\bar{z}_k, \qquad F = i \sum_{k=1}^{N} dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

Dann ist $I_2 = -4g$ und $I_p = 0$ für $p \geqq 3$.

Beweis: Da die Metrik flach und das Eichfeld abelsch ist, fallen die drei Ableitungsbegriffe ∂, D, C in Anwendung auf *End E* zusammen. Da F konstante Komponenten hat, gilt weiter $F_p = 0$ für $p \geqq 2$. Die Eigenschaft $I_2 = -4g$ gilt sogar allgemeiner, wenn g eine Kähler-Metrik und F das Doppelte der zugehörigen Kähler-Form ist ∎

Speziell für $N = 2$ erhalten wir das bereits von J. HADAMARD [9] stammende Beispiel

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial t^2$$
$$+ 2(y\partial/\partial x - x\partial/\partial y + t\partial/\partial z - z\partial/\partial t) + x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

auf welches in [5] hingewiesen wurde.

Beispiel 2: Die Mannigfaltigkeit $M = \mathbf{R}^4$ sei mit (globalen) reellen Koordinaten x^0, x^1, x^2, x^3 und mit der quaternionischen Koordinate $x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k$ versehen, und $E = M \times \mathbf{H}^N$ sei das (triviale) Bündel der quaternionischen N-reihigen Spaltenvektoren. Wir betrachten weiter über M die euklidische Metrik $g = dx\, d\bar{x}$ und als Eichfeld die Klasse der bekannten Instantonen-Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen.

Dann ist $I_p = 0$ *mod* g für $p = 2, 3, \ldots$

Beweis: Die Eichfeldstärke ist selbstdual, d. h. besitzt eine Darstellung

$$F = f_1(dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3) + f_2(dx^0 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^1)$$
$$+ f_3(dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2)$$
$$=: f_1\omega^1 + f_2\omega^2 + f_3\omega^3.$$

Die Ableitungsbegriffe D und C fallen zusammen, und die selbstdualen 2-Formen ω^k ($k = 1, 2, 3$) sind D-konstant, d. h. $D(\omega^k I) = 0$. Deshalb läßt sich die „kovariante Version" von F_p darstellen als

$$F_{\alpha\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}(dx^\alpha \wedge dx^{\alpha_1}) \otimes dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p} = f_k^{(p)}\omega^k.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Bemerkung, daß für zwei beliebige algebrawertige selbstduale 2-Formen

$$F'_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = f_k'\omega^k, \qquad F''_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = f_k''\omega^k$$

eine Proportionalität $F'^{\alpha}_{\cdot\alpha_1} F''_{\alpha\alpha_2}\, dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \sim g$ gilt ∎

Bekanntlich verpflanzt man die „Instantonen" mittels Ein-Punkt-Kompaktifizierung und konformer Transformation (mittels stereographischer Projektion) auf die vierdimensionale Sphäre $S^4 \cong \mathbf{R}^4 \cup \{\infty\}$ (siehe etwa [2]). Nach der „Verpflanzung" ist g nicht mehr flach und E nicht mehr trivial. Die Eigenschaft $I_p = 0$ *modulo* g bleibt aber gerade auf Grund ihrer Konforminvarianz erhalten!

Beispiel 3: Es sei g eine Ebene-Wellen-Metrik (plane wave metric) im Sinne von [3], und $l = l_\alpha\, dx^\alpha$, $n = n_\alpha\, dx^\alpha$ seien lokale 1-Formen mit $\langle l, l\rangle = \langle n, n\rangle = 0$, $\langle l, n\rangle = 1$.

Man kann bekanntlich eine Karte so wählen, daß

$$g = 2dx^0\, dx^1 + g_{ij}(x^0)\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n),$$

$$l = dx^0, \qquad n = dx^1, \qquad l^\# = \partial_1, \qquad n^\# = \partial_0$$

gilt. Weiter sei E das Bündel aller Tensoren einer bestimmten Stufe und $D = \nabla$ = riemannscher Zusammenhang. Es gilt dann eine Darstellung

$$F = 2l \wedge f \quad \text{mit} \quad \langle l, f\rangle = 0,$$

wobei $f = f_\alpha\, dx^\alpha \in C^\infty(T^*M \otimes End\, E)$ linear im riemannschen Krümmungstensor ist.

Es gilt nun

$$I_p = l^p \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \binom{p}{q-1} \binom{p}{q+1} \langle f_q, f_{p-q}\rangle$$

mit der durch

$$f_1 := f, \qquad f_2 := \langle n, \nabla\rangle f,$$

$$f_{p+1} := \langle n, \nabla\rangle f_p + (p^2 - 1)\langle n^2, L\rangle f_{p-1} \quad \text{für } p = 2, 3, \ldots$$

rekursiv definierten Folge $End\, E$-wertiger 1-Formen

$$f_p = (f_p)_\alpha\, dx^\alpha \in C^\infty(T^*M \otimes End\, E).$$

Beweis: Durch vollständige Induktion erhalten wir

$$F_p = (l^\# \otimes f_p - f_p^\# \otimes l)\, l^{p-1}, \quad \langle l, f_p\rangle = 0, \qquad \langle l, F_p\rangle = 0$$

und daraus $\langle F_q, F_{p-q}\rangle = \langle f_q, f_{p-q}\rangle\, l^p$ ∎

Beispiel 4: In einer geeigneten Karte sei

$$g_{\alpha\beta} = \text{const}, \qquad D_\alpha = \partial_\alpha + A_\alpha, \qquad A_\alpha = \text{const}.$$

Die Faserdimension von E bzw. die Reihenzahl der quadratischen Matrizen A_α sei N. Die Feldstärken $F_{\alpha\beta} = [A_\alpha, A_\beta]$ mögen den Yang-Mills-Gleichungen

$$D^\beta F_{\alpha\beta} \equiv [A^\beta, F_{\alpha\beta}] = 0$$

genügen.

Hinreichend für das volle System der Bedingungen

$$I_p = 0 \;\; mod\, g \quad \text{für} \quad p = 2, 3, \ldots$$

ist dann bereits das Teilsystem der Bedingungen mit $p \leq N + 1$.

Beweis: In [12: Satz 6.2] wurde gezeigt, daß in der vorliegenden Situation das System

$$I_p = 0 \;\; mod\, g \quad \text{für} \quad 2 \leq p \leq p_0$$

äquivalent ist zum System

$$(F^\alpha{}_{\alpha_1} x^{\alpha_1})\, X^{p-2} (F_{\alpha\alpha_2} x^{\alpha_2}) = 0 \;\; mod\, g \quad \text{für} \quad 2 \leq p \leq p_0$$

mit $X := A_\alpha x^\alpha$. (Der Beweis in [12] ist unabhängig von der Dimension n und von der Signatur von g.) Die N-reihige Matrix X genügt ihrer eigenen charakteristischen Gleichung

$$X^N + a_1 X^{N-1} + \cdots + a_{N-1} X + a_N I = 0$$

mit skalaren Invarianten $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Folglich lassen sich die Potenzen X^{p-2} als Linearkombinationen von $I, X, \ldots, X^{N-1}$ darstellen, und man kann $p_0 = N + 1$ wählen; die Bedingungen mit $p > N + 1$ liefern keine neue Information ∎

Eine Folgerung aus dem Ergebnis ist, daß für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei $n = 4$ und bei konstanten Koeffizienten von Δ bereits endlich viele Matrizengleichungen notwendig und hinreichend sind.

Zum Abschluß führen wir noch zwei relative Konforminvarianten von Δ bzw. (g, D, W) an, die unter wesentlicher Mitwirkung von W konstruiert werden:

1. *Die sogenannte Cottonsche Invariante von* Δ

$$W - \frac{n-2}{4(n-1)} RI =: W_1 \tag{3.4}$$

ist konforminvariant vom Gewicht -1, d. h. $\overline{W_1} = e^{-2\varphi} W_1$.

Diese wohlbekannte Tatsache läßt sich aus

$$e^{2\varphi}\overline{W} = W + e^{-m\varphi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta e^{m\varphi} I,$$

$$e^{2\varphi}\overline{R} = R + 4\,\frac{n-1}{n-2}\, e^{-m\varphi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta e^{m\varphi}$$

ablesen.

2. *Für Dimensionen* $n = 4k + 2$ *mit* $k = 1, 2, \ldots$ *ist*

$$\left(g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + \frac{n-2}{4(n-1)} RI\right) W_1{}^k =: W_2$$

konforminvariant vom Gewicht $-(k + 1)$. *Beispielsweise erhalten wir für* $n = 6$ *die bekannte Konforminvariante vom Gewicht* -2

$$\left(g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + \frac{R}{5} \cdot I\right) W_1 = W_2.$$

Die Aussage über W_2 ist eine Folgerung aus

Satz 3.2: *Ist* $U \in C^\infty(End\ E)$ *konforminvariant vom Gewicht* ω, *so ist*

$$\Delta_1 U := \left(g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta - \frac{\omega}{n-1} RI\right) U$$

vom Gewicht $\omega - 1$ *und genügt* $X_\varphi \Delta_1 U = (4\omega + n - 2)\, \varphi^\alpha D_\alpha U$.

Beweis: Aus der Voraussetzung an U folgt $g^{\alpha\beta} C_\alpha C'_\beta U = \Delta_1 U$. Folglich treten im konformen Transformationsgesetz von $\Delta_1 U$ nur erste Ableitungen von φ auf; zwischendurch auftretende zweite Ableitungen können, ebenso wie in φ quadratische Terme, bei der Berechnung von $X_\varphi \Delta_1 U$ ignoriert werden ∎

Man schließt nun, daß die Konforminvarianz von $\Delta_1 U$ äquivalent zu $X_\varphi \Delta_1 U = 0$ und dies äquivalent zu $4\omega + n - 2 = 0$ ist.

Anhang: Definitionen und Bezeichnungen

1. Die Funktoren $*$, *End*, $\otimes^p$, Λ^p, Π^p erzeugen aus einem Vektorraum E beziehentlich den dualen Raum, die Endomorphismenalgebra, das p-fache Tensorprodukt, das p-fache alternierende Produkt, das p-fache symmetrische Produkt.

2. Wir definieren die Menge aller formalen Summen

$$\Pi E :\equiv \sum_{p=0}^{\infty} \Pi^p E := \left\{ u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p \mid u_p \in \Pi^p E \right\}.$$

Die natürliche Injektion von $\Pi^p E$ in ΠE sei mit der mengentheoretischen Inklusion identifiziert. Konvergenzfragen treten bei den unendlichen Summen nicht auf, da wir die homogenen Bestandteile $\Pi^p E$ von ΠE als zueinander disjunkt auffassen.

3. Die Multiplikationen in den Algebren *End E*, ΠE, *End* $E \otimes \Pi E$ bleiben unbezeichnet. Die alternierende Multiplikation sei wie üblich mit $\wedge$ bezeichnet.

4. Nach einem bekannten Schema (siehe etwa [1]) werden die Begriffe der Punkte 1 bis 3 von der Kategorie der Vektorräume in die Kategorie der Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit verpflanzt.

5. Die Funktoren T bzw. T^* ordnen einer Mannigfaltigkeit M ihr Tangentialbündel TM bzw. Kotangentialbündel T^*M zu.

6. Ein (infinitesimaler) Zusammenhang in einem Vektorbündel E über M sei mit einer „kovarianten Ableitung" D identifiziert, d. h. mit einer T^*M-wertigen Derivation von $C^\infty(E)$. Wir schreiben auch $D = dx^\alpha D_\alpha$ bezüglich einer lokalen Karte $x \to (x^\alpha)$ von M.

7. Durch Postulierung der Leibnizregel $D(u \circ v) = (Du) \circ v + u \circ (Dv)$ für jede der auftretenden Produktbildungen $\circ$ wird D auf die Vektorbündel ausgedehnt, die sich aus E durch Anwendung der Funktoren der Punkte 1 bis 4 ergeben.

8. Der riemannsche Zusammenhang $\nabla = dx^\alpha \nabla_\alpha$ in TM zur Metrik g ist durch $\nabla \otimes g = 0$ und durch verschwindende Torsion definiert.

9. Aus ∇ in TM und D in E wird in Vektorbündeln des Typs (Funktor$_1$ TM) $\otimes$ (Funktor$_2$ E) mittels der Leibnizregel $D(u \otimes v) = (\nabla u) \otimes v + u \otimes (Dv)$ ein — hier ebenfalls mit D bezeichneter — kombinierter Zusammenhang konstruiert (vergleiche mit Punkt 7). In diesem Sinne seien insbesondere iterierte D-Ableitungen aufzufassen.

10. Ein in $C^\infty(E)$ wirkender linearer Differentialoperator mit dem Hauptteilsymbol

$$\sigma(t)\, u = g^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta u \quad \text{für} \quad t = t_\alpha\, dx^\alpha \in C^\infty(T^*M), \qquad u \in C^\infty(E)$$

heißt ein Differentialoperator mit Laplace-Hauptteil zur Metrik

$$g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad \text{mit} \quad (g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

11. Wir betrachten für jedes feste $x \in M$ die Algebra

$$(\Pi T^*M)(x) :\equiv \text{Faser von } \Pi T^*M \text{ in } x.$$

Die Unteralgebra der bezüglich $g(x)$ spurfreien Elemente ist isomorph zur Faktoralgebra nach dem von $g(x)$ erzeugten Hauptideal. Wir identifizieren die Unteralgebra mit der Faktoralgebra und schreiben dafür $(\Pi T^*M)(x)/g(x)$. Diese Identifizierung wird auch auf die p-homogenen Bestandteile übertragen sowie zu einer Vektorbündel-Konstruktion erweitert. Es ergeben sich die Vektorbündel $\Pi^p T^*M/g$ und das Algebrabündel $\Pi T^*M/g$.

12. Für Pfaffsche Formen oder 1-Formen $t = t_\alpha dx^\alpha$, $s = s_\alpha\, dx^\alpha \in C^\infty(T^*M)$ definieren wir

$$t^p := tt \ldots t \ (p \text{ Faktoren}), \qquad \langle t, s\rangle := g^{\alpha\beta} t_\alpha s_\beta,$$

$$t^\# := t^\alpha \partial_\alpha := (g^{\alpha\beta} t_\beta)\, \partial_\alpha.$$

13. Die Produktbildung

$$\langle F, G\rangle \in C^\infty(End\ E \otimes \Pi T^*M) \quad \text{von} \quad F, G \in C^\infty(End\ E \otimes TM \otimes \Pi T^*M)$$

sei aufzufassen als ...

... mit g gebildetes inneres Produkt bezüglich TM,

... Endomorphismenprodukt bezüglich *End E*,

... äußeres (d. h. symmetrisches) Produkt bezüglich ΠT^*M.

14. Der (riemannsche) Krümmungstensor zu g mit Komponenten $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ sei definiert durch die Ricciidentität $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\, t_\mu =: R_{\alpha\beta\mu\nu} t^\nu$ für $t_\alpha dx^\alpha \in C^\infty(T^*M)$, $t^\alpha := g^{\alpha\beta} t_\beta$. Der Riccitensor $Ric = R_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ sei definiert durch $R_{\alpha\beta} := g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Ferner bezeichne $R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ die Skalarkrümmung und *Weyl* den Konformkrümmungstensor.

15. Es bezeichne *modulo*, bzw. *mod* die Restklassenbildung nach einem Unterraum eines Vektorraumes.

LITERATUR

[1] АТЬЯ, М.: Лекции по К-теории (Пер. с англ.). Изд-во Мир: Москва 1967.

[2] ATIYAH, M. F.: Geometry of Yang-Mills Fields. Accad. Naz. dei Lincei; Scuola Norm.: Pisa 1979.

[3] BALDWIN, O. R., and G. B. JEFFERY: The Relativity Theory of Plane Waves. Proc. Roy. Soc. London A 111 (1926), 95—104.

[4] GÜNTHER, P.: Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus. Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. 100 (1952), Heft 2.

[5] GÜNTHER, P.: Über die Darbouxsche Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten. Math. Nachr. 22 (1960), 285—321.

[6] GÜNTHER, P., und V. WÜNSCH: Zur Theorie konforminvarianter Tensoren. In: Mathematiker-Kongreß der DDR 1981, Vortragsauszüge 2, S. 23—25.

[7] GÜNTHER, P., und V. WÜNSCH: Contributions to a theory of polynomial conformal tensors. (In Vorbereitung.)

[8] GÜNTHER, P., und V. WÜNSCH: On some polynomial conformal tensors. (In Vorbereitung.)

[9] HADAMARD, J.: The problem of diffusion of waves. Ann. of Math. 43 (1942), 510—522.

[10] KULKARNI, R. S.: Index theorems of Atiyah-Bott-Patodi and curvature invariants. Sém. math. sup. Univ. Montreal 1975.

[11] MCLENAGHAN, R. G.: On the validity of Huygens' principle for second order partial differential equations with four independent variables I. Ann. Inst. H. Poincaré A 20 (1974), 153—188.

[12] SCHIMMING, R.: Das Huygenssche Prinzip bei hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für allgemeine Felder. Beitr. z. Analysis 11 (1978), 45—90.

[13] SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus (Grundlehren d. math. Wiss.: Bd. 10). Springer-Verlag: Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954.

[14] WÜNSCH, V.: Über eine Klasse konforminvarianter Tensoren. Math. Nachr. 73 (1976), 37—58.

Manuskripteingang: 30. 12. 1982; in revidierter Fassung: 15. 08. 1983

VERFASSER:

Dr. sc. RAINER SCHIMMING
Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
DDR-2200 Greifswald, Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a