Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (5) (1984), S. 457–479

Einige Bemerkungen zur Anfangs-Randwertaufgabe $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t) \Delta u = f$ mit meßbarem Koeffizienten

J. Heinrich

In der vorliegenden Arbeit wird die Anfangs-Randwertaufgabe $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t) \Delta u = f$ mit meßbarem Koeffizienten zunächst für spezielle Gebiete (Würfel) mit einer Modifikation des Banachschen Fixpunktsatzes behandelt. Davon ausgehend erhalten wir eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Gebiete der Klasse O^2. Verschiedene Eigenschaften der Lösung werden betrachtet.

В настоящей работе смешанная краевая задача $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t) \Delta u = f$ исследуется сначала для специальных областей (кубов) с помощью модификации теоремы Банаха о неподвижной точке. Исходя с этого получаем результат о существовании и единственности для областей класса O^2. Рассматриваются некоторые свойства решения.

In the present paper the mixed problem $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t) \Delta u = f$ with measurable coefficient is considered at first for special domains (cubes) by a modification of Banach's fixed point theorem. Starting from this we get an existence and unequiness theorem for domains of the class O^2. Several properties of the solution are discussed.

Wir betrachten eine Anfangs-Randwertaufgabe für die lineare parabolische Differentialgleichung $\partial/\partial t\, u - h(x, t) \Delta u = f$. Lösbarkeitsaussagen für Anfangs-Randwertaufgaben des angegebenen Typs sind, unter starken Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktion (Hölder-Stetigkeit, Differenzierbarkeit), seit langem bekannt (vgl. dazu z. B. die Arbeiten von Dressel [3, 4] und Pogorzelski [9]). Einen Überblick über die in Räumen Hölder-stetig differenzierbarer Funktionen arbeitenden Methoden findet man bei Ladyschenskaja, Solonnikow und Uralzewa [8: Kap. IV, §§ 11–17]. Demgegenüber gibt es kaum Arbeiten, die Aufgaben der angegebenen Art behandeln, wobei die als Lösungen erhaltenen Funktionen Elemente eines Sobolew-Raumes sind und (im Sinne dieses Raumes) alle in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen besitzen. Ladyschenskaja, Solonnikow und Uralzewa [8: Kap. IV, Theorem 9.1] konnten eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage beweisen, für die die Voraussetzung der Stetigkeit der Koeffizientenfunktionen benötigt wurde.

Eine umfangreiche Literatur gibt es zu Anfangs-Randwertaufgaben für Differentialgleichungen der Art $\frac{\partial}{\partial t} u - \operatorname{div} (h \operatorname{grad} u) = f$, wobei häufig tiefliegende Hilfsmittel zur Anwendung gelangen, die oft auch für die Behandlung nichtlinearer Aufgaben geeignet sind (vgl. hierzu z. B. Strauss [10], Henry [7], Zeidler [14]). Mitunter lassen sich Aufgaben der hier interessierenden Art in die dafür entwickelten Konzeptionen einordnen, wie das etwa bei Gajewski [6] und Wloka [13] der Fall ist. Diese Herangehensweise hat jedoch den Nachteil, daß die erhaltenen Lösungen nur schwache Lösungen (in einem geeignet zu definierenden Sinn) sind, d. h., es brauchen nicht alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen im Sinne eines Sobolew-Raumes zu existieren, oder daß wiederum starke Voraussetzungen (Differenzierbarkeit) für die Koeffizienten nötig sind (s. etwa [13: Bsp. 28.2 und 28.3]).

Wir werden in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß die betrachtete Aufgabe in dem auch in [8] benutzten Sobolew-Raum $W_2^{2,1}$ eindeutig lösbar ist. Insbesondere besitzt die Lösung alle in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen und erfüllt diese im Sinne des L_2. Dabei benötigen wir, neben der Forderung der Parabolizität der Aufgabe, lediglich die Meßbarkeit der Funktion h. Neben der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage interessieren wir uns für Eigenschaften der Lösung, z. B. für die Frage, wie sich die Lösung bei einer „Störung" der Koeffizientenfunktion ändert. Die dabei gewonnenen Aussagen werden einen einfachen Zugang zu verschiedenen nichtlinearen Aufgaben eröffnen. Wir werden darauf in einer weiteren Arbeit eingehen.

Wir lösen die betrachtete Aufgabe zunächst für würfelförmige Gebiete. Dazu überführen wir die Aufgabe in eine Fixpunktaufgabe, deren Lösbarkeit sich (für diese speziellen Gebiete) mit Hilfe einer geringfügigen Modifikation des Banachschen Fixpunktsatzes nachweisen läßt. Insbesondere erhalten wir die Lösung der Aufgabe iterativ durch schrittweise Lösung von Aufgaben mit einem konstanten Koeffizienten. Anschließend übertragen wir die erhaltenen Aussagen auf solche Gebiete G, deren Rand in der Klasse O^2 liegt. Diese Bedingung ist etwas schwächer als $\partial G \in C^2$; die Definition findet man in [8: S. 19]. Wir arbeiten dabei mit einer Methode, die für parabolische Aufgaben zuerst von Ladyschenskaja, Solonnikow und Uralzewa [8: Kap. IV, §§ 4–9], für elliptische Aufgaben in ähnlicher Form vorher schon von Browder [2] und Dynin [5] verwendet wurde.

1. Bezeichnungen und Aufgabenstellung

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

G — Abschließung eines beschränkten Gebietes im $\mathbf{R}^n$;
$Q_T := G \times [0, T]$,
$S_T := (\partial G) \times [0, T]$.

Dabei bezeichnet ∂G den Rand von G. Es werden in dieser Arbeit nur solche Mengen G betrachtet, für die ∂G das Lebesgue-Maß Null hat. Damit können die Räume $L_2(G)$ und $L_2(\operatorname{int} G)$, die wie üblich definiert sind, unmittelbar miteinander identifiziert werden. Mit n bezeichnen wir stets die Dimension des betrachteten Raumes ($\mathbf{R}^n$). Wir werden mit folgenden Sobolew-Räumen arbeiten:

$W^{1,2}(G)$ — der wie üblich definierte Raum (s. z. B. [1]);
$W_0^{1,2}(G)$ — Abschließung des Raumes $C_0^\infty(\operatorname{int} G)$ in $W^{1,2}(G)$;
$W_2^{2,1}(Q_T)$ — Raum aller meßbaren Funktionen $u : Q_T \to \mathbf{R}$, die die verallgemeinerten Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} u$, $\frac{\partial}{\partial x_i} u$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} u$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ besitzen und für die

$$\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} := \max_{i,j} \left\{ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} u \right\|_{2,Q_T} \right\} + \max_i \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{2,Q_T} \right\} + \|u\|_{2,Q_T} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} u \right\|_{2,Q_T} < \infty$$

gilt. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{2,Q_T}$ die Norm im Sinne des Raumes $L_2(Q_T)$. Es soll stets $t \in [0, T]$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ sein. Ist M eine Menge und u eine auf einer Obermenge von M definierte Funktion, so bezeichnen wir mit $u|_M$ die Einschränkung von u auf M.

Wir wollen nun die in dieser Arbeit betrachtete Aufgabenstellung formulieren.

(A) Gesucht ist eine Funktion $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$, für die gilt:

$$\text{(A1)} \quad \frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t)\, \Delta u = f(x, t),$$

$$\text{(A2)} \quad u|_G = g,$$

$$\text{(A3)} \quad u|_{S_T} = 0.$$

Dabei sind $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(G)$ und $f \in L_2(Q_T)$ gegebene Funktionen, $h: Q_T \to \mathbf{R}$ ist eine gegebene meßbare Funktion, die der Bedingung $0 < k \leqq h(x, t) \leqq K$ (für fast alle $(x, t) \in Q_T$) genügt. Die Beziehung (A1) ist als Gleichung im Sinne des $L_2(Q_T)$ zu verstehen. Wir wollen vereinbaren, daß alle in der Arbeit vorkommenden Koeffizientenfunktionen die angegebene Ungleichung für dieselben Konstanten k und K erfüllen.

Bevor wir die Aufgabe (A) betrachten, werden wir eine Aufgabe (B) behandeln, die aus (A) dadurch hervorgeht, daß (A2) durch die speziellere Bedingung

$$\text{(B2)} \quad u|_G = 0$$

ersetzt wird.

Die Lösung der Aufgabe (B) werden wir, wie bereits angedeutet, in geeigneter Weise auf die Lösung der folgenden einfachen Aufgabe zurückführen.

(C) Gesucht ist eine Funktion $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$, für die gilt:

$$\text{(C1)} \quad \frac{\partial}{\partial t} u - a\, \Delta u = f(x, t),$$

$$\text{(C2)} \quad u|_G = 0,$$

$$\text{(C3)} \quad u|_{S_T} = 0.$$

Dabei ist $f \in L_2(Q_T)$ und $a > 0$ eine Konstante.

2. Lösung der betrachteten Aufgaben für $G = [0, l]^n$

Wir lösen zunächst die Aufgabe (C) für würfelförmige Gebiete, wobei es uns vor allem auf verschiedene Eigenschaften der Lösung ankommt.

Definition 1: Wir bezeichnen mit m den Multiindex $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, wobei wir stets $m_i = 1, 2, \ldots$ voraussetzen, und mit $|m|$ dessen Betrag, d. h. $|m| := \sum_{i=1}^{n} m_i$. Für einen Multiindex m sei $\varphi_m \in L_2(G)$ gemäß

$$\varphi_m(x) := \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi m_i}{l} x_i \quad \text{und} \quad \lambda_m := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi m_i}{l}\right)^2.$$

Weiter sei $d: W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^{2,1}(Q_T) \to \mathbf{R}$ gemäß

$$d(u, v) := \max \left\{ \max_{i,j} \left\{ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} (u - v) \right\|_{2,Q_T} \right\}, \quad \|\Delta(u - v)\|_{2,Q_T} \right\}.$$

Definition 2: Sei $a > 0$. Für $f \in L_2(Q_T)$ sei $u_{1,f}: Q_T \to \mathbf{R}$ gemäß $u_{1,f}(x, t) := \sum_m c_m(t)\, \varphi_m(x)$. Dabei ist

$$c_m(t) := \int_0^t \int_G \exp\left(-\lambda_m a(t - \tau)\right) f(\xi, \tau)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi\, d\tau.$$

Lemma 1: *Die Reihe für $u_{1,f}$ ist im Sinne des Raumes $L_2(Q_T)$ konvergent, und es gilt $\|u_{1,f}\|_{2,Q_T} \leqq 2^{-1/2} T\, \|f\|_{2,Q_T}$.*

Beweis: a) Für festes $t \in [0, T]$ erhalten wir zunächst

$$\Big\| \sum_m c_m(t)\, \varphi_m(x) \Big\|_{2,G}^2 = \sum_m |c_m(t)|^2$$

$$\leq \sum_m \left(\int_0^t \exp\left(-2\lambda_m a(t-\tau)\right) d\tau \right) \left(\int_0^t \left| \int_G f(\xi, \tau)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi \right|^2 d\tau \right)$$

$$\leq t \int_0^t \sum_m \left| \int_G f(\xi, \tau)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi \right|^2 d\tau = t\, \|f\|_{2,Q_t}^2 \leq t\, \|f\|_{2,Q_T}^2.$$

b) Aus a) erhalten wir $\|u_{1,f}\|_{2,Q_T}^2 \leq \|f\|_{2,Q_T}^2 \int_0^T t\, dt = \frac{1}{2}\, T^2\, \|f\|_{2,Q_T}^2$ ∎

Lemma 2: *Für $1 \leq i, j \leq n$ besitzt $u_{1,f}$ die verallgemeinerte Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} u_{1,f}$. Dabei gilt*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} u_{1,f} \in L_2(Q_T) \quad \text{und} \quad d(u_{1,f}, 0) \leq \frac{1}{a}\, \|f\|_{2,Q_T}.$$

Beweis: a) Sei $p_N(x, t) := \sum_{|m| \leq N} c_m(t)\, \varphi_m(x)$. Nach Lemma 1 ist zunächst $\|p_N - u_{1,f}\|_{2,Q_T} \to 0$.

b) Die Funktionen p_N besitzen die Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_N$ offensichtlich im klassischen Sinne. Sei $f_m(\tau) := \int_G f(\xi, \tau)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi$ und $N < M$. Wir schätzen ab:

$$\int_G \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_N - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_M \right|^2 dx$$

$$= \int_G \left| \sum_{N \leq |m| \leq M} \int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2 f_m(\tau)\, d\tau\, \varphi_m(x) \right|^2 dx$$

$$\leq \sum_{N \leq |m| \leq M} \left(\int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2 d\tau \right)$$

$$\times \left(\int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2 |f_m(\tau)|^2\, d\tau \right)$$

$$\leq \frac{1}{a} \sum_{N \leq |m| \leq M} \int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2 |f_m(\tau)|^2\, d\tau.$$

c) Nun schätzen wir weiter ab:

$$\int_0^T \sum_{N \leq |m| \leq M} \int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2 |f_m(\tau)|^2\, d\tau\, dt$$

$$= \sum_{N \leq |m| \leq M} \int_0^T \int_\tau^T \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2 |f_m(\tau)|^2\, dt\, d\tau \leq \frac{1}{a} \sum_{N \leq |m| \leq M} \int_0^T |f_m(\tau)|^2\, d\tau.$$

d) Aus b) und c) ergibt sich:

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_N - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_M\right\|_{2,Q_T}^2 \leqq \frac{1}{a^2} \sum_{N\leqq|m|\leqq M} \int_0^T |f_m(\tau)|^2 \, d\tau =: c_{N,M}.$$

Wegen $\sum_{N\leqq|m|\leqq M} \int_0^T |f_m(\tau)|^2 \, d\tau \leqq \|f\|_{2,Q_T}^2$ folgt $c_{N,M} \to 0$ für $N, M \to \infty$. Damit ist $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_N$ eine Cauchy-Folge im $L_2(Q_T)$, d. h. $u_{1,f}$ besitzt die verallgemeinerte Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_{1,f}$ und diese ist Element des Raumes $L_2(Q_T)$. Aus den oben angegebenen Abschätzungen ergibt sich unmittelbar

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_{1,f}\right\|_{2,Q_T} \leqq \frac{1}{a} \|f\|_{2,Q_T}.$$

Eine analoge Abschätzung liefert $\|\Delta u_{1,f}\|_{2,Q_T} \leqq \frac{1}{a} \|f\|_{2,Q_T}$.

e) Auf analoge Weise zeigt man die Existenz der gemischten Ableitungen und die Gültigkeit der Ungleichung $\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} u_{1,f}\right\|_{2,Q_T} \leqq \frac{1}{a} \|f\|_{2,Q_T}$ ∎

Lemma 3: *Für* $1 \leqq j \leqq n$ *besitzt* $u_{1,f}$ *die verallgemeinerte Ableitung* $\frac{\partial}{\partial x_j} u_{1,f}$. *Dabei gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_{1,f} \in L_2(Q_T) \text{ und } \left\|\frac{\partial}{\partial x_j} u_{1,f}\right\|_{2,Q_T} \leqq \left(\frac{T}{a}\right)^{1/2} \|f\|_{2,Q_T}.$$

Beweis: Wir wollen zunächst vermerken, daß die Existenz der verallgemeinerten Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} u_{1,f}$ auf Grund von Lemma 2 bereits klar ist. Da es uns aber vor allem auf die im Lemma angegebene Abschätzung ankommt, werden wir „direkt" zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial x_j} p_N$ eine Cauchy-Folge im $L_2(Q_T)$ ist. Wie im Beweis von Lemma 2, Teil b) schätzen wir zunächst ab:

$$\int_G \left|\frac{\partial}{\partial x_j} p_N - \frac{\partial}{\partial x_j} p_M\right|^2 dx \leqq \frac{1}{a} \sum_{N\leqq|m|\leqq M} \int_0^T \int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) |f_m(\tau)|^2 \, d\tau \, dt$$

$$\leqq \frac{1}{a} \sum_{N\leqq|m|\leqq M} \int_0^T \int_0^t |f_m(\tau)|^2 \, d\tau \, dt = \frac{1}{a} \sum_{N\leqq|m|\leqq M} \int_0^T \int_\tau^T |f_m(\tau)|^2 \, dt \, d\tau.$$

Wegen

$$\sum_{N\leqq|m|\leqq M} \int_0^T \int_\tau^T |f_m(\tau)|^2 \, dt \, d\tau \leqq T \|f\|_{2,Q_T}^2$$

ist $\frac{\partial}{\partial x_j} p_N$ eine Cauchy-Folge im $L_2(Q_T)$. Die im Lemma angegebene Abschätzung folgt unmittelbar ∎

Bemerkung 1: Ist $u \in L_2(Q_T)$, so sei $(u)_i \colon [0, l] \to L_2([0, l]^{n-1} \times [0, T])$ gemäß

$$(u)_i \, (y) \, (z_1, \ldots, z_{n-1}, t) := u(z_1, \ldots, z_{i-1}, y, z_i, \ldots, z_{n-1}, t).$$

Aus dem Beweis von Lemma 2, Teil a) und dem Beweis von Lemma 3 ergibt sich, daß die Folge (p_N) gleichmäßig gegen $(u_{1,f})$ konvergiert. Insbesondere ist $u_{1,f}|_{x_t=0} = u_{1,f}|_{x_t=t} = 0$.

Lemma 4: *Die Funktion $u_{1,f}$ besitzt die verallgemeinerte Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} u_{1,f}$. Dabei gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1,f} \in L_2(Q_T) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{1,f} - a\,\Delta u_{1,f} = f.$$

Beweis: a) Seien p_N und $f_m(\tau)$ wie im Beweis von Lemma 2 erklärt. Zunächst ist $\|p_N - u_{1,f}\|_{2,Q_T} \to 0$.

b) Offensichtlich besitzt p_N die verallgemeinerte Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} p_N$, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N(x,t) = \sum_{|m|\leq N} \left(f_m(t) - a \int_0^t \exp\left(-\lambda_m a(t-\tau)\right) f_m(\tau)\, d\tau\, \lambda_m \right) \varphi_m(x)$$
$$= \left(\sum_{|m|\leq N} f_m(t)\, \varphi_m(x) \right) + a\,\Delta p_N.$$

Die Konvergenz $\|\Delta p_N - \Delta u_{1,f}\|_{2,Q_T} \to 0$ wurde bereits gezeigt. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\alpha_N := \int_0^T \int_G \left| \sum_{|m|\leq N} f_m(t)\, \varphi_m(x) - f(x,t) \right|^2 dx\, dt.$$

Für fast alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\int_G \left| \sum_{|m|\leq N} f_m(t)\, \varphi_m(x) - f(x,t) \right|^2 dx \to 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

und

$$\int_G \left| \sum_{|m|\leq N} f_m(t)\, \varphi_m(x) - f(x,t) \right|^2 dx \leq \int_G |f(x,t)|^2\, dx.$$

Daraus folgt $\alpha_N \to 0$ ∎

Folgerung 1: *Aus dem Beweis von Lemma 4 ergibt sich $\left\| \frac{\partial}{\partial t} p_N - \frac{\partial}{\partial t} u_{1,f} \right\|_{2,Q_T} \to 0$. Es folgt, daß (p_N) gleichmäßig gegen $u_{1,f}$ konvergiert, aufgefaßt als Abbildungen $[0, T] \to L_2(G)$. Insbesondere ist $u_{1,f}|_G = 0$.*

Folgerung 2: *Aus Lemma 1–4, Bemerkung 1 und Folgerung 1 ergibt sich: Die Funktion $u_{1,f}$ ist Element des Raumes $W_2^{2,1}(Q_T)$ und erfüllt die Aufgabe (C). Weiter ist*

$$\|u_{1,f}\|_{2,Q_T}^{2,1} \leq c_1(T)\, \|f\|_{2,Q_T}$$

mit $c_1(T) = \frac{1}{a} + \left(\frac{T}{a}\right)^{1/2} + 2^{-1/2}T + 2$. (*Wir beachten die Gültigkeit von* $\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_{1,f} \right\|_{2,Q_T} \leq a\, \|\Delta u_{1,f}\|_{2,Q_T} + \|f\|_{2,Q_T}$.) ∎

Bemerkung 2: Die Lösung von (C) ist im Raum $W_2^{2,1}(Q_T)$ eindeutig. Durch Betrachtung von Faltungen $J_\varepsilon * u$ (Definition s. [1: Kap. II] läßt sich diese Aussage leicht aus dem bekannten Maximumprinzip (vgl. z. B. [12: S. 364]) für klassische Lösungen parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben gewinnen. Wir wollen darauf nicht eingehen, da die Eindeutigkeitsaussage ein Spezialfall eines bekannten Ergebnisses ist: Jede Lösung u von (C) aus $W_2^{2,1}(Q_T)$ liegt insbesondere in dem in

[8] mit $V_2(Q_T)$ bezeichneten Raum und ist verallgemeinerte Lösung von (C) im Sinne von [8: Kap. III, § 1]. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus [8: Kap. III, Theorem 3.1].

Wir wenden uns nun der Lösung der Aufgaben (A) und (B) zu, die wir, wie bereits angedeutet, als Fixpunktaufgaben in $W_2^{2,1}(Q_T)$ behandeln.

Definition 3: Sei $h: Q_T \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die der in der Formulierung der Aufgabe (A) angegebenen Voraussetzung genügt. Wir wählen speziell $a := \frac{1}{2}(k + K)$ und definieren $S_h: W_2^{2,1}(Q_T) \to W_2^{2,1}(Q_T)$ gemäß $S_h u := u_{1,(h-a)\Delta u}$.

Offensichtlich ist S_h linear und nach den betrachteten Eigenschaften der Funktion $u_{1,f}$ beschränkt.

Satz 1: *Für jedes $u_0 \in W_2^{2,1}(Q_T)$ existiert ein $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u = u_0 + S_h u$.*

Beweis: a) Mit Hilfe der in Folgerung 2 angegebenen Abschätzung erhalten wir für $u, v \in W_2^{2,1}(Q_T)$ die Abschätzung

$$\|S_h u - S_h v\|_{2,Q_T}^{2,1} = \|S_h(u - v)\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq c_1(T) \, \|(h - a) \, \Delta(u - v)\|_{2,Q_T}$$
$$\leqq c_1(T) \, a d(u, v) .$$

b) Mit $\varepsilon := \frac{2k}{k + K} \in (0, 1]$ gilt für alle $u, v \in W_2^{2,1}(Q_T)$ die Ungleichung $d(S_h u, S_h v) \leqq (1 - \varepsilon) \, d(u, v)$. Tatsächlich, aus $k \leqq h \leqq K$ folgt $\frac{2k}{k + K} \leqq \frac{h}{a} \leqq \frac{2K}{k + K}$, d. h. $\varepsilon \leqq \frac{h}{a} \leqq 2 - \varepsilon$, also $\left|\frac{h - a}{a}\right| \leqq 1 - \varepsilon$. Mit Lemma 2 erhalten wir dann

$$d(S_h u, S_h v) \leqq \frac{1}{a} \, \|(h - a) \, \Delta(u - v)\|_{2,Q_T} \leqq (1 - \varepsilon) \, \|\Delta(u - v)\|_{2,Q_T} \leqq (1 - \varepsilon) \, d(u, v).$$

c) Für $m = 1, 2, \ldots$ definieren wir $u_m \in W_2^{2,1}(Q_T)$ durch $u_m := u_0 + S_h u_{m-1}$. Mit Hilfe der Ungleichung aus b) zeigt man wie beim Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes, daß $d(u_m, u_r) \to 0$ für $m, r \to \infty$. Aus der in a) hergeleiteten Ungleichung ergibt sich dann $\|u_m - u_r\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq c_1(T) \, a d(u_{m-1}, u_{r-1}) \to 0$ für $m, r \to \infty$. Damit ist (u_m) eine Cauchy-Folge in $W_2^{2,1}(Q_T)$, also $u_m \to u$ in $W_2^{2,1}(Q_T)$. Aus der Stetigkeit von S_h folgt $u = u_0 + S_h u$ ∎

Bemerkung 3: Die Lösung u der Gleichung $u = u_0 + S_h u$ ist eindeutig. Angenommen, es ist $u = u_0 + S_h u$ und $v = u_0 + S_h v$. Dann ist $u - v = S_h(u - v)$. Daraus folgt zunächst $d(u - v, 0) = d\big(S_h(u - v), 0\big) \leqq (1 - \varepsilon) \, d(u - v, 0)$, also $d(u - v, 0) = 0$. Weiter ist $\|u - v\|_{2,Q_T}^{2,1} = \|S_h(u - v)\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq c_1(T) \, a d(u - v, 0) = 0$, also $u = v$.

Satz 2: *Aufgabe* (B) *ist in $W_2^{2,1}(Q_T)$ eindeutig lösbar.*

Beweis: a) Existenz einer Lösung. Nach Satz 1 existiert ein $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u = u_{1,f} + S_h u$. Aus Lemma 2 und Lemma 4 folgt $\frac{\partial}{\partial t} u - a \, \Delta u = f + (h - a) \, \Delta u$, d. h. $\frac{\partial}{\partial t} u - h \, \Delta u = f$. Die Gültigkeit von $u|_G = 0$ und $u|_{S_T} = 0$ ergibt sich aus Folgerung 1 bzw. Bemerkung 1.

b) Eindeutigkeit der Lösung. Sei v eine weitere Lösung von (B) und $w := u - v$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial t} w - h \, \Delta w = 0$, d. h. $\frac{\partial}{\partial t} w - a \, \Delta w = (h - a) \, \Delta w$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Aufgabe (C) (Bemerkung 2) folgt $w = u_{1,(h-a)\Delta w} = S_h w$. Aus Bemerkung 3 folgt $w = 0$ ∎

Wir betrachten nun einige Eigenschaften der Lösung der Aufgabe (B).

Lemma 5: *Die Lösung u der Aufgabe* (B) *erfüllt folgende Ungleichungen:*

1. $\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq c_2(T)\, \|f\|_{2,Q_T}$,

2. $\|u\|_{2,Q_T} \leqq c_3 T\, \|f\|_{2,Q_T}$,

3. $\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{2,Q_T} \leqq c_3 T^{1/2}\, \|f\|_{2,Q_T} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$.

Dabei ist $c_2(T)$ eine für $T \to 0$ beschränkte Funktion; $c_2(T)$ und c_3 sind von h, f und l unabhängig, c_3 ist von T unabhängig.

Beweis: a) Sei (u_m) die im Beweis von Satz 1 konstruierte Folge. Es ist $d(u_{1,f}, u)$ $= d(u_0, u) \leqq \sum_{m=0}^{\infty} d(u_m, u_{m+1}) \leqq \sum_{m=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^m\, d(u_0, u_1) = \frac{1}{\varepsilon}\, d(0, S_h u_0) \leqq \frac{1}{\varepsilon}\, d(0, u_0)$ $= \frac{1}{\varepsilon}\, d(u_{1,f}, 0)$.

b) Mit Teil a) dieses Beweises sowie mit Lemma 2 erhalten wir $\|\Delta u\|_{2Q_T} \leqq d(u, 0)$ $\leqq d(u, u_{1,f}) + d(0, u_{1,f}) \leqq \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) d(0, u_{1,f}) \leqq \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \frac{1}{a}\, \|f\|_{2,Q_T}$.

c) Es ist $\frac{\partial}{\partial t} u - h\, \Delta u = f$, also $\frac{\partial}{\partial t} u - a\, \Delta u = f + (h - a)\, \Delta u$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Aufgabe (C) ergibt sich mit Folgerung 2 bzw. Lemma 1 und Lemma 3:

$$\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq c_1(T)\, (\|f\|_{2,Q_T} + a\, \|\Delta u\|_{2,Q_T}),$$

$$\|u\|_{2,Q_T} \leqq 2^{-1/2} T (\|f\|_{2,Q_T} + a\, \|\Delta u\|_{2,Q_T}),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{2,Q_T} \leqq \left(\frac{T}{a}\right)^{1/2} (\|f\|_{2,Q_T} + a\, \|\Delta u\|_{2,Q_T}).$$

Aus b) folgen nun die behaupteten Ungleichungen ∎

Lemma 6: *Seien u_h, $u_{\tilde h}$ die Lösungen der Aufgabe* (B) *für die Koeffizientenfunktionen h bzw. $\tilde h$. Dann ist*

$$\|u_h - u_{\tilde h}\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq c_1(T) \left(1 + \frac{a}{k}\right) \|(h - \tilde h)\, \Delta u_h\|_{2,Q_T}.$$

Beweis: a) Mit Hilfe von Lemma 2 sowie der im Beweis von Satz 1, Teil b) hergeleiteten Ungleichung erhalten wir zunächst

$$d(u_h, u_{\tilde h}) = d(S_h u_h, S_{\tilde h} u_{\tilde h}) \leqq d(S_h u_h, S_{\tilde h} u_h) + d(S_{\tilde h} u_h, S_{\tilde h} u_{\tilde h})$$

$$\leqq \frac{1}{a}\, \|(h - \tilde h)\, \Delta u_h\|_{2,Q_T} + (1 - \varepsilon)\, d(u_h, u_{\tilde h}),$$

also

$$d(u_h, u_{\tilde h}) \leqq \frac{1}{\varepsilon a}\, \|(h - \tilde h)\, \Delta u_h\|_{2,Q_T} = \frac{1}{k}\, \|(h - \tilde h)\, \Delta u_h\|_{2,Q_T}.$$

b) Mit Folgerung 2 und der im Beweis von Satz 1, Teil a) hergeleiteten Ungleichung können wir weiter abschätzen:

$$\|u_h - u_{\tilde h}\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \|S_h u_h - S_{\tilde h} u_{\tilde h}\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \|S_h u_h - S_{\tilde h} u_h\|_{2,Q_T}^{2,1} + \|S_{\tilde h} u_h - S_{\tilde h} u_{\tilde h}\|_{2,Q_T}^{2,1}$$

$$\leqq c_1(T) \|(h - \tilde h)\, \Delta u_h\|_{2,Q_T} + c_1(T)\, ad(u_h, u_{\tilde h}) \leqq c_1(T) \left(1 + \frac{a}{k}\right) \|(h - \tilde h)\, \Delta u_h\|_{2,Q_T}. \blacksquare$$

Folgerung 3: *Seien u_{h_s} bzw. u_h die Lösungen der Aufgabe* (B) *für die Koeffizientenfunktionen h_s bzw. h. Die Folge (h_s) sei fast sicher konvergent gegen h. Dann ist* $\|u_{h_s} - u_h\|_{2,Q_T}^{2,1} \to 0$.

Dies ergibt sich mit Hilfe der Ungleichung aus Lemma 6 aus dem großen Lebesgueschen Satz $\blacksquare$

Wir kommen nun zur Aufgabe (A), die wir mit Hilfe der schon durchgeführten Überlegungen schnell behandeln können.

Definition 4: Sei $g \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(G)$ und $a > 0$. Wir definieren $u_{0,g}: Q_T \to \mathbf{R}$ gemäß

$$u_{0,g}(x, t) := \sum_m \big(g_m \exp(-\lambda_m a t)\big)\, \varphi_m(x).$$

Dabei ist

$$g_m := \int_G g(\xi)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi.$$

Lemma 7: *Die Funktion $u_{0,g}$ ist Element des Raumes $W_2^{2,1}(Q_T)$ und erfüllt die Aufgabe* (A) *für $h(x, t) = a = \mathrm{const}$ und $f = 0$.*

Beweis: a) Die Konvergenz der Reihe für $u_{0,g}$ im Sinne des $L_2(Q_T)$ ist offensichtlich.

b) Wir zeigen die Existenz und quadratische Integrierbarkeit der verallgemeinerten Ableitung $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_{0,g}$. Sei

$$q_N(x, t) := \sum_{|m| \leqq N} g_m \exp(-\lambda_m a t)\, \varphi_m(x).$$

Wir schätzen ab:

$$\int_0^T \int_G \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} q_N - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} q_M \right|^2 dx\, dt = \int_0^T \sum_{N \leqq |m| \leqq M} g_m^2 \exp(-2\lambda_m a t) \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^4 dt$$

$$\leqq \frac{1}{2a} \sum_{N \leqq |m| \leqq M} g_m^2 \left(\frac{\pi m_j}{l}\right)^2.$$

Dabei ist

$$g_m = \int_G g(x) \prod_{i=1}^n \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi m_i}{l} x_i\, dx$$

$$= -\int_G \left(\frac{l}{\pi m_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} g(x) \left(\prod_{\substack{i=1\\ i \neq j}}^n \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi m_i}{l} x_i\right) \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \cos \frac{\pi m_j}{l} x_j\, dx,$$

also $\sum_m g_m^2 \left(\dfrac{\pi m_j}{l}\right)^2 \leqq (\|g\|_G^{1,2})^2$, wobei $\|\cdot\|_G^{1,2}$ die Norm im Raum $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(G)$ bedeutet.

Damit ist $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} q_N\right)$ eine Cauchy-Folge im $L_2(Q_T)$. Die Existenz der gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_{0,g}$ läßt sich analog zeigen.

c) Existenz und quadratische Integrierbarkeit der verallgemeinerten Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} u_{0,g}$ sowie die Gültigkeit der Beziehung $\frac{\partial}{\partial t} u_{0,g} - a\,\Delta u_{0,g} = 0$ folgen aus

$$\frac{\partial}{\partial t} q_N = \sum_{|m| \leq N} g_m(-\lambda_m) \exp(-\lambda_m a t)\, \varphi_m(x) = a\,\Delta q_N .$$

d) Die Gültigkeit von $u_{0,g}|_G = g$ und $u_{0,g}|_{S_T} = 0$ läßt sich, analog zu den Überlegungen in Bemerkung 1 und Folgerung 1, leicht zeigen ∎

Satz 3: *Aufgabe* (A) *ist in* $W_2^{2,1}(Q_T)$ *eindeutig lösbar.*

Beweis: Mit der speziellen Wahl $a := \frac{1}{2}(k + K)$ erhalten wir die Lösung von (A) als Lösung der Fixpunktaufgabe $u = u_{0,g} + u_{1,f} + S_h u$, die nach Satz 1 in $W_2^{2,1}(Q_T)$ existiert. Die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Lösung von (B) (Satz 2) ∎

Bemerkung 4: Wir wollen vermerken, daß (A) auch ohne Verwendung der Funktion $u_{0,g}$ gelöst werden kann. Sei $u_g \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u_g|_G = g$ und $u_g|_{S_T} = 0$, wobei also nicht notwendig $u_g = u_{0,g}$ gelten muß. Wir lösen die Aufgabe $\frac{\partial}{\partial t} v - h\,\Delta v = f - \left(\frac{\partial}{\partial t} u_g - h\,\Delta u_g\right)$ unter $v|_G = 0$ und $v|_{S_T} = 0$. Dann ist $u := v + u_g$ Lösung der Aufgabe (A).

3. Lösungen für nichtachsenparallele Würfel

Seien $y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}^n$ mit $(y_i, y_j) = \delta_{ij}$; dabei ist $(\cdot, \cdot)$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbf{R}^n$ und δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Wir werden nun die angegebenen Aufgaben für den Fall

$$G = \{x \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq (x, y_i) \leq l \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

betrachten, d. h. G ist ein Würfel, dessen Kanten nicht notwendig zu den Koordinatenachsen parallel sind. Dabei wollen wir beachten, daß die in den Differentialgleichungen vorkommenden (Orts-) Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u$ nach wie vor im bisher benutzten (d. h. in dem durch die Basis $x_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, $x_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $x_n := (0, \ldots, 0, 1)$ definierten) Koordinatensystem zu bilden sind. Ableitungen in dem durch $y_1, \ldots, y_n$ definierten Koordinatensystem bezeichnen wir mit $\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} u$.

Bemerkung 5: Sei $A = (a_{ij})_{n,n}$ diejenige Matrix, die die Basis $y_1, \ldots, y_n$ in die Basis $x_1, \ldots, x_n$ überführt, also $x_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} y_r$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \frac{\partial}{\partial y_r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{r,s=1}^{n} a_{ir} a_{js} \frac{\partial^2}{\partial y_r \partial y_s},$$

insbesondere also $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$. Aus diesen Beziehungen folgt unmittelbar, daß sich die Aussagen der Sätze 2 und 3 sowie von Lemma 5 und Folgerung 3 auf den hier betrachteten Fall übertragen lassen.

4. Lösung der betrachteten Aufgaben für $\partial G \in O^2$

Mit Hilfe der Aussagen der beiden vorangehenden Abschnitte werden wir die Lösbarkeitsaussagen nun auf solche Mengen G übertragen, deren Rand in der Klasse O^2 liegt. Wir stützen uns wesentlich auf die von Ladyschenskaja, Solonnikow und Uralzewa [8] (vgl. dort Kap. IV, §§ 4—9) angegebene Konstruktion. Die im zweiten Abschnitt dieser Arbeit erhaltenen Ergebnisse erlauben, die Methode gegenüber der in [8] angegebenen Variante zu vereinfachen. So können wir auf die Verwendung des dort benutzten Einbettungssatzes verzichten. Wir übernehmen zunächst eine Aussage aus [8].

Lemma 8 (vgl. [8: Kap. IV, § 4]): *Sei $\partial G \in O^2$. Es gibt Zahlen λ_0, β, $c_4 > 0$ sowie $N_0 \in \mathbf{N}$, so daß für jedes $\varepsilon_0 > 0$ ein $\lambda \in (0, \lambda_0]$ und endlich viele Mengen $\omega^{(m)}$ und $\Omega^{(m)}$ mit folgenden Eigenschaften existieren:*

1. $\omega^{(m)} \subseteq \Omega^{(m)} \subseteq G$; $\bigcup\limits_m \omega^{(m)} = \bigcup\limits_m \Omega^{(m)} = G$.

2. *Diejenigen Mengen $\omega^{(m)}$ bzw. $\Omega^{(m)}$, die einen positiven Abstand zu ∂G besitzen (wir bezeichnen die zugehörige Indexmenge mit $\mathfrak{M}$), sind Würfel mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $\xi^{(m)}$ und der Kantenlänge $\beta\lambda$ bzw. $2\beta\lambda$.*

3. *Diejenigen Mengen $\omega^{(m)}$ und $\Omega^{(m)}$, die ∂G berühren (die zugehörige Indexmenge sei $\mathfrak{N}$), sind wie folgt erklärt:*

Sei $\xi^{(m)} \in \partial G$ und $y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}$ eine orthonormierte Basis des $\mathbf{R}^n$, wobei $y_n^{(m)}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor auf ∂G in $\xi^{(m)}$ ist. Weiter sei

$$\tilde{\omega}^{(m)} := \{x \in \mathbf{R}^n |$$

$$-\frac{\lambda}{2} \leqq (\xi^{(m)} - x, y_i^{(m)}) \leqq \frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\lambda}{2} \leqq (\xi^{(m)} - x, y_n^{(m)}) \leqq 0$$

$$(1 \leqq i \leqq n-1)\},$$

$$\tilde{\Omega}^{(m)} := \{x \in \mathbf{R}^n |$$

$$-\lambda \leqq (\xi^{(m)} - x, y_i^{(m)}) \leqq \lambda \quad \text{und} \quad -\lambda \leqq (\xi^{(m)} - x, y_n^{(m)}) \leqq 0$$

$$(1 \leqq i \leqq n-1)\}.$$

Dann ist $\omega^{(m)} = F^{(m)}\tilde{\omega}^{(m)}$ und $\Omega^{(m)} = F^{(m)}\tilde{\Omega}^{(m)}$.
Dabei ist $F^{(m)} : \tilde{\Omega}^{(m)} \to G$ eine eineindeutige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $F^{(m)}\{x \in \tilde{\Omega}^{(m)} | (\xi^{(m)} - x, y_n^{(m)}) = 0\} \subseteq \partial G$,
$F^{(m)}\{x \in \tilde{\Omega}^{(m)} | (\xi^{(m)} - x, y_n^{(m)}) < 0\} \subseteq \operatorname{int} G$.

b) *Für alle $x \in \tilde{\Omega}^{(m)}$ gilt $(x, y_i^{(m)}) = (F^{(m)}x, y_i^{(m)})$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$.*

c) *Für alle $x_1, x_2 \in \tilde{\Omega}^{(m)}$ mit der Eigenschaft $(x_1 - x_2, y_i^{(m)}) = 0$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ gilt $(x_1 - x_2, y_n^{(m)}) = (F^{(m)}x_1 - F^{(m)}x_2, y_n^{(m)})$.*

d) *Bezeichnet $F_n^{(m)}x$ die n-te Koordinate von $F^{(m)}x$ im $(y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)})$-Koordinatensystem und $(F^{(m)})_n^{-1}x$ die n-te Koordinate von $(F^{(m)})^{-1}$, so existieren für $1 \leqq i \leqq n-1$*

die (verallgemeinerten) Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y_i} F_n^{(m)}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} (F^{(m)})_n^{-1}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} F_n^{(m)}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} (F^{(m)})_n^{-1}$$

und fast sicher gilt

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} F_n^{(m)}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial y_i} (F^{(m)})_n^{-1}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} F_n^{(m)}\right| \leqq c_4,$$
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} (F^{(m)})_n^{-1}\right| \leqq c_4.$$

(Wir haben vereinfachend y_i an Stelle von $y_i^{(m)}$ geschrieben.)

4. *Der Durchschnitt von $N_0 + 1$ vielen (paarweise verschiedenen) Mengen $\Omega^{(m)}$ ist leer.*

Satz 4: *Es gibt ein von h und f unabhängiges $T_0 > 0$, so daß die Aufgabe* (B) *für $T \leqq T_0$ in $W_2^{2,1}(Q_T)$ eindeutig lösbar ist.*

Beweis: a) Wir vermerken zunächst einen einfachen funktionalanalytischen Sachverhalt: Seien X, Y Banach-Räume, $A: X \to Y$ und $R: Y \to X$ lineare, beschränkte Operatoren. Sind die Operatoren $AR: Y \to Y$ und $RA: X \to X$ invertierbar, so ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} = (RA)^{-1} R = R(AR)^{-1}$.

b) Wir wählen ein $\varepsilon_0 > 0$. Seien N_0, c_4, λ, $\omega^{(m)}$, $\Omega^{(m)}$ usw. die nach Lemma 8 vorhandenen Zahlen, Mengen usw.

c) Seien $\zeta^{(m)}: G \to [0, 1]$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. $$\zeta^{(m)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \omega^{(m)} \\ 0 & \text{für } x \in G \setminus \Omega^{(m)}. \end{cases}$$

2. $\zeta^{(m)} \in C^2(G)$. Die Beträge der ersten Ableitungen sind durch $\frac{c_5}{\lambda}$, die der zweiten durch $\frac{c_5}{\lambda^2}$ beschränkt. Dabei ist c_5 eine von λ unabhängige Konstante.

Die Existenz solcher Funktionen ist leicht zu zeigen.

Sei nun $\eta^{(m)}: G \to [0, 1]$ gemäß $\eta^{(m)}(x) := \left(\sum_j |\zeta^{(j)}(x)|^2\right)^{-1} \zeta^{(m)}(x)$. Dann ist $\sum_m \eta^{(m)}(x) \times \zeta^{(m)}(x) = 1$; $\eta^{(m)} \in C^2(G)$. Dabei sind die Beträge der ersten Ableitungen durch $\frac{c_6}{\lambda}$, die der zweiten durch $\frac{c_6}{\lambda^2}$ beschränkt, wobei c_6 eine von λ unabhängige Konstante ist.

d1) Ist $\psi^{(m)} \in L_2(G)$ mit $\psi^{(m)}|_{G \setminus \Omega^{(m)}} = 0$, dann ist

$$\left\|\sum_m \psi^{(m)}\right\|_{2,G}^2 = \int_G \left|\sum_m \psi^{(m)}\right|^2 dx \leqq N_0 \int_G \sum_m |\psi^{(m)}|^2 \, dx = N_0 \sum_m \|\psi^{(m)}\|_{2,\Omega^{(m)}}^2.$$

Ist $\psi \in L_2(G)$, so können wir abschätzen:

$$\sum_m \|\psi|_{\Omega^{(m)}}\|_{2,\Omega^{(m)}}^2 = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} |\psi|^2 \, dx \leqq N_0 \int_G |\psi|^2 \, dx = N_0 \|\psi\|_{2,G}^2.$$

d2) Sei $Q_T^{(m)} := \Omega^{(m)} \times [0, T]$. Aus d1) erhalten wir leicht die beiden folgenden Aussagen:

Aus $u^{(m)} \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u^{(m)}|_{Q_T \setminus Q_T^{(m)}} = 0$ folgt

$$\left(\left\|\sum_m u^{(m)}\right\|_{2,Q_T}\right)^2 \leqq c_7 \sum_m \left(\|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}\right)^2.$$

Aus $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ folgt

$$\sum_m (\|u|_{Q_T^{(m)}}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1})^2 \leqq c_7(\|u\|_{2,Q_T}^{2,1})^2 .$$

Dabei ist c_7 eine nur von N_0 abhängige Konstante.

d3) Ebenfalls leicht überzeugt man sich von der Existenz einer für $\varepsilon_0 \to 0$ beschränkten Funktion $c_9(\varepsilon_0)$, so daß die folgende Aussage gilt. Sei zunächst $\tilde{\Omega}_T^{(m)} := \tilde{\Omega}^{(m)} \times [0, T]$. Ist $u^{(m)} \in W_2^{2,1}(Q_T^{(m)})$ und $\tilde{u}^{(m)} \in W_2^{2,1}(\tilde{\Omega}_T^{(m)})$ gemäß $\tilde{u}^{(m)}(x, t) := u^{(m)}(F^{(m)}x, t)$, so ist $\|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1} \leqq c_9(\varepsilon_0)\, \|\tilde{u}^{(m)}\|_{2,\tilde{Q}_T^{(m)}}^{2,1}$, $\|\tilde{u}^{(m)}\|_{2,\tilde{Q}_T^{(m)}}^{2,1} \leqq c_9(\varepsilon_0)\, \|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}$.

In den folgenden Abschnitten dieses Beweises werden wir der Einfachheit halber y_i statt $y_i^{(m)}$ und $F^{(m)}$ statt $F^{(m)}(x)$ schreiben. Ist $w: Q_T^{(m)} \to \mathbf{R}$, so bezeichnen wir mit $w(F^{(m)}) =: \tilde{w}$ die durch $\tilde{w}(x, t) := w(F^{(m)}x, t)$ erklärte Funktion $\tilde{w}: \tilde{Q}_T^{(m)} \to \mathbf{R}$. Ist umgekehrt $\tilde{w}: \tilde{Q}_T^{(m)} \to \mathbf{R}$, so bezeichnet $\tilde{w}\big((F^{(m)})^{-1}\big) =: w$ die durch $w(x, t) := \tilde{w}\big((F^{(m)})^{-1}(x), t\big)$ definierte Funktion $w: Q_T^{(m)} \to \mathbf{R}$.

Ist $f \in L_2(Q_T)$, so werden wir statt $\|f|_{Q_T^{(m)}}\|_{2,Q_T^{(m)}}$ einfach $\|f\|_{2,Q_T^{(m)}}$ schreiben; analog für $w \in W_2^{2,1}(Q_T)$. Der besseren Übersicht wegen werden wir auch geschweifte Klammern benutzen.

d4) Sei $m \in \mathfrak{N}$ und $x \in \tilde{Q}_T^{(m)}$. Leicht überzeugt man sich von der Gültigkeit der Ungleichungen

$$\max_{\sim} \left\{\left|\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right|\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{\lambda} (1 + \varepsilon_0) \max \{c_5, c_6\} =: c_{10}(\lambda, \varepsilon_0)$$

und

$$\max \left\{\left|\frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_j} \left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right|, \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_j} \left(\eta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right|\right\}$$
$$\leqq \left(\frac{1}{\lambda^2} (1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) + \frac{c_4}{\lambda^2}\right) \max \{c_5, c_6\} =: c_{11}(\lambda, \varepsilon_0).$$

d5) Sei ${}^0W_2^{2,1}(Q_T) := \{u \in W_2^{2,1}(Q_T) \mid u|_G = 0 \text{ und } u|_{S_T} = 0\}$. Analog seien die Räume ${}^0W_2^{2,1}(Q_T^{(m)})$ und ${}^0W_2^{2,1}(\tilde{Q}_T^{(m)})$ erklärt. Ist $u^{(m)} \in {}^0W_2^{2,1}(Q_T^{(m)})$, so gilt folgende Abschätzung:

$$\|\eta^{(m)}u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1} \leqq c_8(\varepsilon_0, \lambda, T)\, \|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}.$$

Dabei ist c_8 eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$, so daß für alle $\varepsilon_0 > 0$ und alle $\lambda \in (0, \lambda_0]$ die Ungleichung $c_8(\varepsilon_0, \lambda, T) \leqq \gamma$ für hinreichend kleines T erfüllt ist.

Zum Beweis sei zunächst $m \in \mathfrak{M}$. Mit c) erhalten wir

$$\|\eta^{(m)}u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}$$
$$\leqq 4\|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1} + \frac{c_6}{\lambda}\, \|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}} + \frac{c_6}{\lambda^2}\, \|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}} + \max_i \frac{c_6}{\lambda} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\, u^{(m)}\right\|_{2,Q_T^{(m)}}.$$

Nun beachten wir, daß $u^{(m)}$ die Aufgabe (B) für $f := \dfrac{\partial}{\partial t}\, u^{(m)} - h\, \Delta u^{(m)}$ erfüllt. Aus $\|f\|_{2,Q_T^{(m)}} \leqq (1 + Kn)\, \|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}$ und den in Lemma 5 angegebenen Ungleichungen erhalten wir dann

$$\|\eta^{(m)}u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}$$
$$\leqq 4\|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1} + (1 + Kn) \left(\frac{c_6}{\lambda}\, c_3 T + \frac{c_6}{\lambda^2}\, c_3 T + \frac{c_6}{\lambda}\, c_3 T^{1/2}\right) \|u^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}.$$

Sei nun $m \in \mathfrak{N}$. Mit Hilfe der Ungleichungen aus d3) und d4) läßt sich dieser Fall auf die Situation $\tilde{u}^{(m)} \in {}^0W_2^{2,1}(\tilde{\Omega}_{T^{(m)}})$ zurückführen, die sich wie eben angegeben behandeln läßt.

e1) Sei $A: {}^0W_2^{2,1}(Q_T) \to L_2(Q_T)$ gemäß $Au := \frac{\partial}{\partial t} u - h\,\Delta u$. Offensichtlich ist A linear und beschränkt.

e2) Sei $m \in \mathfrak{M}$. Ist $f^{(m)} \in L_2(Q_{T^{(m)}})$, so sei $R^{(m)}f^{(m)}$ die nach Satz 2 (dessen Aussage nach Bemerkung 5 in der vorliegenden Situation gültig ist) existierende und eindeutig bestimmte Funktion aus ${}^0W_2^{2,1}(Q_{T^{(m)}})$ mit $\frac{\partial}{\partial t}(R^{(m)}f^{(m)}) - h\,\Delta(R^{(m)}f^{(m)}) = f^{(m)}$. Für $f \in L_2(Q_T)$ sei $v^{(m)} := R^{(m)}(\zeta^{(m)}f)$.

e3) Sei $m \in \mathfrak{N}$. Ist $\tilde{f}^{(m)} \in L_2(\tilde{Q}_{T^{(m)}})$, so sei $\tilde{R}^{(m)}\tilde{f}^{(m)}$ diejenige, nach Satz 2 (vgl. wieder Bemerkung 5) existierende Funktion aus ${}^0W_2^{2,1}(\tilde{Q}_{T^{(m)}})$ mit $\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{R}^{(m)}\tilde{f}^{(m)}) - \tilde{h}\,\Delta(\tilde{R}^{(m)} \times \tilde{f}^{(m)}) = \tilde{f}^{(m)}$. Ist $f^{(m)} \in L_2(Q_{T^{(m)}})$, so sei $R^{(m)}f^{(m)} \in {}^0W_2^{2,1}(Q_{T^{(m)}})$ gemäß $R^{(m)}f^{(m)} := [\tilde{R}^{(m)}f^{(m)}(F^{(m)})]\left((F^{(m)})^{-1}\right)$. Für $f \in L_2(Q_T)$ sei $\tilde{v}^{(m)} := \tilde{R}^{(m)}\left(\zeta^{(m)}f(F^{(m)})\right)$ und $v^{(m)} := R^{(m)}(\zeta^{(m)}f)$.

e4) Mit den in e2) und e3) eingeführten Funktionen definieren wir $R: L_2(Q_T) \to {}^0W_2^{2,1}(Q_T)$ gemäß $Rf := \sum_m \eta^{(m)}v^{(m)}$.

f) Sei nun $\delta_i := \begin{cases} 1 & \text{für } i \neq n \\ 0 & \text{für } i = n \end{cases}$. Für $f \in L_2(Q_T)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
ARf - f &= \left(\sum_m \frac{\partial}{\partial t}(\eta^{(m)}v^{(m)}) - h\,\Delta(\eta^{(m)}v^{(m)})\right) - f \\
&= \sum_{m\in\mathfrak{M}} \left[\eta^{(m)}\left(\frac{\partial}{\partial t} v^{(m)} - h\,\Delta v^{(m)}\right) - h\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\eta^{(m)} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\eta^{(m)}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial x_i} v^{(m)}\right)\right)\right] + \sum_{m\in\mathfrak{N}}\left[\eta^{(m)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}^{(m)}\right)\left((F^{(m)})^{-1}\right)\right. \\
&\quad - h\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\eta^{(m)}\right)\left(\tilde{v}^{(m)}((F^{(m)})^{-1})\right)\right. \\
&\quad \left.\left. + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\eta^{(m)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\tilde{v}^{(m)}((F^{(m)})^{-1})\right)\right) + \eta^{(m)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\tilde{v}^{(m)}((F^{(m)})^{-1})\right)\right)\right)\right] - f \\
&= -\sum_{m\in\mathfrak{M}}\left[h\sum_{i=1}^n\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\eta^{(m)}\right)v^{(m)} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\eta^{(m)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v^{(m)}\right)\right)\right] \\
&\quad - \sum_{m\in\mathfrak{N}}\left[h\sum_{i=1}^n\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\eta^{(m)}\right)\left(\tilde{v}^{(m)}((F^{(m)})^{-1})\right)\right.\right. \\
&\quad + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\eta^{(m)}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{v}^{(m)}\right)\left((F^{(m)})^{-1}\right) + \delta_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}(F^{(m)})_n^{-1}\right)\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\tilde{v}^{(m)}\right)\left((F^{(m)})^{-1}\right)\right\} \\
&\quad + \eta^{(m)}\,\delta_i\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}(F^{(m)})_n^{-1}\right)\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\tilde{v}^{(m)}\right)\left((F^{(m)})^{-1}\right)\right.\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial y_i}(F^{(m)})_n^{-1}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\tilde{v}^{(m)}\right)\left((F^{(m)})^{-1}\right)\right\} \\
&\quad \left.\left.\left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}(F^{(m)})_n^{-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\tilde{v}^{(m)}\right)\left((F^{(m)})^{-1}\right)\right\}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Mit c), d1) und den Ungleichungen aus Lemma 5 (vgl. Bemerkung 5) schätzen wir ab:

$$\|ARf - f\|^2_{2,Q_T}$$

$$\leqq N_0K^2 \left[\sum_{m\in\mathfrak{M}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_6}{\lambda^2} \|v^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}} + 2\frac{c_6}{\lambda} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} v^{(m)}\right\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)\right]^2\right.$$

$$+ \sum_{m\in\mathfrak{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_6}{\lambda^2} \|\tilde v^{(m)}\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}} + 2\frac{c_6}{\lambda} \left\{\left\|\frac{\partial}{\partial y_i} \tilde v^{(m)}\right\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}} + \varepsilon_0 \left\|\frac{\partial}{\partial y_n} \tilde v^{(m)}\right\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \varepsilon_0 \left\{\left\|\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n} \tilde v^{(m)}\right\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}} + \varepsilon_0 \left\|\frac{\partial^2}{\partial y_n^2} \tilde v^{(m)}\right\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}\right\} + c_4 \left\|\frac{\partial}{\partial y_n} \tilde v^{(m)}\right\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}\right)\right]^2\right]$$

$$\leqq 6N_0K^2n \left[\sum_{m\in\mathfrak{M}} \left[\left(\frac{c_6}{\lambda^2} c_3T \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 + \left(2\frac{c_6}{\lambda} c_3 \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 T\right]\right.$$

$$+ \sum_{m\in\mathfrak{N}} \left[\left(\frac{c_6}{\lambda^2} c_3T \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 + \left(2\frac{c_6}{\lambda} c_3 \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 T\right.$$

$$+ \left(\varepsilon_0 \frac{c_6}{\lambda} c_3 \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 T + \left(\varepsilon_0 c_2(T) \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2$$

$$\left.\left. + \left(\varepsilon_0^2 c_2(T) \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 + \left(c_4c_3 \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 T\right]\right]$$

$$\leqq 6N_0^2K^2n \max\left\{\left(\frac{c_6}{\lambda^2} c_3T\right)^2, \left(2\frac{c_6}{\lambda} c_3\right)^2 T, \left(\varepsilon_0 \frac{c_6}{\lambda} c_3\right)^2 T, \left(\varepsilon_0 c_2(T)\right)^2,\right.$$

$$\left.\left(\varepsilon_0^2 c_2(T)\right)^2, (c_4c_3)^2\, T\right\} \|f\|^2_{2,Q_T}.$$

g) Für $w \in {}^0W_2^{2,1}(Q_T)$ gilt $RAw - w = \left(\sum\limits_m \eta^{(m)} R^{(m)}(\zeta^{(m)} Aw)\right) - w$. Dabei ist

$$\sum_{m\in\mathfrak{M}} \eta^{(m)} R^{(m)}(\zeta^{(m)} Aw) = \sum_{m\in\mathfrak{M}} \eta^{(m)} \left[R^{(m)}\left(\zeta^{(m)} Aw - A(\zeta^{(m)} w)\right) + \zeta^{(m)} w\right]$$

$$= \sum_{m\in\mathfrak{M}} \eta^{(m)} \left[R^{(m)} \left(-h \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \zeta^{(m)}\right) w + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \zeta^{(m)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} w\right)\right)\right) + \zeta^{(m)} w\right].$$

Weiter ist

$$\sum_{m\in\mathfrak{N}} \eta^{(m)} R^{(m)}(\zeta^{(m)} Aw) = \sum_{m\in\mathfrak{N}} \eta^{(m)} [R^{(m)}(\zeta^{(m)} Aw - A\zeta^{(m)} w) + R^{(m)}(A\zeta^{(m)} w)]$$

mit

$$R^{(m)}(\zeta^{(m)} Aw - A\zeta^{(m)} w) = \left[\tilde R^{(m)}\left((\zeta^{(m)} Aw)\,(F^{(m)}) - (A\zeta^{(m)} w)\,(F^{(m)})\right)\right]\left((F^{(m)})^{-1}\right)$$

$$= \left[\tilde R^{(m)} \left(-h(F^{(m)}) \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \zeta^{(m)}\right)(F^{(m)})\, w(F^{(m)}) + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \zeta^{(m)}\right)(F^{(m)})\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times \left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left(w(F^{(m)})\right) - \delta_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} F_n^{(m)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right\}\right)\right)\right]\left((F^{(m)})^{-1}\right)$$

und

$$R^{(m)}(A\zeta^{(m)}w) = [\tilde{R}^{(m)}(A\zeta^{(m)}w)\,(F^{(m)})]\left((F^{(m)})^{-1}\right) = \Bigg[\tilde{R}^{(m)}\Bigg(\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right)$$

$$- h(F^{(m)})\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right)$$

$$- \delta_i\Bigg\{2\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}F_n{}^{(m)}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}F_n{}^{(m)}\right)\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial y_i}F_n{}^{(m)}\right)\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right)\Bigg\}\Bigg\}\Bigg)\Bigg]\left((F^{(m)})^{-1}\right).$$

Dabei ist

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,(wF^{(m)})\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)w(F^{(m)}) + \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right)$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left(w(F^{(m)})\right)\right) + \zeta^{(m)}(F^{(m)})\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)w(F^{(m)}) + \zeta^{(m)}(F^{(m)})\,\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,w(F^{(m)})\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)w(F^{(m)})$$

$$+ 2\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right) + \zeta^{(m)}(F^{(m)})\left(\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\left(w(F^{(m)})\right)\right).$$

Somit können wir zusammenfassen:

$$RAw - w$$

$$=\sum_{m\in\mathfrak{M}}\eta^{(m)}\left[R^{(m)}\left(-h\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\zeta^{(m)}\,w + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\zeta^{(m)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}w\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$+\sum_{m\in\mathfrak{N}}\eta^{(m)}\Bigg[\tilde{R}^{(m)}\Bigg(-h(F^{(m)})\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\zeta^{(m)}\right)(F^{(m)})\,w(F^{(m)})$$

$$+ 2\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\zeta^{(m)}\right)(F^{(m)})\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left(w(F^{(m)})\right) - \delta_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}F_n{}^{(m)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right)\right\}\Bigg)\Bigg)$$

$$+\tilde{R}^{(m)}\Bigg(h(F^{(m)})\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}F_n{}^{(m)}\right)\Bigg\{2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)w(F^{(m)})$$

$$+ 2\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left(w(F^{(m)})\right)\right) + 2\zeta^{(m)}(F^{(m)})\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\Big\}$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}F_n^{(m)}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)w(F^{(m)}) + \zeta^{(m)}(F^{(m)})\,\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right\}$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial y_i}F_n^{(m)}\right)\Big\{\left(\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)w(F^{(m)})$$
$$+ 2\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\zeta^{(m)}(F^{(m)})\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\left(w(F^{(m)})\right)\right)$$
$$+\zeta^{(m)}(F^{(m)})\left(\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\left(w(F^{(m)})\right)\right)\Big\}\Big)\Big)\Big]\left((F^{(m)})^{-1}\right).$$

Mit c) sowie mit d2)—d5) und den in Lemma 5 enthaltenen Ungleichungen schätzen wir ab:

$$\left(\|RAw - w\|_{2,Q_T}^{2,1'}\right)^2 \leqq c_7 c_8^2(\varepsilon_0, \lambda, T)\, c_2^2(T)\, K^2(1 + nK)^2$$
$$\times\Bigg[\sum_{m\in\mathfrak{N}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{c_5}{\lambda^2}\,c_3T\right)\|w\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1} + 2\,\frac{c_5}{\lambda}\,c_3T^{1/2}\,\|w\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1}\right)\right)^2$$
$$+ c_9^2(\varepsilon_0)\sum_{m\in\mathfrak{N}}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\frac{c_5}{\lambda^2}\,c_3T\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1} + 2\,\frac{c_5}{\lambda}\,\{c_3T^{1/2}\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}$$
$$+ \varepsilon_0 c_3T^{1/2}\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}\} + \varepsilon_0\,\{2c_{11}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}$$
$$+ 4c_{10}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T^{1/2}\|\,w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1} + 2c_2(T)\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}\}$$
$$+ c_4\left\{\frac{c_5}{\lambda}\,c_{10}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1} + c_3T^{1/2}\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}\right\}$$
$$+ \varepsilon_0\Big\{c_{11}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}$$
$$+ 2c_{10}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T^{1/2}\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1} + c_2(T)\,\|w(F^{(m)})\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}\Big\}\Bigg)\Bigg)^2\Bigg]$$
$$\leqq 11c_7^2c_8^2(\varepsilon_0, \lambda, T)\,c_2^2(T)\,K^2(1 + nK)^2\,n\left(c_9^4(\varepsilon_0) + 1\right)$$
$$\times\max\left\{\left(\frac{c_5}{\lambda^2}\,c_3T\right)^2, \left(2\,\frac{c_5}{\lambda}\,c_3\right)^2 T, \left(2\,\frac{c_5}{\lambda}\,c_3\varepsilon_0\right)^2 T, \left(2\varepsilon_0c_{11}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T\right)^2,\right.$$
$$\left.\left(4\varepsilon_0c_{10}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3\right)^2 T, \left(2\varepsilon_0c_2(T)\right)^2, \left(c_4c_{10}(\lambda, \varepsilon_0)\,c_3T\right)^2, (c_3c_4)^2\,T\right\}\left(\|w\|_{2,\tilde Q_T^{(m)}}^{2,1}\right)^2.$$

h) Aus den in f) und g) angegebenen Abschätzungen ist ersichtlich, daß für hinreichend kleine ε_0 und T die Beziehungen $\|AR - Id\| < 1$ und $\|RA - Id\| < 1$ erfüllt sind. Dabei bedeutet Id die identische Abbildung in $L_2(Q_T)$ bzw. in ${}^0W_2^{2,1}(Q_T)$. Die Behauptung folgt nun aus a) ∎

Wir wollen nun zwei Eigenschaften der nach Satz 4 für $T \leqq T_0$ existierenden Lösungen der Aufgabe (B) festhalten. Wir stützen uns z. T. auf die im Beweis von Satz 4 durchgeführten Überlegungen und verwenden auch die dort benutzten Bezeichnungen.

Lemma 9: *Die nach Satz 4 für $T \leqq T_0$ existierende Lösung u der Aufgabe* (B) *erfüllt folgende Ungleichungen:*

1. $\|u\|_{2,Q_T} \leqq \alpha T \, \|f\|_{2,Q_T}$,

2. $\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{2,Q_T} \leqq \alpha T^{1/2} \, \|f\|_{2,Q_T}$, $\qquad (1 \leqq i \leqq n)$

3. $\|u\|^{2,1}_{2,Q_T} \leqq \alpha \, \|f\|_{2,Q_T}$.

Dabei ist α eine von h, f und T unabhängige Konstante.

Beweis: a) Nach den Überlegungen aus dem Beweis von Satz 4 ist

$$u = A^{-1} f = R(AR)^{-1} f = R \left(\sum_{i=0}^{\infty} (Id - AR)^i f \right) = R(f + f_0)$$

mit $f_0 := \sum_{i=1}^{\infty} (Id - AR)^i f$. Dabei ist $\|f_0\|_{2,Q_T} \leqq \beta_0 \, \|f\|_{2,Q_T}$ mit einem von h, f und T unabhängigen β_0.

b) Wir schätzen ab:

$$\|Rf\|^2_{2,Q_T} \leqq N_0 \sum_m \|v^{(m)}\|^2_{2,Q^{(m)}} = N_0 \left(\sum_{m \in \mathfrak{M}} \|v^{(m)}\|^2_{2,Q_T^{(m)}} + \sum_{m \in \mathfrak{N}} \|\tilde{v}^{(m)}\|^2_{2,\tilde{Q}_T^{(m)}} \right)$$
$$\leqq N_0 \left(\sum_m (c_3 T \, \|f\|_{2,Q_T^{(m)}})^2 \right) \leqq N_0^2 c_3^2 T^2 \, \|f\|^2_{2,Q_T}$$

(vgl. den Beweis von Satz 4, Teil d1) und Lemma 5). Eine analoge Abschätzung gilt für f_0. Es folgt:

$$\|u\|_{2,Q_T} = \|R(f + f_0)\|_{2,Q_T} \leqq (1 + \beta_0) \, N_0 c_3 T \, \|f\|_{2,Q_T}.$$

c) Sei nun $1 \leqq i \leqq n$. Wir schätzen ab:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} Rf \right\|^2_{2,Q_T} \leqq N_0 \sum_m \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta^{(m)} v^{(m)}) \right\|^2_{2,Q_T^{(m)}}$$
$$\leqq N_0 \sum_m \left(\frac{c_6}{\lambda} \, \|v^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} v^{(m)} \right\|_{2,Q_T^{(m)}} \right)^2.$$

Dabei ist für $m \in \mathfrak{N}$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} v^{(m)} \right\|_{2,Q_T^{(m)}} \leqq n^2 \max_j \left\| \frac{\partial}{\partial y_i} v^{(m)} \right\|_{2,Q_T^{(m)}}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial y_i} v^{(m)} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\tilde{v}^{(m)}((F^{(m)})^{-1}) \right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \tilde{v}^{(m)} \right) \left((F^{(m)})^{-1} \right) + \delta_j \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \tilde{v}^{(m)} \right) \left((F^{(m)})^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (F^{(m)})_n^{-1}.$$

Also folgt

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} v^{(m)} \right\|_{2,Q_T^{(m)}} \leqq n^2 (c_3 T^{1/2} \, \|f\|_{2,Q_T^{(m)}} + c_3 T^{1/2} \varepsilon_0 \, \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}).$$

Somit erhalten wir:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} Rf\right\|_{2,Q_T}^2 \leqq N_0 \left[\sum_{m\in\mathfrak{M}} \left(\frac{c_6}{\lambda} c_3T \|f\|_{2,Q_T^{(m)}} + c_3T^{1/2} \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2 + \sum_{m\in\mathfrak{N}} \left(\frac{c_6}{\lambda} c_3T \|f\|_{2,Q_T^{(m)}} + n^2c_3T^{1/2}(1+\varepsilon_0) \|f\|_{2,Q_T^{(m)}}\right)^2\right]$$

$$\leqq 2N_0^2 \max\left\{\left(\frac{c_6}{\lambda} c_3T\right)^2, c_3^2T, \left(n^2c_3(1+\varepsilon_0)\right)^2 T\right\} \|f\|_{2,Q_T}^2.$$

Eine analoge Abschätzung gilt für f_0. Es folgt:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u\right\|_{2,Q_T} = \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} R(f+f_0)\right\|_{2,Q_T} \leqq \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} Rf\right\|_{2,Q_T} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} Rf_0\right\|_{2,Q_T}$$

$$\leqq 2N_0(1+\beta_0) \max\left\{\frac{c_6}{\lambda} c_3T, c_3T^{1/2}, n^2c_3(1+\varepsilon_0) T^{1/2}\right\} \|f\|_{2,Q_T}.$$

d) Es ist

$$(\|Rf\|_{2,Q_T}^{2,1})^2 \leqq c_7c_8^2(\varepsilon_0, \lambda, T) \sum_m (\|v^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1})^2 \leqq c_7c_8^2(\varepsilon_0, \lambda, T) \Big(\sum_{m\in\mathfrak{M}} (\|v^{(m)}\|_{2,Q_T^{(m)}}^{2,1})^2$$

$$+ c_9^2(\varepsilon_0) \sum_{m\in\mathfrak{N}} (\|\tilde{v}^{(m)}\|_{2,\tilde{Q}_T^{(m)}}^{2,1})^2\Big) \leqq c_7c_8^2(\varepsilon_0, \lambda, T) \left(1 + c_9^2(\varepsilon_0)\right) c_2^2(T) N_0 \|f\|_{2,Q_T}^2.$$

(Vgl. den Beweis von Satz 4, Teile d1)—d3) und d5) sowie Lemma 5.) Mit Hilfe der analogen Abschätzung für f_0 ergibt sich die Behauptung wie in b) bzw. c) ∎

Satz 5: *Sei $T \in (0, \infty)$. Aufgabe* (A) *ist in $W_2^{2,1}(Q_T)$ eindeutig lösbar.*

Beweis: a) Wir überlegen uns zunächst, daß die Aufgabe (A) für $T \leqq T_0$ eindeutig lösbar ist. Ausgehend von der Lösbarkeit der Aufgabe (B) für jedes $f \in L_2(Q_T)$ (Satz 4) läßt sich eine Lösung der Aufgabe (A), wie in Bemerkung 4 angegeben, gewinnen. Die Existenz einer Funktion $u_g \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u_g|_G = g$ und $u_g|_{S_T} = 0$ folgt z. B. aus [8: Kap. III, Theorem 6.1]. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung der Aufgabe (B) (Satz 4).

b) Wir zeigen die eindeutige Lösbarkeit von (A) für $T \leqq \frac{3}{2} T_0$. Nach a) existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in W_2^{2,1}(Q_{T_0})$ mit $u|_G = g$, $u|_{S_T} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t} u - (h|_{Q_T}) \Delta u = f|_{Q_T}$. Da $u(\cdot, t)$ für fast alle $t \in [0, T_0]$ im Raum $\{w \in W^{2,2}(G) \mid w|_{\partial G} = 0\} \subseteqq W_0^{1,2}(G)$ liegt, gibt es ein $T_1 \in \left[\frac{1}{2} T_0, T_0\right)$ mit $u(\cdot, T_1) =: g_1 \in W_0^{1,2}(G)$. Nach a) gibt es nun eine Funktion $u_1 \in W_2^{2,1}(G \times [T_1, T_1 + T_0])$ mit $u_1|_{G\times\{T_1\}} = g_1$, $u_1|_{\partial G\times[T_1,T_1+T_0]} = 0$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1 - (h|_{G\times[T_1,T_1+T_0]}) \Delta u_1 = f|_{G\times[T_1,T_1+T_0]}.$$

Da die Einschränkung von u_1 auf $G \times [T_1, T_0]$ eindeutig bestimmt ist, gilt $u_1|_{G\times[T_1,T_0]} = u|_{G\times[T_1,T_0]}$. Damit ist $v\colon Q_{(3/2)T_0} \to \mathbf{R}$ gemäß

$$v(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & \text{für } x \leqq T_1 \\ u_1(x, t) & \text{für } x \geqq T_1 \end{cases}$$

Lösung der Aufgabe (A) aus $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $w \in W_2^{2,1}(Q_{(3/2)T_0})$ eine weitere Lösung von (A). Zunächst existiert ein $T_2 \in (T_1, T_0)$ mit $v(\cdot, T_2) \in W_0^{1,2}(G)$ und $w(\cdot, T_2) \in W_0^{1,2}(G)$. Nach a) ist $v|_{G\times[0,T_0]} = w|_{G\times[0,T_0]}$, insbesondere $v(\cdot, T_2) = w(\cdot, T_2)$. Wiederum aus a) folgt dann $v|_{G\times[T_2,(3/2)T_0]} = w|_{G\times[T_2,(3/2)T_0]}$.

c) Die Fortsetzung des in b) angegebenen Verfahrens liefert die Behauptung ∎

Wir übertragen nun die dritte Ungleichung aus Lemma 9 auf die nach Satz 5 existierenden Lösungen der Aufgabe (B). (Die beiden anderen Ungleichungen von Lemma 9 sind ohnehin nur für „kleine" T von Interesse.)

Lemma 10: *Sei $T \in (0, \infty)$. Die nach Satz 5 existierende Lösung u der Aufgabe* (B) *erfüllt die Ungleichung $\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \gamma \|f\|_{2,Q_T}$. Dabei ist γ eine von h und f unabhängige Konstante.*

Beweis: Wir zeigen die Gültigkeit der Aussage wieder für $T \leqq \frac{3}{2} T_0$ und stützen uns wiederum auf die im Beweis von Satz 5 durchgeführte Konstruktion, wobei wir auch die dort verwendeten Bezeichnungen benutzen. Nach Lemma 9 ist $\|u\|_{2,Q_{T_0}}^{2,1} \leqq \alpha \|f\|_{2,Q_{T_0}}$. Offensichtlich existiert ein $T_1 \in \left[\frac{1}{2} T_0, T_0\right)$ mit $u(\cdot, T_1) =: g_1 \in W_0^{1,2}(G) \cap W^{2,2}(G)$ und $\|g_1\|_G^{2,2} \leqq \gamma_0 \left(\frac{2}{T_0}\right)^{1/2} \alpha \|f\|_{2,Q_{T_0}}$. Wir wählen nun eine Funktion $u_{g_1} \in W_2^{2,1}(G \times [T_1, T_1 + T_0])$ mit $\|u_{g_1}\|_{2,G\times[T_1,T_1+T_0]}^{2,1} \leqq \gamma_1 \left(\frac{2}{T_0}\right)^{1/2} \alpha \|f\|_{2,Q_T}$; dabei sind γ_0, γ_1 von f und h unabhängige Konstanten. Nun konstruieren wir $u_1 \in W_2^{2,1}(G \times [T_1, T_1 + T_0])$ auf die im Beweis von Satz 5 angegebene Weise. Aus Lemma 9 folgt

$$\begin{aligned}&\|u_1\|_{2,G\times[T_1,T_1+T_0]}^{2,1}\\ &\leqq \alpha \left(\|f\|_{2,G\times[T_1,T_1+T_0]} + \left\|\frac{\partial}{\partial t} u_{g_1} - h\,\Delta u_{g_1}\right\|_{2,G\times[T_1,T_1+T_0]}\right) + \|u_{g_1}\|_{2,G\times[T_1,T_1+T_0]}^{2,1}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der oben angegebenen Abschätzung für $\|u_{g_1}\|_{2,G\times[T_1,T_1+T_0]}^{2,1}$ erhalten wir die Behauptung ∎

Unter wesentlicher Benutzung des eben bewiesenen Lemmas erhalten wir schließlich noch die folgende Aussage.

Lemma 11: *Sei $T \in (0, \infty)$. Seien u_{h_s} bzw. u_h die Lösungen der Aufgabe* (A) *für die Koeffizientenfunktionen h_s bzw. h. Die Folge (h_s) sei fast sicher konvergent gegen h. Dann ist $\|u_{h_s} - u_h\|_{2,Q_T}^{2,1} \to 0$.*

Beweis: Aus $\frac{\partial}{\partial t} u_{h_s} - h_s\,\Delta u_{h_s} = f$ und $\frac{\partial}{\partial t} u_h - h\,\Delta u_h = f$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{h_s} - u_h) - h_s\,\Delta(u_{h_s} - u_h) = (h_s - h)\,\Delta u_h.$$

Weiter ist $u_{h_s} - u_h|_G = 0$. Damit erfüllt $u_{h_s} - u_h$ die Aufgabe (B) für die rechte Seite $f = (h_s - h)\,\Delta u_h$. Aus Lemma 10 folgt nun

$$\|u_{h_s} - u_h\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \gamma \|(h_s - h)\,\Delta u_h\|_{2,Q_T}.$$

Dabei beachten wir, daß γ von der speziellen Wahl der Funktion h_s unabhängig ist. Auf Grund des großen Lebesgueschen Satzes (vgl. z. B. [11: Abschnitt 14.2.2]) gilt $\|(h_s - h)\,\Delta u_h\|_{2,Q_T} \to 0$ ∎

5. Weitere Bemerkungen

Wir wollen noch einige etwas allgemeinere Aufgabenstellungen betrachten, die sich mit Hilfe der in den vorangehenden Abschnitten erhaltenen Ergebnisse leicht behandeln lassen. Wir setzen weiterhin $\partial G \in O^2$ voraus. Zunächst eine vorbereitende Aussage.

Bemerkung 6: Sei $T \in (0, \infty)$. Die nach Satz 5 existierende Lösung u der Aufgabe (A) erfüllt die Ungleichung

$$\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \delta(\|g\|_G{}^{1,2} + \|f\|_{2,Q_T}).$$

Dabei ist δ eine von g, f und h unabhängige Konstante. Ausgehend davon, daß die Aufgabe (B) für jedes $f \in L_2(Q_T)$ lösbar ist, können wir u auf die in Bemerkung 4 angegebene Weise ermitteln. Die behauptete Ungleichung ergibt sich nun aus Lemma 10 und der Tatsache, daß für $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(G)$ eine Funktion $u_g \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u_g|_G = g$, $u_g|_{S_T} = 0$ und $\|u_g\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \delta_1 \|g\|_G{}^{1,2}$ existiert, wobei δ_1 eine von g unabhängige Konstante ist. Letztere Aussage läßt sich z. B. aus den in [8: Kap. III, § 6] durchgeführten Überlegungen oder aus [8: Kap. IV, Theorem 9.1] entnehmen.

Wir können nun diejenige Aufgabe behandeln, die aus (A) dadurch hervorgeht, daß wir an Stelle reellwertiger Funktionen solche Abbildungen betrachten, deren Werte in einem (beliebigen) Hilbert-Raum H liegen. Wir arbeiten dabei mit Sobolew-Räumen vektorwertiger Funktionen, die analog zu den bisher benutzten Räumen definiert sind. Wir formulieren die Aufgabe:

(AH) Gesucht ist eine Funktion $u \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$, für die gilt:

(AH1) $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t)\, \Delta u = f(x, t)$,

(AH2) $u|_G = g$,

(AH3) $u|_{S_T} = 0$.

Dabei sind $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(G; H)$ und $f \in L_2(G; H)$ sowie $h: Q_T \to \mathbf{R}$ gegebene Funktionen; h genügt den in (A) angegebenen Voraussetzungen.

Bemerkung 7: Die in Lemma 9, Satz 5, Lemma 10, Lemma 11 und Bemerkung 6 für die Aufgabe (A) gemachten Aussagen gelten analog für die Aufgabe (AH). In der Tat, wegen der Meßbarkeit von g und f können wir voraussetzen, daß H separabel ist. Dann erhalten wir die Lösung von (AH) auf folgende Weise: Sei (z_i) ein vollständiges Orthonormalsystem in H und $u_i \in W_2^{2,1}(Q_T)$ die nach Satz 5 existierende und eindeutig bestimmte Funktion mit $\frac{\partial}{\partial t} u_i - h\, \Delta u_i = (f, z_i)_H$ sowie $u_i|_G = (g, z_i)_H$ und $u_i|_{S_T} = 0$. (Dabei bedeutet $(\cdot, \cdot)_H$ das Skalarprodukt in H.) Mit Hilfe der in Bemerkung 6 enthaltenen Ungleichung läßt sich sehr leicht nachrechnen, daß $u \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ gemäß $u := \sum_i u_i z_i$ die Aufgabe (AH) erfüllt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung sei v eine weitere Lösung und $w := u - v$. Nach Satz 5 ist $(w, z_i)_H = 0$ im Sinne des $L_2(Q_T)$ für jedes i. Daraus folgt $w = 0$ im Sinne des $L_2(Q_T; H)$. Die Gültigkeit der übrigen Aussagen läßt sich, ausgehend von der angegebenen Lösungsdarstellung, mit Hilfe der entsprechenden Aussagen für reellwertige Funktionen sehr leicht nachweisen.

Bemerkung 8: Betrachten wir statt (AH1) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t) \Delta u + \sum_{i=1}^{n} h_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} u + \bar{h}(x, t) u = f$$

mit beschränkten, meßbaren Funktionen $h_i, \bar{h}$, dann läßt sich eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die so entstehende Aufgabe wie folgt gewinnen:

a) Wir betrachten zunächst den Fall $g = 0$. Sei $A: {}^0W_2^{2,1}(Q_T; H) \to L_2(Q_T; H)$ gemäß $Au := \frac{\partial}{\partial t} u - h \Delta u + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + \bar{h}u$ und $R: L_2(Q_T; H) \to {}^0W_2^{2,1}(Q_T; H)$ derjenige Operator, der jedem f die nach Satz 5 (dessen Aussage nach Bemerkung 7 auch in der vorliegenden Situation gültig ist) existierende Lösung der Aufgabe $\frac{\partial}{\partial t} u - h \Delta u = f$ zuordnet. Mit Hilfe der in Lemma 9 (vgl. wieder Bemerkung 7) enthaltenen Ungleichungen ergibt sich, daß für hinreichend kleines T die Beziehungen $\|AR - Id\| < 1$ und $\|RA - Id\| < 1$ erfüllt sind. Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für hinreichend kleines T folgt nun aus dem Punkt a) des Beweises von Satz 4.

b) Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für $g \in W(^{1,2}_0 G; H)$ und beliebiges T erhält man nun mit derselben Konstruktion wie im Beweis von Satz 5.

Bemerkung 9: Liegt an Stelle von (AH2) und (AH3) die Anfangs-Randbedingung $u|_{G \cup S_T} = \varphi$ vor, so ist die Aufgabe in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ genau dann lösbar, wenn φ eine Fortsetzung $u_\varphi \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ besitzt. Die Lösbarkeitsaussage erhält man durch Anwendung des bereits mehrfach verwendeten Homogenisierungsprinzips (Bemerkung 4). Es ist dann u_φ an Stelle von u_g zu verwenden. Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich.

LITERATUR

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. New York—San Francisco—London: Academic Press 1975.

[2] Browder, F. E.: Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems. Proc. Nat. Acad. Sci. **45** (1959), 365—372.

[3] Dressel, F.: The fundamental solution of the parabolic equation I. Duke Math. J. **7** (1940), 186—203.

[4] —: The fundamental solution of the parabolic equation II. Duke Math. J. **13** (1946), 61—70.

[5] Дынин, А. С.: Многомерные эллиптические краевые задачи с одной неизвестной функцией. Докл. Акад. Наук СССР **141** (1961), 285—287.

[6] Gajewski, H.: On iterative solution of nonlinear heat-conduction and diffusion problems. Aplikace Mat. **22** (1977), 77—91.

[7] Henry, D.: Geometric theory of semilinear parabolic equations (Lecture Notes in Mathematics: Bd. 840). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1981.

[8] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва 1967.

[9] Погожельский, В.: Исследование интегралов параболического уравнения и краевых задач в неограниченной области. Матем. сборник **47** (1959), 397—430.

[10] Strauss, W.: Evolution equations non-linear in the time derivative. J. Math. Mech. **15** (1966), 49—82.

[11] Triebel, H.: Analysis und mathematische Physik. Leipzig: Teubner-Verlag 1981.

[12] Wladimirow, W. S.: Gleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1972.
[13] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. Stuttgart: Teubner-Verlag 1982.
[14] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis II — Monotone Operatoren. Leipzig: Teubner-Verlag 1977.

Manuskripteingang: 01. 06. 1983, in revidierter Fassung: 27. 01. 1984

VERFASSER:

Dipl.-Math. Jörg Heinrich
Sektion Mathematik der Technischen Universität
DDR-8027 Dresden, Zellescher Weg 12—14