Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (5) (1984), S. 441–455

Трехмерные динамические задачи неклассической теории термоупругости

Т. В. Бурчуладзе

In der Arbeit wird das dynamische Differentialgleichungssystem der nichtklassischen Thermoelastizitätstheorie von Green und Lindsay betrachtet, in dem die endliche Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung durch die Einführung zweier Relaxationszeiten berücksichtigt wird. Über die Herleitung von Integralformeln werden Eindeutigkeitsaussagen bewiesen. Hinsichtlich der Anwendbarkeit potentialtheoretischer Methoden zur Untersuchung der entsprechenden Anfangs-Randwertprobleme werden einige Bemerkungen gemacht.

В работе рассматриваются динамические дифференциальные уравнения неклассической термоупругости в постановке Грина и Линдсея, в которых конечная скорость распространения тепла учитывается путем введения двух постоянных релаксации. С помощью интегральных формул доказываются теоремы единственности. Сделано некоторые замечания о применимости метода потенциала к изучению начально-граничных задач для этих уравнений.

The paper deals with the dynamical differential equations of nonclassical thermoelasticity initiated by Green and Lindsay, which are characterized by using of two different relaxation times for describing the finite velocity of heat flux. Uniqueness theorems are proved by the aid of integral formulas. Some remarks are made on the applicability of potential methods to the study of the related initial boundary value problems.

Введение

В настоящее время интенсивно развивается новое научное направление математической физики — исследование динамических процессов в твердых деформируемых упругих телах в условиях сопряжения различных полей: механических, температурных, диффузионных, электромагнитных и др. Математическая модель указанных физических явлений описывается начально-краевыми задачами для достаточно общих систем дифференциальных уравнений в частных производных; некоторые из них даже не принадлежат известным каноническим типам. Эти вопросы составляют большой и бурно развивающийся раздел современной механики сплошной среды. Следует отметить, что такого рода задачи возникли, в основном, в последнее время, в связи развитием многих отраслей современной техники: атомной энергетики, аэронавтики, ракетной и ядерной технологии и др.

В данной работе будут рассмотрены задачи сопряженной теории термоупругости. Как известно, термоупругость синтезирует две ранее независимо развивающиеся дисциплины: теорию упругости и теорию теплопроводности.

В классической теории термоупругости предполагается, что скорость распространения теплового потока является бесконечно большой. Однако, при изучении динамических температурных напряжений в деформируемых твердых телах, когда инерционным членам в уравнениях движения нельзя пренебречь, возникает необходимость учитывать, что тепло распространяется не бесконечно быстро, а с конечной скоростью; тепловой поток устанавливается в теле не мгновенно, а характеризуется конечным временем релаксации. В настоящее время имеется, по крайней мере, два различных обобщения классической теории термоупругости. Первое обобщение — Грина-Линдсея (Green and Lindsay) [1] базируется на использовании двух постоянных времени релаксации температурного процесса. Второе обобщение — Лорда-Шульмана (Lord and Shulman) [2] допускает лишь одну постоянную времени. Оба обобщения разработаны как попытка исключения (исправленя) парадокса о бесконечности скорости распространения тепла, свойственный классическому случаю.

В предлагаемой работе разработана общая теория разрешимости трехмерных динамических задач для сопряженной системы дифференциальных уравнений теории термоупругости, предложенных Грином и Линдсеем (G-L теория).[1])

1. Основные обозначения и положения

Введем обозначения: $\mathbf{E}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $Ox_1x_2x_3$ — декартова система координат в $\mathbf{E}^3$, $x = (x_k)$, $y = (y_k)$, ... $(k = 1, 2, 3)$ — точки этого пространства, $|x - y| = \left[\sum\limits_{k=1}^{3} (x_k - y_k)\right]^{1/2}$ — расстояние между точками x и y, $\mathscr{D} \subset \mathbf{E}^3$ — конечная область, ограниченная замкнутой поверхностью S, класса $\Lambda_1(\alpha)$, $\alpha > 0$ (поверхность Ляпунова), $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \cup S$, $\mathscr{D}^- = \mathbf{E}^3 \setminus \overline{\mathscr{D}}$ — бесконечная область, $Ц_\infty = \{(x, t) : x \in \mathscr{D}, t \in [0, \infty[\}$ — цилиндр в $\mathbf{E}^4$, t — время, $S_\infty = \{(x, t) : x \in S, t \in [0, \infty[\}$ — боковая поверхность $Ц_\infty$, $n(y) = \big(n_k(y)\big)$ $(k = 1, 2, 3)$ — единичный вектор нормали в точке $y \in S$, направленный вне $\mathscr{D}$, $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$ — элемент объема, d_yS — элемент площади поверхности S в точке $y \in S$, δ_{jk} — символ Кронекера, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $\Delta \equiv \Delta\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ — трехмерный оператор Лапласа, $v(x, t) = (v_1, v_2, v_3) = \|v_k\|_{3\times 1}$ — вектор смещения (одностолбцевая матрица), $v_4(x, t)$ — изменение температуры, $*$ — операция транспонирования, $\sigma_{jk}(x, t)$ — компоненты напряжения, $\varepsilon_{jk}(x, t)$ — компоненты деформации.

Фундаментальная (определяющая) система уравнений и соотношений поля для однородной изотропной линейной термоупругости, предложенная Грином и Линдсеем (учитывающая эффекты „второго звука"), имеет вид [1, 3]:

1. Связь деформации и смещения $(j, k = 1, 2, 3)$:

$$\varepsilon_{jk}(x, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j(x, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(x, t)}{\partial x_j}\right).$$

2. Уравнения движения $(k = 1, 2, 3)$:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{jk}(x, t)}{\partial x_j} + X_k(x, t) = \varrho\,\frac{\partial^2 v_k(x, t)}{\partial t^2}. \tag{1}$$

3. Уравнение энергии:

$$-\operatorname{div} q(x, t) + r(x, t) = C_\varepsilon\left(\frac{\partial v_4}{\partial t} + \tau_0\,\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}\right) + (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\Theta_0\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v.$$

---

[1]) Частный случай этой системы, в котором первая постоянная времени релаксации τ_1 равняется нулю, изучался в работе [7]. В этой работе Л. Енч разработал полную теорию соответствующих задач установившихся колебаний в кусочно-однородных телях при контактном условии соприкосновения без трения и идеальном тепловом контакте (прим. ред.).

4. Обобщенный закон Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{jk}(x, t) = 2\mu\varepsilon_{jk}(x, t) + \left[\lambda \operatorname{div} v - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\left(v_4 + \tau_1 \frac{\partial v_4}{\partial t}\right)\right]\delta_{jk}.$$

5. Уравнение теплопроводности:

$$q(x, t) = -k \operatorname{grad} v_4(x, t).$$

Здесь $q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор теплового потока, $r(x, t)$ — источник тепла; ϱ, λ и μ, α, k и C_ε обозначают соответственно плотность, модули Ляме, коэффициент теплового расширения, проводимость и удельную теплоемкость при нулевой деформации; τ_0 и τ_1 — постоянные релаксации, Θ_0 — фиксированная однородная эталонная температура (температура естественного состояния). Эти постоянные удовлетворяют естественным ограничениям [1, 3]:

$$\begin{gathered}\varrho > 0, \quad k > 0, \quad C_\varepsilon > 0, \quad \alpha > 0, \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0,\\ \tau_1 \geqq \tau_0 \geqq 0, \quad \Theta_0 > 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Если, в частности, $\tau_0 = \tau_1 = 0$, то система (1) значительно упрощается и мы приходим к уравнениям поля классической термоупругости.

Определяющие соотношения (1) относительно v и v_4 дают основную нестационарную динамическую систему дифференциальных уравнений в частных производных обобщенной термоупругости:

$$\begin{gathered}\mu\,\Delta v(x, t) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} v - \gamma \operatorname{grad} v_4 = \varrho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma\tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} v_4 - X(x, t),\\ \Delta v_4(x, t) = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v_4}{\partial t} + \frac{\tau_0}{\varkappa}\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2} + \eta\,\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} v - X_4(x, t),\end{gathered} \tag{3}$$

и для компонент напряжения будем иметь

$$\sigma_{jk}(x, t) = \left(\lambda \operatorname{div} v - \gamma v_4 - \gamma\tau_1 \frac{\partial v_4}{\partial t}\right)\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right), \tag{4}$$

где

$$\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu), \qquad \frac{1}{\varkappa} = \frac{C_\varepsilon}{k}, \qquad \frac{\gamma\Theta_0}{k} = \eta, \qquad \frac{r}{k} = X_4.$$

Наряду (3), будем рассматривать возможные, практически интересные, случаи зависимости $v_k(x, t)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ от времени t:

I. $v_k(x, t) = \operatorname{Re}\left[e^{-ipt} u_k(x, p)\right]$ — установившиеся (стационарные) колебания с частотой $p > 0$;

II. $v_k(x, t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\tau t} u_k(x, \tau)\, d\tau, \qquad \tau = \sigma + iq, \qquad \sigma > 0$ — представление интегралом Лапласа-Меллина (общий динамический случай).

Система (3) (однородная), в обоих случаях, как легко усмотреть, приводится к виду (относительно $u_k(x, \omega)$)

$$\begin{gathered}\mu\,\Delta u(x, \omega) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \gamma_1 \operatorname{grad} u_4 + \varrho\omega^2 u = 0,\\ \Delta u_4(x, \omega) + \frac{i\omega}{\varkappa_0} u_4 + i\omega\eta \operatorname{div} u = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \|u_k\|_{3\times 1}, \qquad \gamma_1 = \gamma(1 - i\omega\tau_1), \qquad \frac{1}{\varkappa_0} = \frac{1}{\varkappa}(1 - i\omega\tau_0) \tag{6}$$

и для компонент напряжения имеем $(i, j = 1, 2, 3)$

$$\sigma_{jk}(x, \omega) = (\lambda \operatorname{div} u - \gamma_1 u_4)\,\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right). \tag{7}$$

При этом $-\omega = p > 0$ в случае I и $\omega = i\tau = -q + i\sigma$ в случае II.

2. Энергетические тождества и формулы Грина

Обозначим [4]:

$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \left\| \mu\delta_{jk}\Delta + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\right\|_{3\times 3}$ — статический оператор Ляме,

$T\left(\frac{\partial}{\partial x}, n(x)\right) \equiv \left\|\mu\delta_{jk}\frac{\partial}{\partial n(x)} + \lambda n_j(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \mu n_k(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right\|_{3\times 3}$ — оператор упругих напряжений. Пусть

$$v = (v_1, v_2, v_3) \equiv = \|v_k\|_{3\times 1} \in C^1(\bar{\mathscr{D}}) \cap C^2(\mathscr{D}),$$

$$w = (w_1, w_2, w_3) = \|w_k\|_{3\times 1} \in C^1(\bar{\mathscr{D}}), \quad v_4 \in C^1(\bar{\mathscr{D}}),$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v \in L_1(\mathscr{D}), \quad S \in Л_1(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Тогда справедливо тождество [4, 5]

$$\int_{\mathscr{D}} [w^*(Av - \gamma \operatorname{grad} v_4) + E(w, v) - \gamma v_4 \operatorname{div} w]\,dx = \int_S w^*(Tv - \gamma n v_4)\,dS, \tag{8}$$

где $E(w, v)$ — известная билинейная форма теории упругости:

$$E(w, v) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\operatorname{div} w \operatorname{div} v + \frac{1}{2}\mu\sum_{p\neq q}\left(\frac{\partial w_p}{\partial x_q} + \frac{\partial w_q}{\partial x_p}\right)\left(\frac{\partial v_p}{\partial x_q} + \frac{\partial v_q}{\partial x_p}\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\mu\sum_{p,q}\left(\frac{\partial w_p}{\partial x_p} - \frac{\partial w_q}{\partial x_q}\right)\left(\frac{\partial v_p}{\partial x_p} - \frac{\partial v_q}{\partial x_q}\right).$$

Теперь будем считать, что $V(x, t) = (v, v_4)$ — регулярное решение основной однородной динамической системы (3): $V \in C^1(Ц_\infty) \cap C^2(Ц_\infty)$ и $w(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}$. В силу тождеств

$$w^*(Av - \gamma \operatorname{grad} v_4) = \frac{\varrho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + \gamma\tau_1\frac{\partial v^*}{\partial t}\operatorname{grad}\frac{\partial v_4}{\partial t},$$

$$E(w, v) = E\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}E(v, v),$$

формула (8) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{D}}\left[\frac{\varrho}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{2}E(v, v)\right]dx + \gamma\tau_1\int_{\mathscr{D}}\frac{\partial v^*}{\partial t}\operatorname{grad}\frac{\partial v_4}{\partial t}\,dx$$
$$- \gamma\int_{\mathscr{D}} v_4\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v\,dx = \int_S \frac{\partial v^*}{\partial t}(Tv - \gamma n v_4)\,dS. \tag{9}$$

Согласно тождества $\frac{\partial v^*}{\partial t}\operatorname{grad}\frac{\partial v_4}{\partial t}=\operatorname{div}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)-\frac{\partial v_4}{\partial t}\operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t}$ и обычной формулы Грина, из (9) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{\varrho}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{2}E(v,v)\right]dx-\gamma\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}v\,dx$$

$$-\gamma\tau_1\int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial v_4}{\partial t}\operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t}\,dx=\int\limits_S\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^*HV\,dS, \tag{10}$$

где $HV\equiv Tv-\gamma nv_4-\gamma\tau_1 n\frac{\partial v_4}{\partial t}$.

Преобразуем интегралы

$$\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}v\,dx,\quad\int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial v_4}{\partial t}\operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t}\,dx.$$

Умножая второе уравнение в (3) в однородном случае на v_4, интегрируя по $\mathscr{D}$ и используя формулу Грина в случае оператора Лапласа, получаем

$$-\eta\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}v\,dx=\int\limits_{\mathscr{D}}\operatorname{grad}^2v_4\,dx-\int\limits_S v_4\frac{\partial v_4}{\partial n}\,dS$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial v_4}{\partial t}\,dx+\frac{\tau_0}{\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}\,dx. \tag{11}$$

Умножая $(3)_2^0$ на $\frac{\partial v_4}{\partial t}$ и поступая аналогично, будем иметь

$$-\eta\int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}v\,dx=\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2dx+\frac{\tau_0}{\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}\,dx$$

$$+\int\limits_{\mathscr{D}}\operatorname{grad}\frac{\partial v_4}{\partial t}\cdot\operatorname{grad}v_4\,dx-\int\limits_S\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial v_4}{\partial n}\,dS. \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (10), получаем формулу

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{\varrho}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{2}E(v,v)\right]dx+\frac{\gamma\tau_1}{\eta\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2dx$$

$$+\frac{\gamma\tau_1\tau_0}{\eta\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}\,dx+\frac{\gamma\tau_1}{\eta}\int\limits_{\mathscr{D}}\operatorname{grad}\frac{\partial v_4}{\partial t}\cdot\operatorname{grad}v_4\,dx$$

$$+\frac{\gamma}{\eta}\int\limits_{\mathscr{D}}\operatorname{grad}^2v_4\,dx+\frac{\gamma}{\eta\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial v_4}{\partial t}\,dx+\frac{\gamma\tau_0}{\eta\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}v_4\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}\,dx$$

$$=\int\limits_S\left[\frac{\partial v^*}{\partial t}HV+\frac{\gamma}{\eta}v_4\frac{\partial v_4}{\partial n}+\frac{\gamma\tau_1}{\eta}\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial v_4}{\partial n}\right]dS. \tag{13}$$

В (13) преобразуем некоторые слагаемые. Имеем

$$\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2,\quad \operatorname{grad}\frac{\partial v_4}{\partial t}\cdot\operatorname{grad} v_4=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}^2 v_4),$$

$$v_4\frac{\partial v_4}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(v_4^2),\qquad v_4\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(v_4^2)-\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2.$$

Поэтому (13) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{\varrho}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{2}E(v,v)+\frac{\gamma\tau_1\tau_0}{2\eta\varkappa}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma\tau_1}{2\eta}|\operatorname{grad} v_4|^2+\frac{\gamma}{2\eta\varkappa}(v_4^2)+\frac{\gamma\tau_0}{2\eta\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}(v_4^2)\right]dx\right\}$$
$$+\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{\gamma(\tau_1-\tau_0)}{\eta\varkappa}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2+\frac{\gamma}{\eta}|\operatorname{grad} v_4|^2\right]dx$$
$$=\int\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial t}\right)HV+\frac{\gamma}{\eta}v_4\frac{\partial v_4}{\partial n}+\frac{\gamma\tau_1}{\eta}\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial v_4}{\partial n}\right]dS. \tag{14}$$

Обозначим

$$\mathfrak{I}_1(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\varrho\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2+E(v,v)+\frac{\gamma\tau_1\tau_0}{\eta\varkappa}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\tau_1}{\eta}|\operatorname{grad} v_4|^2+\frac{\gamma}{\eta\varkappa}(v_4^2)\right]dx, \tag{15}$$

$$\mathfrak{I}_0(t)=\frac{\gamma\tau_0}{2\eta\varkappa}\int\limits_{\mathscr{D}}v_4^2\,dx,$$

$$M_S V=\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial t}\right)HV+\frac{\gamma}{\eta}v_4\frac{\partial v_4}{\partial n}+\frac{\gamma\tau_1}{\eta}\frac{\partial v_4}{\partial t}\frac{\partial v_4}{\partial n}\right]dS.$$

Следовательно, согласно (14), имеем окончательно

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{I}_1(t)+\mathfrak{I}_0'(t)]=-\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{\gamma(\tau_1-\tau_0)}{\eta\varkappa}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2+\frac{\gamma}{\eta}|\operatorname{grad} v_4|^2\right]dx+M_S V. \tag{16}$$

Заметим, что формула (16) справедлива и для бесконечной области $\mathscr{D}^-=\mathbf{E}^3\setminus\overline{\mathscr{D}}$, если вектор $V(x,t)$ удовлетворяет следующему условию убывания на бесконечности

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}V}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\partial t^{\alpha_4}}\right|\leqq\frac{c\,e^{\sigma_0 t}}{1+|x|^{1+|\alpha|}}\qquad(|\alpha|=0,1,2;\ \sigma_0\geqq 0),$$

($\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ — мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$).

Рассмотрим теперь систему (5) и пусть $U=(u,u_4)$-ее регулярное решение $\left(U\in C^1(\overline{\mathscr{D}})\cap C^2(\mathscr{D})\right)$ и $\overline{U}=(\bar u,\bar u_4)$ — комплексно сопряженный вектор. Согласно формулы (8) будем иметь

$$\int_{\mathscr{D}} [-\varrho\omega^2|u|^2 + E(\bar{u}, u) - \gamma_1 u_4 \operatorname{div} \bar{u}]\, dx = \int_S \bar{u}^*[Tu - \gamma_1 n u_4]\, dS. \tag{17}$$

Преобразуем интеграл $-\gamma_1 \int_{\mathscr{D}} u_4 \operatorname{div} \bar{u}\, dx$. Имеем

$$\Delta\bar{u}_4 - \frac{i\bar{\omega}}{\bar{\varkappa}_0}\bar{u}_4 - i\bar{\omega}\eta \operatorname{div} \bar{u} = 0.$$

Умножая на u_4, проинтегрируя и используя обычную формулу Грина, получаем

$$-\int_{\mathscr{D}} |\operatorname{grad} u_4|^2\, dx + \int_S u_4 \frac{\partial\bar{u}_4}{\partial n}\, dS - \frac{i\bar{\omega}}{\bar{\varkappa}_0}\int_{\mathscr{D}} |u_4|^2\, dx - i\bar{\omega}\eta\int_{\mathscr{D}} u_4 \operatorname{div} \bar{u}\, dx = 0.$$

Следовательно,

$$-\gamma_1 \int_{\mathscr{D}} u_4 \operatorname{div} \bar{u}\, dx = \frac{\gamma_1}{i\bar{\omega}\eta}\int_{\mathscr{D}} |\operatorname{grad} u_4|^2\, dx + \frac{\gamma_1}{\bar{\varkappa}_0\eta}\int_{\mathscr{D}} |u_4|^2\, dx - \frac{\gamma_1}{i\bar{\omega}\eta}\int_S u_4 \frac{\partial\bar{u}_4}{\partial n}\, dS. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), будем иметь

$$\int_{\mathscr{D}} \left[-\varrho\omega^2|u|^2 + E(\bar{u}, u) + \frac{\gamma_1}{i\bar{\omega}\eta}|\operatorname{grad} u_4|^2 + \frac{\gamma_1}{\bar{\varkappa}_0\eta}|u_4|^2\right] dx = \int_S \left[\bar{u}^* H_1 U + \frac{\gamma_1}{i\bar{\omega}\eta} u_4 \frac{\partial\bar{u}_4}{\partial n}\right] dS, \tag{19}$$

где $H_1 U = Tu - \gamma_1 n u_4$.

Пусть $\omega > 0$ — действительный параметр (случай стационарных колебаний). В (19) перейдем к комплексно-сопряженному выражению и результат вычтем из (19), получим

$$\left(\frac{\gamma_1}{i\omega\eta} - \frac{\bar{\gamma}_1}{-i\omega\eta}\right)\int_{\mathscr{D}} |\operatorname{grad} u_4|^2\, dx + \left(\frac{\gamma_1}{\bar{\varkappa}_0\eta} - \frac{\bar{\gamma}_1}{\varkappa_0\eta}\right)\int_{\mathscr{D}} |u_4|^2\, dx = \int_S \left\{[\bar{u}^* H_1 U - u^* \overline{H_1 U}] + \frac{\gamma_1}{i\omega\eta} u_4 \frac{\partial\bar{u}_4}{\partial n} + \frac{\bar{\gamma}_1}{i\omega\eta}\bar{u}_4 \frac{\partial u_4}{\partial n}\right\} dS, \tag{20}$$

Но $\dfrac{\gamma_1}{i\omega\eta} + \dfrac{\bar{\gamma}_1}{i\omega\eta} = \dfrac{2\gamma}{i\omega\eta}$, $\quad \dfrac{\gamma_1}{\bar{\varkappa}_0\eta} - \dfrac{\bar{\gamma}_1}{\varkappa_0\eta} = \dfrac{2\gamma\omega}{i\varkappa\eta}(\tau_1 - \tau_0)$.

Следовательно (20) окончательно принимает вид

$$\frac{2\gamma}{i\omega\eta}\int_{\mathscr{D}} |\operatorname{grad} u_4|^2\, dx + \frac{2\gamma\omega(\tau_1 - \tau_0)}{i\eta\varkappa}\int_{\mathscr{D}} |u_4|^2\, dx = \int_S \left\{[\bar{u}^* H_1 U - u^* \overline{H_1 U}] + \frac{\gamma_1}{i\omega\eta} u_4 \frac{\partial\bar{u}_4}{\partial n} + \frac{\bar{\gamma}_1}{i\omega\eta}\bar{u}_4 \frac{\partial u_4}{\partial n}\right\} dS. \tag{21}$$

Пусть теперь $\omega = i\tau = -q + i\sigma$, $\sigma > 0$ (случай псевдоколебания). Этот случай имеет важное вспомогательное значение при изучении нестационарной задачи. Формула (19) принимает вид

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \left[\varrho\tau^2|u|^2 + E(\bar{u} \cdot u) + \frac{\gamma_1}{\eta\bar{\tau}} |\mathrm{grad}\, u_4|^2 + \frac{\gamma_1}{\bar{\varkappa}_0\eta} |u_4|^2 \right] dx$$

$$= \int\limits_{S} \left[\bar{u}^* H_1 U + \frac{\gamma_1}{\eta\bar{\tau}} u_4 \frac{\partial \bar{u}_4}{\partial n} \right] dS, \tag{22}$$

где $\gamma_1 = \gamma(1 + \tau_1 \cdot \tau)$, $\dfrac{1}{\varkappa_0} = \dfrac{1}{\varkappa}(1 + \tau_0 \cdot \tau)$. Обозначим $(\overline{22})$ — комплексно-сопряженное выражение и составим сумму $\bar{\tau}(22) + \tau(\overline{22})$. Так как

$$\bar{\tau}\tau^2 + \tau\bar{\tau}^2 = 2\sigma|\tau|^2, \quad \bar{\tau} + \tau = 2\sigma, \quad \frac{\gamma_1}{\eta} + \frac{\bar{\gamma}_1}{\eta} = \frac{2\gamma}{\eta}(1 + \tau_1\sigma),$$

$$\frac{\bar{\tau}\gamma_1}{\bar{\varkappa}_0\eta} + \frac{\tau\bar{\gamma}_1}{\varkappa_0\eta} = \frac{2\gamma}{\varkappa\eta}\left[(1 + \tau_0\tau_1|\tau|^2)\sigma + (\tau_0 + \tau_1)\sigma^2 + (\tau_1 - \tau_0)q^2\right],$$

то получаем окончательно

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \left[2\sigma|\tau|^2 \varrho |u|^2 + 2\sigma E(\bar{u}, u) + \frac{2\gamma}{\eta}(1 + \tau_1\sigma)|\mathrm{grad}\, u_4|^2 + \frac{2\gamma\tau_{01}}{\varkappa\eta}|u_4|^2 \right] dx$$

$$= \bar{\tau}\mathscr{N}_S U + \tau\overline{\mathscr{N}_S U}, \tag{23}$$

где

$$\mathscr{N}_S U = \int\limits_{S} \left[\bar{u}^* H_1 U + \frac{\gamma_1}{\eta\bar{\tau}} u_4 \frac{\partial \bar{u}_4}{\partial n} \right] dS,$$

$$\tau_{01} = (1 + \tau_0\tau_1|\tau|^2)\sigma + (\tau_1 + \tau_0)\sigma^2 + (\tau_1 - \tau_0)q^2 > 0.$$

Для исследования краевых задач методом потенциала исключительно полезна еще одна обобщающая формула Грина. С этой целью введем дифференциальные (матричные) операторы:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \left\| \begin{matrix} \boxed{A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)}_{3\times 3}, & \boxed{-\gamma\, \mathrm{grad}_x}_{3\times 1} \\ \boxed{0}_{1\times 3}, & \Delta \end{matrix} \right\|_{4\times 4},$$

$$L^0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \left\| \begin{matrix} \boxed{\varrho I \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}}_{3\times 3}, & \boxed{\gamma\tau_1 \dfrac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{grad}_x}_{3\times 1} \\ \boxed{\eta \dfrac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{grad}_x}_{1\times 3}, & \dfrac{1}{\varkappa}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(1 + \tau_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \end{matrix} \right\|_{4\times 4},$$

(I — единичная матрица размера 3×3),

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - L^0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Очевидно, основная однородная нестационарная система (3) запишется в виде $\left(V = (v, v_4)\right)$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) V = 0,$$

а система (5) в виде $\left(U = (u, u_4)\right)$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right) U = 0,$$

где ясно, что

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right) \equiv \left\| \begin{matrix} \boxed{A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \varrho I\omega^2}_{3\times 3}, & \boxed{-\gamma_1 \operatorname{grad}_x}_{3\times 1} \\ \boxed{\eta i\omega \operatorname{grad}_x}_{1\times 3}, & \Delta + \dfrac{i\omega}{\varkappa_0} \end{matrix} \right\|_{4\times 4}$$

Пусть $\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)$ сопряженный с $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)$ оператор

$$\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right) \equiv \left\| \begin{matrix} \boxed{A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \varrho I\omega^2}_{3\times 3}, & \boxed{-i\omega\eta \operatorname{grad}_x}_{3\times 1} \\ \boxed{\gamma_1 \operatorname{grad}_x}_{1\times 3}, & \Delta + \dfrac{i\omega}{\varkappa_0} \end{matrix} \right\|$$

и $U = (u, u_4)$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{u}_4)$ — регулярные в $\mathscr{D}$ векторы. Имеем

$$U^*\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)\tilde{U} - \tilde{U}^*L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)U$$
$$= \left[u^*A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u} - \tilde{u}^*A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right] + \left[u_4\,\Delta\tilde{u}_4 - \tilde{u}_4\,\Delta u_4\right] + \gamma_1 \operatorname{div}(\tilde{u}^*u_4)$$
$$- i\omega\eta \operatorname{div}(u^*\tilde{u}_4).$$

Следовательно, по формуле дивергенции (Гаусса-Остроградского), получаем окончательно

$$\int_{\mathscr{D}} \left[U^*\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)\tilde{U} - \tilde{U}^*L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)U\right] dx$$
$$= \int_S \left[U^*\tilde{R}_1\tilde{U} - \tilde{U}^*R_1U\right] dS, \tag{24}$$

где

$$R_1U = \left(H_1U, \frac{\partial u_4}{\partial n}\right), \quad \tilde{R}_1U = \left(\tilde{H}_1U, \frac{\partial u_4}{\partial n}\right), \quad \tilde{H}_1U = Tu - i\omega\eta n u_4.$$

Формуле (24) можно придать и другой вид. А именно

$$\int_{\mathscr{D}} \left[U^*\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)\tilde{U} - \tilde{U}^*L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)U\right] dx$$
$$= \int_S \left[(\mathscr{Q}U)^*\,\tilde{\mathscr{P}}_1\tilde{U} - (\mathscr{Q}\tilde{U})^*\,\mathscr{P}_1U\right] dS, \tag{25}$$

где

$$\mathscr{P}_1 U = (H_1 U, -u_4), \qquad \mathscr{Q} U = \left(u, \frac{\partial u_4}{\partial n}\right), \qquad \tilde{\mathscr{P}}_1 U = (\tilde{H}_1 U, -u_4).$$

3. Разложение регулярного решения. Свойства характеристических λ-параметров. Основные леммы

Обычным способом доказывается следующее утверждение [5].

Теорема 1: *Вектор $U = (u, u_4) \in C^2(\mathscr{D})$ — решение однородного уравнения* (5) *допускает разложение*

$$\begin{aligned} &U = (u^{(1)} + u^{(2)}; u_4), \\ &(\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u_4 \end{pmatrix} = 0, \qquad (\Delta + \lambda_3^2)\, u^{(2)} = 0, \\ &\operatorname{rot} u^{(1)} = 0, \qquad \operatorname{div} u^{(2)} = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где характеристические постоянные $\lambda_k^2(\omega)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \varrho_0\omega^2(1 + \tau_2) + \frac{i\omega}{\varkappa}(1 + \varepsilon), \quad \lambda_1^2\lambda_2^2 = \varrho_0 \frac{i\omega}{\varkappa}\omega^2 + \omega^4\tau_3, \\ &\lambda_3^2 = \frac{\varrho\omega^2}{\mu}. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь

$$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}, \quad \tau_2 = \frac{\gamma\eta\tau_1}{\varrho} + \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho\varkappa}\tau_0 = \frac{1}{\varrho_0\varkappa}(\varepsilon\tau_1 + \tau_0), \quad \tau_3 = \frac{\varrho_0\tau_0}{\varkappa},$$

$$\varepsilon = \frac{\varkappa\gamma\eta}{\lambda + 2\mu}.$$

Заметим, что параметр $\varepsilon = \dfrac{\varkappa\gamma\eta}{\lambda + 2\mu}$ — физическая константа и для большинства реальных тел $\varepsilon \ll 1$ [6]. Когда $\varepsilon = 0$, реализуется полное разделение полей деформации и температуры и мы имеем раздельную (несопряженную) теорию, при которой из (27) следует

$$\lambda_1^2 = \frac{i\omega}{\varkappa} + \frac{\omega^2\tau_0}{\varkappa}, \qquad \lambda_2^2 = \frac{\varrho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \qquad \lambda_3^2 = \frac{\varrho\omega^2}{\mu}.$$

Ясно, что этот случай не представляет особого интереса и фактически исследование краевых задач сводится к задачам классической теории упругости и теплопроводности в отдельности. Поэтому ниже будем предполагать, что $\varepsilon > 0$.

При исследовании краевых задач для систем (3) и (5) существенно важную роль играют свойства параметров $\lambda_k(\omega)$, зависящих от коэффициентов исходных систем дифференциальных уравнений по формулам (27). Эти свойства описываются следующими леммами.

Лемма 1: *Если $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$ (стационарные колебания для сопряженной системы), то λ_1^2 и λ_2^2 — комплексные числа.*

Доказательство: Допустив противоположное, согласно (27), квадратное уравнение

$$z^2 - \left[\varrho_0\omega^2(1 + \tau_2) + \frac{i\omega}{\varkappa}(1 + \varepsilon)\right] z + \left[\omega^4\tau_3 + \frac{i\omega}{\varkappa}\varrho_0\omega^2\right] = 0$$

должно иметь действительный корень $z = \alpha$, что в свою очередь дает

$$\alpha = \frac{\varrho_0\omega^2}{1+\varepsilon}, \qquad \alpha^2 - \varrho_0\omega^2(1+\tau_2)\,\alpha + \omega^4\tau_3 = 0.$$

Отсюда легко следует противоположное

$$\varrho_0\varepsilon + \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{\varkappa}(\tau_1 - \tau_0) = 0 \quad (\tau_1 - \tau_0 \geqq 0) \blacksquare$$

Заметим здесь же, что если одновременно не удовлетворяются соотношения (что мы и будем предполагать)

$$\tau_2 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \qquad \omega = \frac{1+\varepsilon}{\varkappa\sqrt{\varrho_0^2(1+\tau_2)^2 - 4\tau_3}},$$

тогда $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$.

Таким образом, в случае стационарных колебаний λ_1 и λ_2 — комплексные числа, допускающие два знака и, следовательно, всегда можно считать, что

$$\operatorname{Im}\lambda_k > 0, \quad (k = 1, 2). \tag{28}$$

Лемма 2: *Если $\varepsilon \neq 0$, $\omega = i\tau$, $\tau = \sigma > 0$, то параметры λ_1^2 и λ_2^2 не могут быть неотрицательными.*

Доказательство: Оно непосредственно следует из соотношений $f'(x) > 0$ $(x \geqq 0)$ и $f(0) = \frac{\varrho_0\sigma^3}{\varkappa} + \tau_3\sigma^4 > 0$, где $f(x) \equiv x^2 + \left[\varrho_0(1+\tau_2)\,\sigma^2 + \frac{\sigma}{\varkappa}(1+\varepsilon)\right]x + \left(\frac{\varrho_0}{\varkappa}\sigma^3 + \tau_3\sigma^4\right) \blacksquare$

Лемма 3: *Если $\varepsilon \neq 0$, $\omega = i\tau$, $\tau = \sigma + iq$ $(\sigma > 0, q \neq 0)$, то параметры $z_k = \frac{\lambda_k^2}{\tau}$ $(k = 1, 2)$ не могут быть неотрицательными.*

Доказательство: z_1 и z_2 — согласно (27) — корни квадратного уравнения

$$z^2 + \left[\varrho_0(1+\tau_2)\,\tau + \frac{1+\varepsilon}{\varkappa}\right]z + \left[\frac{\varrho_0\tau}{\varkappa} + \tau_3\tau^2\right] = 0,$$

и если $z = \alpha$ — действительный корень, то будем иметь

$$\alpha = -\frac{1+2\sigma\tau_0}{\varkappa(1+\tau_2)} < 0 \quad (q \neq 0).$$

Таким образом, z_1 и z_2 или комплексные, или же действительные отрицательные числа $\blacksquare$

Легко заметить, что λ_1^2 и λ_2^2 лишь в том случае могут быть положительными числами (что нежелательно), когда $z_k = a_k^2 \cdot \bar{\tau}$, $a_k > 0$ $(k = 1, 2)$, $\bar{\tau} = \sigma - iq$. Следующая лемма исключает и этот случай.

Лемма 4: *Если $\varepsilon \neq 0$, $\omega = i\tau = -q + i\sigma$, $\sigma > 0$, то в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\tau > \sigma_0^*$, где*

$$\sigma_0^* = \max\{\sigma_\varepsilon, 0\}, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{\varrho_0\varkappa[2 - (1+\tau_2)(1+\varepsilon)]}{[\varrho_0\varkappa + (\varepsilon\tau_1 - \tau_0)]^2 + 4\varepsilon\tau_1\tau_0}, \tag{29}$$

параметры λ_k $(k = 1, 2, 3)$ обладают свойствами

1. $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$,

2. $\prod_{k=1}^{3} \lambda_k \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$,

3. $\lambda_k = \lambda_k(\tau)$ *— аналитические функции* τ, *допускающие оценки* $\lambda_k(\tau) = O(|\tau|)$, *при* $\tau \to \infty$.

Доказательство: Для $\lambda_3(\tau) = \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} \cdot i\tau$ эти свойства очевидны в полуплоскости $\operatorname{Re} \tau > 0$. Покажем их справедливость и для λ_1 и λ_2. Имеем

$$z_{1,2} = -\frac{\varrho_0(1 + \tau_2)\,\tau + (1 + \varepsilon)/\varkappa}{2} \pm \sqrt{d}, \tag{30}$$

где

$$d = \frac{1}{4}\left[\varrho_0(1 + \tau_2)\,\tau + \frac{1 + \varepsilon}{\varkappa}\right]^2 - \frac{\varrho_0}{\varkappa}\,\tau(1 + \tau_0\tau). \tag{31}$$

Легко видеть, что нулями дискриминанта $d(\tau)$ являются

$$\tau_{1,2} = \sigma_\varepsilon \pm i\,\frac{\sqrt{|d_1|}}{\frac{1}{\varkappa^2}\,[\varrho_0\varkappa + (\varepsilon\tau_1 - \tau_0)]^2 + 4\varepsilon\tau_1\tau_0},$$

где

$$d_1 = \left[\frac{\varrho_0}{\varkappa}\,(1 + \tau_2)\,(1 + \varepsilon) - 2\,\frac{\varrho_0}{\varkappa}\right]^2 - \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varkappa^2}\left[\varrho_0^2(1 + \tau_2)^2 - \frac{4\varrho_0}{\varkappa}\,\tau_0\right]$$

$$= -4\,\frac{\varrho_0}{\varkappa}\left[\frac{(1 + \varepsilon)}{\varkappa}\,(\tau_1 - \tau_0) + \varrho_0\varepsilon\right] < 0.$$

Отсюда ясно, что если $\operatorname{Re} \tau > \sigma_0^*$, то радикал в (30) не может иметь точек ветвления $(d \neq 0)$ и выбрав соответственно ветви, можем считать, что $z_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ — аналитические функции τ, $z_1 \neq z_2$, $z_k(\tau) = O(|\tau|)$. Следовательно, $\lambda_k^2(\tau) = z_k(\tau) \cdot \tau$ — аналитические функции τ и $\lambda_k^2(\tau) = O(|\tau|^2)$, и так как $z_k \neq 0$, $\tau \neq 0$ можно предполагать, что $\lambda_k(\tau)$ — аналитические функции τ и справедливы оценки $\lambda_k(\tau) = O(|\tau|)$, $k = 1, 2$. Наконец, $z_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ как аналитические функции τ в полуплоскости $\operatorname{Re} \tau > \sigma_0^*$ не могут здесь совпадать с выражениями вида $a_k^2\bar{\tau}$, которые не являются аналитическими функциями τ.

Таким образом, можно констатировать, что в указанной полуплоскости $\lambda_k^2(\tau)$ — или комплексные, или же действительные отрицательные числа, и поэтому, всегда можно считать, что $\operatorname{Im} \lambda_k(\tau) > 0$ $(k = 1, 2)$ ∎

Исследование краевых задач существенно опирается на вышеуказанные леммы.

4. Теоремы единственности.

Фундаментальные решения и основные потенциалы

Построенный математический аппарат позволяет так же, как в классическом случае [5], провести полный математический анализ краевых задач во всех случаях: стационарные колебания, псевдоколебания и общей динамики.

Остановимся вкратце на вопросы единственности решения. Согласно теореме 1 и лемме 1 введем

Определение 1: Регулярное в бесконечной области $\mathscr{D}^- = \mathbf{E}^3 \setminus \overline{\mathscr{D}}$ решение $U = (u^{(1)} + u^{(2)}, u_4)$ однородного уравнения колебания (5) ($\omega > 0$) удовлетворяет условию *термоупругого излучения на бесконечности*, если соблюдены асмптотические оценки

$$\begin{pmatrix} u^{(1)}(x) \\ u_4(x) \end{pmatrix} = o(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{pmatrix} u^{(1)}(x) \\ u_4(x) \end{pmatrix} = O(|x|^{-2}) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$u^{(2)}(x) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial u^{(2)}(x)}{\partial |x|} - i\lambda_3 u^{(2)}(x) = o(|x|^{-1}), \tag{32}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial |x|}$ — производная по направлению радиуса вектора точки x.

Теорема 2: *Регулярный в $\mathscr{D}^-$ вектор $U = (u, u_4) \in C^1(\overline{\mathscr{D}}^-) \cap C^2(\mathscr{D}^-)$ — решение однородной системы колебания* (5) ($\omega > 0$), *удовлетворяющий на бесконечности условию излучения и допустимым однородным краевым условиям* (см. [5]), *есть тождественный нуль в $\mathscr{D}^-$.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из тождества (21), написанного для области $\mathscr{D}_R = \mathscr{D}^- \cap Ш(0, R)$, где $Ш(0, R)$ — шар с центром в начале координат O и радиусом R (см. [5: ст. 242—243]) ∎

Для внутренних задач колебания (для конечной области $\mathscr{D}$) теоремы единственности не имеют места и нарушаются за счет появления дискретного спектра частот собственных колебаний некоторых граничных задач для метагармонического уравнения. Это исследование проводится аналогично случаю классической термоупругости и основывается также на формуле (21) (см. [5: ст. 243]).

Теорема 3: *Регулярный в $\mathscr{D}$ вектор $U \in C^1(\overline{\mathscr{D}}) \cap C^2(\mathscr{D})$ — решение однородной системы уравнений псевдоколебания* (5) ($\omega = i\tau$, $\operatorname{Re} \tau > 0$), *удовлетворяющий одному из допустимых однородных граничных условий на S, есть тождественный нуль.*

Доказательство непосредственно следует из тождества (23) (см. [5: ст. 245]) ∎

В заключении заметим, что теорема 3 остается в силе и для бесконечной области $\mathscr{D}^-$ (внешние задачи), если решение $U = (u, u_4)$ удовлетворяет на бесконечности асимптотическим условиям

$$U = o(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial U}{\partial x_k} = O(|x|^{-2}) \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{33}$$

Заметим, что вид асимптотических условий (32) и (33) обусловлен теоремой 1 и леммами 1 и 4.

Теорема 4: *Регулярный в цилиндре $Ц_\infty$ вектор $V = (v, v_4) \in C^1(\overline{Ц}_\infty) \cap C^2(Ц_\infty)$ — решение однородной нестационарной системы уравнения* (3), *удовлетворяющий однородным начальным условиям* $V|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ *и соответствующим допустимым краевым условиям на S_∞ есть тождественный нуль.*

Доказательство: Оно следует из формулы (16). Действительно, согласно краевым условиям $M_S V = 0$ и мы будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{I}_1(t) + \mathfrak{I}_0'(t)\right] = -\int\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{\gamma(\tau_1 - \tau_0)}{\eta\varkappa}\left(\frac{\partial v_4}{\partial t}\right)^2 + \frac{\gamma}{\eta}\,|\operatorname{grad} v_4|^2\right] dx \leq 0.$$

Следовательно, $\mathfrak{I}_1(t)+\mathfrak{I}_0'(t)$ — невозрастающая функция $t \geqq 0$. С другой стороны, как легко заметить, $\mathfrak{I}_1(0)+\mathfrak{I}_0'(0)=0$, и поэтому, $\mathfrak{I}_1(t)+\mathfrak{I}_0'(t)\leqq 0$ при $t\geqq 0$; и так как $\mathfrak{I}_1(t)\geqq 0$, отсюда получаем $\mathfrak{I}_0'(t)\geqq 0$. Итак, $\mathfrak{I}_0(t)$ — невозрастающая функция t и $\mathfrak{I}_0(0)=0$, что согласно (15) дает $v_4\equiv 0$ $(x\in\mathscr{D},\ t\geqq 0)$. В свою очередь, отсюда следует окончательно $v\equiv 0$ $(x\in\mathscr{D},\ t\geqq 0)$ ∎

Теорема верна и для внешних (для бесконечной области $\mathscr{D}^-$) начально-краевых задач.

Как хорошо известно, для задач сопряженной термоупругости (как стационарных, так и общих динамических) на сегодняшний день имеется детально разработанная математическая теория разрешимости, такая же общая, которая имеется для задач классической теории упругости. Итоговые результаты этого направления изложены в работах [4, 5].

На основании вышеизложенного, дальнейшие исследования показали, что те же методы (метод потенциала, теория многомерных сингулярных интегральных уравнений, интегральные преобразования Фурье и Лапласа-Меллина и др.) позволяют построить общую математическую теорию разрешимости стационарных и нестационарных задач и для проблем сопряженной теории неклассической теории термоупругости, предложенной Грином и Линдсеем.

В наших исследованиях основную роль играет матрица фундаментальных решений рассматриваемого дифференциального оператора и другие сингулярные решения. Заметим, что эти решения строятся явно в элементарных функциях, что особо важно для эффективного и приближенного построения решений.

Матрица фундаментальных решений оператора $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, -i\omega\right)$ имеет вид [5]

$$\begin{aligned}\Phi(x,-i\omega)&=\|\Phi_{kj}(x,-i\omega)\|_{4\times 4}=\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)\varphi(x,-i\omega)\\&=\hat{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)(\Delta+\lambda_3^2)\,\varphi(x,-i\omega)=\hat{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)\phi(x,-i\omega),\end{aligned}$$

где $\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)$ — присоединенная (союзная) с L матрица:

$$\begin{aligned}\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)L\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)&=L\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)\\&=I\cdot\det L\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)=I\cdot\mu^2(\lambda+2\mu)\,(\Delta+\lambda_3^2)\prod_{k=1}^{3}(\Delta+\lambda_k^2),\end{aligned}$$

I — единичная матрица размера 4×4, $\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)=\|\hat{L}_{kj}\|_{4\times 4}$, $\hat{L}_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)$ — алгебраическое дополнение элемента L_{jk} в матрице $L\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)$, $\phi(x,-i\omega)=\sum_{k=1}^{3}a_k\frac{e^{i\lambda_k|x|}}{|x|}$, a_k — вполне определенные постоянные; они подобраны так, чтобы частные производные ϕ 4-ого порядка имели особенность вида $|x|^{-1}$. Справедливо соотношение $\tilde{\Phi}(x,-i\omega)=\Phi^*(-x,-i\omega)$, где $\tilde{\Phi}(x,-i\omega)$ матрица фундаментальных решений сопряженного оператора $\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},-i\omega\right)$.

С помощью фундаментальных решений, как обычно, строятся основные потенциалы неклассической теории термоупругости:

$V(x,\varphi)=\int\limits_S\Phi(x-y,-i\omega)\,\varphi(y)\,d_yS$ — потенциал простого слоя,

$W(x, \varphi) = \int\limits_S \left[\tilde{R}_1\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) \tilde{\Phi}(y - x, -i\omega)\right]^* \varphi(y)\, d_yS$ — потенциал двойного слоя,

$M^{(1)}(x, \varphi) = \int\limits_S \left[\tilde{\mathscr{P}}_1\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) \tilde{\Phi}(y - x, -i\omega)\right]^* \varphi(y)\, d_yS$ и

$M^{(2)}(x, \varphi) = \int\limits_S \left[\mathscr{Q}\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) \tilde{\Phi}(y - x, -i\omega)\right]^* \varphi(y)\, d_yS$ — потенциалы смешанного типа,

$U(x, \psi) = \int\limits_{\mathscr{D}} \Phi(x - y, -i\omega)\, \psi(y)\, dy$ — объемный потенциал.

Исследование этих потенциалов, а также применение в теории краевых задач, на основании математического аппарата, построенного выше, осуществляется так же, как в классической теории термоупругости [4, 5]. Таким образом, все результаты, полученные в [5] по теории классической термоупругости в случае колебаний и псевдоколебаний остаются в силе и в рассматриваемом случае. Что касается нестационарных задач общей динамики, они в теории неклассической термоупругости требуют отдельного исследования, так как например четвертое уравнение системы (3) не параболическое, а гиперболическое уравнение относительно $v_4(x, t)$. Соответствующим образом будут меняться, например, условия ,,согласования" и т. д. [5]. Здесь более подробно на этом останавливаться не будем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Green, A. E., and K. A. Lindsay: Thermoelasticity. J. Elasticity 2 (1972), 1—7.

[2] Lord, H. W., and I. Shulman: A Generalized Theory of Thermoelasticity. J. Mech. Phys. Solids 15 (1967), 299—309.

[3] Ignaczak, J.: A Uniqueness Theorem for Stress-Temperature Equations of Dynamic Thermoelasticity. J. Thermal Stresses 1 (1978), 163—170.

[4] Купрадзе, В. Д., Гегелиа, Т. Г., Башелейшвили, М. О., и Т. В. Бурчуладзе: Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Изд-во Наука 1976.

[5] Купрадзе, В. Д., и Т. В. Бурчуладзе: Динамические задачи теории упругости и термоупругости. Итоги науки и техники: Совр. проб. мат. 7. Москва 1975.

[6] Новацкий, В.: Динамические задачи термоупругости. Москва: Изд-во Мир 1970.

Manuskripteingang: 15. 07. 1983

VERFASSER:

Проф. д-р Тенгиз Владимирович Бурчуладзе
Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе АН ГССР
СССС-380093 Тбилиси, ул. З. Рухадзе 1