Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (5) 1984, S. 413–423

Ein Randwertproblem für eine nichtlineare Gleichung gemischten Typs im $\mathbf{R}^3$

A. Müller-Rettkowski

In einem einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet G des $\mathbf{R}^3$ mit $G \cap \{x_3 = 0\} \neq \emptyset$ wird ein Randwertproblem für die Gleichung $Tu = Lu - u\,|u|^p = f(x, u)$, $p > 0$, untersucht. Hierbei ist L ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung, der elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist, je nachdem, ob $x_3 > 0$, $x_3 = 0$ oder $x_3 < 0$ ist. Der Rand von G wird aus einer nichtcharakteristischen und zwei charakteristischen Flächen gebildet. Das Problem besteht darin, eine Lösung u der Gleichung in G zu finden, wenn $u = 0$ auf der nichtcharakteristischen und auf einer der beiden charakteristischen Flächen vorgegeben ist. Es wird gezeigt, daß das Problem in einem verallgemeinerten Sinn eine Lösung hat, die in L^{p+2} und in einem gewichteten Sobolew-Raum liegt. Hierzu werden Apriori-Abschätzungen hergeleitet, mit deren Hilfe man zeigt, daß eine Folge von Näherungsproblemen lösbar ist und deren Lösungen gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

Рассматривается краевая задача для уравнения $Tu = Lu - u\,|u|^p = f(x, u)$, $p > 0$, в односвязной ограниченной области G пространства $\mathbf{R}^3$ со свойством $G \cap \{x_3 = 0\} \neq \phi$. При этом L — линейный дифференциальный оператор, который эллиптичен, параболичен или гиперболичен в зависимости от того, будет ли $x_3 > 0$, $x_3 = 0$ или $x_3 < 0$. Граница G образуется из одной нехарактеристической и двух характеристических поверхностей и ищется решение уравнения, равное нулю на нехарактеристической и одной из этих двух характеристических поверхностей. Показывается, что проблема в обобщенном смысле разрешимо и решение принадлежит пространству L^{p+2} и пространству Соболева с весом. Для этого выводятся априорные оценки и с их помощью показывается разрешимость последовательности аппроксимирующих проблем и сходимость их решений к исходному решению.

A boundary value problem for the equation $Tu = Lu - u\,|u|^p = f(x, u)$, $p > 0$, is studied in a simply connected bounded domain G of $\mathbf{R}^3$. Here L denotes a linear second order differential operator which is elliptic, parabolic or hyperbolic if $x_3 > 0$, $x_3 = 0$ or $x_3 < 0$, respectively. The boundary of G is formed by a non-characteristic and by two characteristic surfaces. The boundary value problem to be solved is to find a solution of the equation in G which assumes zero data on the non-characteristic and on one of the characteristic boundary surfaces. It is proved that this problem has a generalized solution belonging to L^{p+2} and to a Sobolew space with weight. Using apriori estimates the solubility of a sequence of approximate problems is shown whose solutions turn out to converge towards a solution of the boundary value problem in question.

1. Einleitung. Problemstellung. Formulierung des Ergebnisses

Es wird die Gleichung

$$Tu = Lu - u\,|u|^p = f(x, u) \qquad (p > 0) \tag{1.1}$$

mit

$$\begin{aligned} Lu &= k(x_3)\,u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + cu, \\ k(x_3) &= \operatorname{sign} x_3\,|x_3|^m \qquad (m > 0;\ c = \text{const} \leqq 0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

in dem einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet $G \subseteq \mathbf{R}^3 \equiv \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$ mit $G \cap \{x_3 = 0\} \neq \phi$ untersucht, dessen Rand ∂G aus folgenden Flächen gebildet wird:

S_0 mit der Gleichung $x_3 = h(x_1, x_2)$, wobei h eine glatte Funktion ist;

S_1 mit der Gleichung $x_1 - 1 + \dfrac{2}{m+2} (-x_3)^{\frac{m}{2}+1} = 0$, $x_3 \leqq 0$, $x_2 \in [a_1, b_1]$;

S_2 mit der Gleichung $-x_1 - 1 + \dfrac{2}{m+2} (-x_3)^{\frac{m}{2}+1} = 0$, $x_3 \leqq 0$, $x_2 \in [a_2, b_2]$.

In G soll $x_1 + 1 > 0$ gelten. Es ist $\partial G \cap \{x_3 > 0\} = S_0 \cap \{x_3 > 0\}$ und $\partial G \cap \{x_3 < 0\} = S_1 \cup S_2 \cup (S_0 \cap \{x_3 < 0\})$. Die Gleichung (1.1) ist in $G^+ := G \cap \{x_3 > 0\}$ vom elliptischen, in $G^0 := G \cap \{x_3 = 0\}$ vom parabolischen und in $G^- := G \cap \{x_3 < 0\}$ vom hyperbolischen Typ. S_1 und S_2 sind charakteristische Flächen für T.

Positive (höchstens von den geometrischen Verhältnissen abhängige) Konstanten werden fortlaufend durchnumeriert und mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnet. Für die äußere Einheitsnormale an G auf ∂G wird $n = (n_1, n_2, n_3)$ und für die Norm bzw. das Skalarprodukt in $L^l(G)$ werden $\|\cdot\|_l$ bzw. $(\cdot, \cdot)_{L^l}$ geschrieben.

Es wird für das Randwertproblem

$$Tu = f \text{ in } G \quad \text{und} \quad u = 0 \text{ auf } S_0 \cup S_1 \tag{1.3}$$

die Lösbarkeit in einem verallgemeinerten Sinn (Definition 1, Abschnitt 2) unter folgenden Voraussetzungen nachgewiesen:

(V 1) Auf $S_0 \cup S_1$ gelte $(x_1 + 1) n_1 + \dfrac{2}{m+2} x_3 n_3 > 0$ für $x_3 > 0$ und $(x_1 + 1) n_1 > 0$ für $x_3 < 0$.

(V 2) Die Funktion $f = f(x, u)$ sei in der zweiten Variablen u stetig.

(V 3) Es sei $f = f_1(x, u) |x_3|^{\frac{m}{2}}$ mit $\|f_1\|_2^2 \leqq c_1 + c_2 \|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}$.

(V 4) Es sei $m > 1 + \dfrac{2}{p+2}$.

Randwertprobleme der Art (1.3) für den *linearen* Teil L von T sind z. B. von Sorokina [2, 3] und Datschew ([1]; man vergleiche dort auch die Literaturangaben) behandelt worden. Ein *zweidimensionales nichtcharakteristisches* Problem mit einer Nichtlinearität wie in Gleichung (1.1) ist von Podgaev [4] untersucht worden. In der hier vorliegenden Arbeit wird ähnlich wie in [4] vorgegangen: Es werden Methoden, die sich bei linearen Problemen bewährt haben (abc-Methode, man vergleiche etwa [8]; Integral-abc-Methode [6]), zusammen mit Verfahren angewendet, wie sie im Buch von Lions [5] über nichtlineare Probleme beschrieben sind (Apriori-Abschätzungen, Näherungsprobleme in endlichdimensionalen Räumen).

Bemerkungen: 1. Es gibt Flächen S_0, die Teil des Randes eines Gebietes G der oben beschriebenen Art sind und (V 1) erfüllen.

2. Die Voraussetzung, daß c in der Gleichung (1.1) konstant ist, ist nicht wesentlich; wichtig ist das Vorzeichen von c. Im allgemeinen Fall müßte gefordert werden, daß c gewisse Differentialungleichungen erfüllt.

3. Das Folgende kann allgemeiner für Funktionen $k = k(x_3)$ mit $k(x_3) \gtrless 0$ für $x_3 \gtrless 0$ durchgeführt werden. Die Bedingung (V 4), die im 5. Abschnitt zum Nachweis von (5.7) gebraucht wird, müßte ersetzt werden durch die Forderung, daß $k' |k|^{-\frac{1}{2}} \in L^{2+\frac{4}{p}}(G)$ erfüllt ist.

4. Ganz analog kann das Problem mit Vorgaben auf $S_0 \cup S_2$ untersucht werden. Zum Beispiel in (V 1) würde an die Stelle von $(x_1 + 1)$ der Faktor $(x_1 - 1)$ treten in einer entsprechenden Bedingung.

2. Formulierung des (1.3) zugeordneten verallgemeinerten Problems

Für $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, $v \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$ erhält man mit dem Gaußschen Integralsatz

$$(v, Tu)_{L^2} = B(u, v) + \int_{\partial G} v(ku_{x_1}n_1 + u_{x_2}n_2 + u_{x_3}n_3)\, do \tag{2.1}$$

mit

$$B(u, v) = -\int_G (ku_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3} - cuv + u\,|u|^p\, v)\, dx. \tag{2.2}$$

Auf $C^1(\overline{G})$ werden eine Norm $\|\cdot\|_{H_1}$ und ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_1}^2 &:= \int_G (|k|\, u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2 + u^2)\, dx, \\ (u, v)_{H_1} &:= \int_G (|k|\, u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3} + uv)\, dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir setzen

$$C_T^1 := \{u \in C^1(\overline{G});\, u = 0 \text{ auf } S_0 \cup S_1\}, \quad C_T^{2,+} := \{v \in C^2(\overline{G}) : v = 0 \text{ auf } S_0 \cup S_2\}$$

und definieren die Hilberträume H_1 als Abschluß von C_T^1 und H_1^+ als Abschluß von $C_T^{2,+}$ jeweils in der Norm $\|\cdot\|_{H_1}$. Ist D ein Teilgebiet von G, so wird der Hilbertraum, den man durch Abschluß von $C^1(\overline{D})$ in der Norm $\|\cdot\|_{H_1(D)}$ (man integriert in (2.3) nur über D) erhält, mit $H_1(D)$ bezeichnet. Schließlich definieren wir noch die Banachräume $H_1 \cap L^{p+2}$ bzw. $H_1^+ \cap L^{p+2}$ als Abschluß in der Norm $\|\cdot\|_{H_1} + \|\cdot\|_{p+2}$ von C_T^1 bzw. $C_T^{2,+}$.

Aus (2.1) folgt für $u \in C^2(G) \cap C_T^1$, $v \in C_T^{2,+}$ die Beziehung $(v, Tu)_{L^2} = B(u, v)$, wodurch die folgende Definition motiviert wird (man beachte zur Motivation auch die anschließende Bemerkung 4).

Definition 1: Die Funktion f genüge (V 2), (V 3). Dann heißt $u \in H_1 \cap L^{p+2}$ *verallgemeinerte Lösung* von

$$Tu = f \text{ in } G, \qquad u = 0 \text{ auf } S_0 \cup S_1, \tag{1.3}$$

wenn

$$B(u, v) = (v, f)_{L^2} \quad \text{für alle } v \in H_1^+ \cap L^{p+2}$$

gilt.

Bemerkungen: 1. $B(u, v)$ ist für $u, v \in H_1 \cap L^{p+2}$ definiert.

2. Man hat $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^{\frac{p+2}{p+1}}$, falls $u \in L^{p+2}$ und (V 3) gelten, so daß $\big(v, f(\cdot, u(\cdot))\big)_{L^2}$ für $u, v \in L^{p+2}$ existiert.

3. Die Funktion $u \in H_1 \cap L^{p+2}$ ist verallgemeinerte Lösung von (1.3), wenn $B(u, v) = (v, f)_{L^2}$ für alle $v \in C_T^{2,+} \cap L^{p+2}$ gilt.

4. Ist $u \in C^2(\overline{G})$ verallgemeinerte Lösung von (1.3), so gilt $Tu = f$ in G im klassischen Sinn, und die Funktion u genügt in dem Sinn den Randbedingungen, daß sie als Grenzwert in H_1 von Funktionen aus C_T^1 (also von Funktionen, die die Randbedingungen im üblichen Sinn erfüllen) erhalten wird.

3. Apriori-Abschätzungen

Wir setzen

$$\gamma(x_3) = \begin{cases} \dfrac{2}{m+2}\, x_3 & \text{für } x_3 \geqq 0 \\ 0 & \text{für } x_3 \leqq 0 \end{cases}$$

und definieren den linearen Differentialausdruck erster Ordnung durch $l(w)(x) := (x_1 + 1)\, w_{x_1} + \gamma(x_3)\, w_{x_3}$ für genügend glatte Funktionen w und $x \in G$.

Satz 1: *Es sei $S_0 \cup S_1$ eine glatte Fläche, die* (V 1) *erfüllt, und es sei $\psi \in C_T^{2,+}$. Dann gibt es ein $\varphi \in H_1 \cap L^{p+2}$ mit*

$$l(\varphi) = \psi \text{ in } G \quad \text{und} \quad \varphi = 0 \text{ auf } S_0 \cup S_1. \tag{3.1}$$

Beweis: Wegen (V 1) erhält man mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung oder direkt wie in [7] eine in G stetige und in G^+ und in G^- glatte Funktion φ, die (3.1) erfüllt, außer eventuell in der Umgebung von $\{x : x_1 = -1, x_2, x_3 = 0\}$, wo die Koeffizienten von l verschwinden. Es ist $\varphi \in H_1 \cap L^{p+2}$ zu beweisen.

1. *Schritt:* Nachweis von $\varphi \in L^{p+2}$.
Für $\varepsilon > 0$ (klein) definiert man $G_\varepsilon^+ := G^+ \cap \{x_3 > \varepsilon\}$ und $G_\varepsilon^- := G^- \cap \{x_3 < -\varepsilon\}$. Unter Beachtung von $\varphi\varphi_{x_j} |\varphi|^p = \dfrac{1}{p+2} \dfrac{\partial}{\partial x_j} |\varphi|^{p+2}$ liefert der Gaußsche Integralsatz

$$-\int_{G_\varepsilon^+} l(\varphi)\, \varphi\, |\varphi|^p\, dx = -\frac{1}{p+2} \int_{\partial G_\varepsilon^+} |\varphi|^{p+2} \left((x_1 + 1)\, n_1 + \frac{2}{m+2}\, x_3 n_3\right) do$$

$$+ \frac{1}{p+2} \frac{m+4}{m+2} \|\varphi\|^{p+2}_{L^{p+2}(G_\varepsilon^+)} =: I_1 + I_2.$$

Auf $\partial G_\varepsilon^+ \cap S_0$ gilt $\varphi = 0$, und auf $\partial G_\varepsilon^+ \cap \{x_3 = \varepsilon\}$ hat man $n_1 = 0$ und $n_3 = -1$, woraus $I_1 \geqq 0$ folgt, so daß

$$-\int_{G_\varepsilon^+} l(\varphi)\, \varphi\, |\varphi|^p\, dx \geqq \frac{1}{p+2} \frac{m+4}{m+2} \|\varphi\|^{p+2}_{L^{p+2}(G_\varepsilon^+)} \tag{3.2}$$

wird. In G_ε^- liefert die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$-\int_{G_\varepsilon^-} l(\varphi)\, \varphi\, |\varphi|^p\, dx = -\frac{1}{p+2} \int_{\partial G_\varepsilon^-} |\varphi|^{p+2} (x_1 + 1)\, n_1\, do + \frac{1}{p+2} \|\varphi\|^{p+2}_{L^{p+2}(G_\varepsilon^-)}.$$

Hier ist das Integral über ∂G_ε^- nichtnegativ, denn es gelten $\varphi = 0$ auf $(S_0 \cup S_1) \cap \partial G_\varepsilon^-$, $(x_1 + 1)\, n_1 < 0$ auf $S_2 \cap \partial G_\varepsilon^-$ und $n_1 = 0$ auf $\partial G_\varepsilon^- \cap \{x_3 = -\varepsilon\}$, so daß also

$$-\int_{G_\varepsilon^-} l(\varphi)\, \varphi\, |\varphi|^p\, dx \geqq \frac{1}{p+2} \|\varphi\|^{p+2}_{L^{p+2}(G_\varepsilon^-)} \tag{3.3}$$

folgt. Aus

$$-\int_{G_\varepsilon \pm} l(\varphi)\, \varphi\, |\varphi|^p\, dx \leqq \|l(\varphi)\|_{L^{p+2}(G_\varepsilon \pm)} \|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+2}(G_\varepsilon \pm)},$$

aus (3.2), (3.3) und $l(\varphi) = \psi$ in G_ε^+ und G_ε^- folgt weiter

$$\frac{1}{p+2} \left(\|\varphi\|_{L^{p+2}(G_\varepsilon^+)} + \|\varphi\|_{L^{p+2}(G_\varepsilon^-)}\right) \leqq \|\psi\|_{L^{p+2}(G)} = \|\psi\|_{p+2}.$$

Definiert man

$$\varphi_\varepsilon := \begin{cases} \varphi \text{ in } G_\varepsilon^+ \cup G_\varepsilon^- \\ 0 \text{ in } G \setminus (G_\varepsilon^+ \cup G_\varepsilon^-) \end{cases}$$

und verwendet, daß für $\varepsilon \to 0$ f. ü. in G $|\varphi_\varepsilon| \to |\varphi|$ gilt, so erhält man mit dem Satz von Fatou [9: S. 73]

$$\frac{1}{p+2} \|\varphi\|_{L^{p+2}(G)} = \frac{1}{p+2} \|\varphi\|_{p+2} \leqq \|\psi\|_{p+2}. \tag{3.4}$$

Das war im ersten Schritt zu zeigen.

Für später wird folgendes sich aus dem vorhergehenden Beweis (man vgl. (3.2), (3.3)) ergebende Zwischenergebnis notiert:

$$-\int_G l(\varphi)\, \varphi\, |\varphi|^p\, dx \geqq \frac{1}{p+2} \|\varphi\|_{p+2}^{p+2}, \quad \text{wobei } \varphi \text{ (3.1) genügt.} \tag{3.5}$$

2. *Schritt*: Nachweis von $\varphi \in H_1$.
Mit $\varepsilon > 0$ (klein) werden die Gebiete $G_\varepsilon^\pm$ wie im ersten Schritt definiert. Die folgende Umformung ergibt sich mit dem Gaußschen Integralsatz:

$$\begin{aligned} \int_{G_\varepsilon^\pm} \varphi L(l(\varphi))\, dx &= \int_{G_\varepsilon^\pm} \varphi L\psi\, dx \\ &= -\int_{G_\varepsilon^\pm} (k\varphi_{x_1}\psi_{x_1} + \varphi_{x_2}\psi_{x_2} + \varphi_{x_3}\psi_{x_3} - c\varphi\psi)\, dx \\ &\quad + \int_{\partial G_\varepsilon^\pm} \varphi(k\psi_{x_1}n_1 + \psi_{x_2}n_2 + \psi_{x_3}n_3)\, do. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da S_2 charakteristische Fläche ist, folgt auf S_2 aus $\psi = 0$ die Gleichheit $k\psi_{x_1}n_1 + \psi_{x_2}n_2 + \psi_{x_3}n_3 = 0$. Wegen $\varphi = 0$ auf $S_0 \cup S_1$ hat man also

$$\begin{aligned} \int_{\partial G_\varepsilon^+} \varphi(k\psi_{x_1}n_1 + \psi_{x_2}n_2 + \psi_{x_3}n_3)\, do &= -\int_{\{x_3=\varepsilon\}} \varphi\psi_{x_3}\, do, \\ \int_{\partial G_\varepsilon^-} \varphi(k\psi_{x_1}n_1 + \psi_{x_2}n_2 + \psi_{x_3}n_3)\, do &= \int_{\{x_3=-\varepsilon\}} \varphi\psi_{x_3}\, do. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Die Gebietsintegrale in (3.6) werden mit dem Gaußschen Integralsatz weiter umgeformt, wobei $l(\varphi) = \psi$ in $G_\varepsilon^\pm$ verwendet wird:

$$\begin{aligned} &\int_{G_\varepsilon^+} \varphi L\psi\, dx + \int_{\{x_3=\varepsilon\}} \varphi\psi_{x_3}\, do \\ &= -\int_{G_\varepsilon^+} (k\varphi_{x_1}\psi_{x_1} + \varphi_{x_2}\psi_{x_2} + \varphi_{x_3}\psi_{x_3} - c\varphi\psi)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{G_\varepsilon^+} \left(\frac{m}{m+2} k\varphi_{x_1}^2 + \frac{m+4}{m+2}\varphi_{x_2}^2 + \frac{m}{m+2}\varphi_{x_3}^2 - \frac{m+4}{m+2}\varphi^2\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{\partial G_\varepsilon^+} \left((x_1+1)\, n_1 + \frac{2}{m+2} x_3 n_3\right)(k\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 - c\varphi^2)\, do \\ &=: I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Es gilt

$$I_1^\varepsilon \geqq c_3 \|\varphi\|_{H_1(G_\varepsilon^+)}. \tag{3.9}$$

Für $c < 0$ ist dies unmittelbar klar, und um (3.9) auch im Fall $c = 0$ einzusehen, verwende man die Darstellung $x_3 = h(x_1, x_2)$ von S_0 und $\varphi = 0$ auf S_0. Auf $S_0 \cap \partial G_\varepsilon^+$ führt $\psi = (x_1 + 1)\,\varphi_{x_1} + \dfrac{2}{m+2}\, x_3\varphi_{x_3} = 0$, $(x_1 + 1)\, n_1 + \dfrac{2}{m+2}\, x_3 n_3 > 0$ (nach (V 1)) und $\varphi = 0$ zu $\operatorname{grad} \varphi = 0$, so daß man auch

$$I_2^\varepsilon = \frac{1}{m+2}\,\varepsilon \int\limits_{\{x_3=\varepsilon\}} \left(k\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 + (-c)\,\varphi^2\right) do \geqq 0 \tag{3.10}$$

erhält. Auf der linken Seite der Gleichung (3.8) existiert wegen $\varphi \in L^{p+2}(G)$ und $\psi \in C^2(\bar{G})$ der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$. Da I_1^ε und I_2^ε nichtnegativ sind und I_1^ε in ε monoton ist, existiert $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1^\varepsilon$, so daß aus (3.8) und (3.9), wenn der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchgeführt wird, die Beziehung

$$\int\limits_{G^+} \varphi L\psi\, dx + \int\limits_{\{x_3=+0\}} \varphi\psi_{x_3}\, do = c_3 \|\varphi\|^2_{H_1(G^+)} \tag{3.11}$$

folgt.

Aus (3.6) und (3.7) leitet man analog wie (3.8) auch

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_\varepsilon^-} \varphi L\psi\, dx - \int\limits_{\{x_3=-\varepsilon\}} \varphi\psi_{x_3}\, do \\
&= -\int\limits_{G_\varepsilon^-} (k\varphi_{x_1}\psi_{x_1} + \varphi_{x_2}\psi_{x_2} + \varphi_{x_3}\psi_{x_3} - c\varphi\psi)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_{G_\varepsilon^-} \left((-k)\,\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 + (-c)\,\varphi^2\right) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G_\varepsilon^-} \left(-(x_1+1)\, n_1(k\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 + (-c)\varphi^2)\right) do =: I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.12}$$

her. Verwendet man $\varphi = 0$ auf $(S_0 \cup S_1) \cap \partial G_\varepsilon^-$, so folgt (auch für $c = 0$)

$$I_3^\varepsilon \geqq c_4 \|\varphi\|^2_{H_1(G_\varepsilon^-)}. \tag{3.13}$$

Aus $\psi = (x_1 + 1)\,\varphi_{x_1} = 0$, $(x_1 + 1)\, n_1 > 0$ (nach (V 1)) und aus $\varphi = 0$ auf $S_0 \cap \partial G_\varepsilon^-$ folgt, daß dort $\operatorname{grad} \varphi = 0$ gilt. Da $S_1 \cap \partial G_\varepsilon^-$ charakteristische Fläche ist, ist dort mit $\varphi = 0$ auch $k\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 = 0$. Auf $S_2 \cap \partial G_\varepsilon^-$ hat man $(x_1 + 1)\, n_1 = -(x_1 + 1) < 0$ und $\psi = (x_1 + 1)\,\varphi_{x_1} = 0$, woraus dort $\varphi_{x_1} = 0$ folgt. Da $n_1 = 0$ auf der Fläche $\{x_3 = -\varepsilon\}$ gilt, erhält man insgesamt

$$I_4^\varepsilon = \frac{1}{2} \int\limits_{S_2 \cap \partial G_\varepsilon^-} (x_1 + 1)\,(\varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 + (-c)\,\varphi^2)\, do \geqq 0.$$

Wegen $\varphi \in L^{p+2}$ und $\psi \in C^2(\bar{G})$ existiert für die linke Seite der Gleichung (3.12) der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$. Hieraus, aus $I_3^\varepsilon \geqq 0$, $I_4^\varepsilon \geqq 0$, und daraus, daß I_3^ε in ε monoton ist, erhält man die Existenz von $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_3^\varepsilon$, so daß aus (3.12) und (3.13)

$$\int\limits_{G^-} \varphi L\psi\, dx - \int\limits_{\{x_3=-0\}} \varphi\psi_{x_3}\, do \geqq c_4 \|\varphi\|^2_{H_1(G^-)} \tag{3.14}$$

folgt. Aus (3.11) und (3.14) ergeben sich unmittelbar

$$\int_G \varphi L\varphi \, dx \geqq c_5 \|\varphi\|^2_{H_1(G)} \quad \text{und} \quad \|L\varphi\|_2 \geqq c_5 \|\varphi\|_{H_1}, \tag{3.15}$$

womit Satz 1 bewiesen ist ∎

Für das Folgende wird noch

$$\int_G \varphi L\psi \, dx = -\int_G (k\varphi_{x_1}\psi_{x_1} + \varphi_{x_2}\psi_{x_2} + \varphi_{x_3}\psi_{x_3} - c\varphi\psi) \, dx \tag{3.16}$$

vermerkt, was man aus (3.8) und (3.12) abliest.

4. Näherungslösungen

Da der Raum $H_1^+ \cap L^{p+2}$ separabel ist, gibt es eine Folge von Funktionen $\{\psi^n : n \in \mathbf{N}\} \subset C_T^{2,+}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Menge $\{\psi^1, \ldots, \psi^m\}$ ist für jedes $m \in \mathbf{N}$ linear unabhängig.
(ii) Die endlichen Linearkombinationen der ψ^j liegen in $H_1^+ \cap L^{p+2}$ dicht.

Zu jedem ψ^j $(j = 1, 2, \ldots)$ werde eine Funktion φ^j mit $\varphi^j \in H_1 \cap L^{p+2}$, $l(\varphi^j) = \psi^j$ in G und $\varphi^j = 0$ auf $S_0 \cup S_1$ gemäß Satz 1 bestimmt. Da l ein linearer Operator ist, kann man wegen der Eigenschaften (i), (ii) der Funktionen ψ^j annehmen, daß das System der Funktionen $\{\varphi^1, \varphi^2, \ldots\}$ in H_1 orthonormiert ist:

$$(\varphi^i, \varphi^k)_{H_1} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots). \tag{4.1}$$

Hilfssatz 1: *Es sei die Voraussetzung* (V 3) *für die Funktion f erfüllt, und mit w werde eine endliche Linearkombination von Funktionen φ^i bezeichnet. Dann gelten*

$$B(w, l(w)) = (w, L(l(w)))_{L^2} - (l(w), w\,|w|^p)_{L^2} \geqq c_6(\|w\|^2_{H_1} + \|w\|^{p+2}_{p+2}) \tag{4.2}$$

und

$$(f(\cdot, w(\cdot)), l(w))_{L^2} \leqq c_7 \|f_1(\cdot, w(\cdot))\|_2 \|w\|_{H_1}. \tag{4.3}$$

Zum Beweis von (4.2) beachte man (2.2), (3.16), (3.15), (3.5), und zum Beweis von (4.3) die Voraussetzung (V 3) ∎

Satz 2: *Die Funktion f genüge den Voraussetzungen* (V 2), (V 3), *und es sei $r \in \mathbf{N}$ beliebig, fest. Dann gibt es Koeffizienten $c_{1r}, c_{2r}, \ldots, c_{rr}$ derart, daß für $u^r := \sum_{i=1}^{r} c_{ir}\varphi^i$ die Gleichungen*

$$B(u^r, \psi^n) = (f(\cdot, u^r(\cdot)), \psi^n)_{L^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots, r) \tag{4.4}$$

erfüllt sind.

Beweis: Wir führen die Spaltenvektoren $\zeta = (c_{jr})_{j=1,\ldots,r}$, $\varphi = (\varphi^j)_{j=1,\ldots,r}$ und $\eta = (\eta_j)_{j=1,\ldots,r}$ mit $\eta_j = B(\zeta^T \cdot \varphi, l(\varphi^j)) - (f(\cdot, \zeta^T \cdot \varphi), l(\varphi^j))_{L^2}$ ein. Man hat $u^r = \zeta^T \cdot \varphi$ und $\|u^r\|_{H_1} = |\zeta|$ gemäß (4.1). Durch

$$\zeta \to \eta = B(\zeta^T \cdot \varphi, l(\varphi)) - (f(\cdot, \zeta^T \cdot \varphi), l(\varphi))_{L^2}$$

wird eine Abbildung $P: \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ definiert, und es ist zu zeigen, daß P eine Nullstelle $\zeta_0 \in \mathbf{R}^r$ besitzt. Hierfür ist nach [5: Lemma 4.3 (S. 53/Brouwerscher Fixpunktsatz)] nachzuweisen, daß erstens P stetig ist, was nach Voraussetzung (V 2) gilt, und zweitens es eine Zahl $\varrho > 0$ so gibt, daß $\zeta^T \cdot P\zeta \geqq 0$ für alle ζ mit $|\zeta| = \varrho$ wird.

Dies sieht man wie folgt ein. Wir haben $\zeta^T \cdot P\zeta = B(u^r, l(u^r)) - (f(\cdot, u^r), l(u^r))_{L^2}$ woraus mit Hilfssatz 1

$$\zeta^T \cdot P\zeta \geqq c_6 |\zeta|^2 + c_6 \|\zeta^T \cdot \varphi\|_{p+2}^{p+2} - c_7 \|f_1(\cdot, \zeta^T \cdot \varphi)\|_{L^2} \tag{4.5}$$

folgt. Beachtet man (V 3), so kann man die rechte Seite in (4.5) weiter nach unten abschätzen. Es ergibt sich

$$\zeta^T \cdot P\zeta \geqq c_8 |\zeta|^2 - c_9 + \|\zeta^T \cdot \varphi\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} \left(c_6 \|\zeta^T \cdot \varphi\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} - c_{10}\right),$$

womit man sieht, daß $\zeta^T \cdot P\zeta \geqq 0$ wird, falls nur $|\zeta| \geqq \varrho$ für genügend großes ϱ gewählt wird ∎

Es sei jetzt $\{u^j : j \in \mathrm{N}\} \subset H_1 \cap L^{p+2}$ eine Folge von Lösungen der Gleichungssysteme (4.4) aus Satz 2. Aus (4.4), $l(\varphi^n) = \psi^n$, der Linearität von l und daraus, daß die Form $B(\cdot, \cdot)$ in der zweiten Variablen linear ist, folgt die Beziehung

$$B(u^r, l(u^r)) = (f(\cdot, u^r(\cdot)), l(u^r))_{L^2}, \qquad r = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Satz 3: *Für die in Satz 2 bestimmte Folge $u^1, u^2, \ldots$ gelten mit von r unabhängigen Konstanten c_{11}, c_{12}, c_{13}.*

$$\|u^r\|_{p+2} \leqq c_{11}, \qquad \|u^r\|_{H_1} \leqq c_{12}, \qquad \|f_1(\cdot, u^r(\cdot))\|_2 \leqq c_{13} \tag{4.7}$$

Beweis: Man erhält, wenn man (4.2), (4.3) und (4.6) verwendet, die Abschätzung

$$c_{14} \|u^r\|_{H_1} \leqq \|f_1(\cdot, u^r(\cdot))\|_2, \tag{4.8}$$

aus der mit (4.2) und der Voraussetzung (V 3)

$$c_{15} \|u^r\|_{p+2}^{p+2} \leqq \|f_1(\cdot, u^r(\cdot))\|_2^2 \leqq c_{16} + \varepsilon \|u^r\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.9}$$

folgt, wobei ε eine beliebige positive Zahl ist. Wird $\varepsilon < c_{15}$ gewählt, so führt (4.9) zu $\|u^r\|_{p+2} \leqq c_{11}$. Wird dies wieder in (4.9) verwendet, erhält man $\|f_1(\cdot, u^r(\cdot))\|_2 \leqq c_{13}$. Diese Ungleichung und (4.8) liefern $\|u^r\|_{H_1} \leqq c_{12}$, also die letzte der behaupteten Abschätzungen ∎

5. Grenzübergang $r \to \infty$ im Gleichungssystem (4.4)

Wir werden jetzt die Existenz einer Teilfolge der im vorigen Abschnitt (Satz 2) kontruierten Folge $\{u^1, u^2, \ldots\}$ nachweisen, die gegen eine verallgemeinerte Lösung von Problem (1.3) konvergiert.

Satz 4: *Unter den Voraussetzungen* (V 1)—(V 4) *besitzt das Problem* (1.3) *im Sinne von Definition* 1 *eine verallgemeinerte Lösung.*

Beweis: Wir werden Teilfolgen einer Folge stets wie die Folge selbst bezeichnen und das Zeichen $\rightharpoonup$ soll schwache Konvergenz bedeuten.

Nach Abschnitt 4 ist eine Folge $\{u^j : j \in \mathrm{N}\} \subset H_1 \cap L^{p+2}$ definiert. Die Funkionen u^j sind nach Satz 2 als Linearkombination der Funktionen $\varphi^1, \ldots, \varphi^j$ bestimmt und erfüllen die Gleichungen

$$B(u^r, \psi^n) = (f(\cdot, u^r(\cdot)), \psi^n)_{L^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots, r;\ r = 1, 2, \ldots). \tag{5.1}$$

Nach Satz 3 gilt mit einer von r unabhängigen Konstanten

$$\|u^r\|_{H_1} + \|u^r\|_{p+2} \leqq c_{17} \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

Da $H_1 \cap L^{p+2}$ ein reflexiver Banachraum ist, gibt es eine Teilfolge $\{u^r\}_r$ (man beachte die Vorbemerkung) der Folge $\{u^r\}_r$ und ein Element $u \in H_1 \cap L^{p+2}$ mit

$$u^r \rightharpoonup u \text{ in } H_1, \qquad u^r \rightharpoonup u \text{ in } L^{p+2} \qquad (r \to \infty). \tag{5.3}$$

Es wird nun gezeigt, daß u verallgemeinerte Lösung des Problems (1.3) ist.

1. *Schritt:* Aus $u^r \rightharpoonup u$ $(r \to \infty)$ in H_1 folgt

$$\begin{aligned} &B(u^r, \psi^n) + \int_G |u^r|^p u^r \psi^n \, dx \\ &\to -\int_G (k u_{x_1} \psi^n_{x_1} + u_{x_2} \psi^n_{x_2} + u_{x_3} \psi^n_{x_3} - c u \psi^n) \, dx \end{aligned} \tag{5.4}$$

für $r \to \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. *Schritt:* Wir definieren zur Abkürzung $v^r := |u^r|^p u^r$, $q := \dfrac{p+2}{p+1}$. Man rechnet nach, daß $\|v^r\|_q = \|u^r\|_{p+2}^{p+1}$ gilt. Wir haben also $v^r \in L^q$ und zusätzlich nach (5.2) die Abschätzung

$$\|v^r\|_q \leqq c_{18}. \tag{5.5}$$

Es gibt somit eine Teilfolge $\{v^r\}_r$ von $\{v^r\}_r$ und ein Element $\chi \in L^q$ derart, daß

$$v^r \rightharpoonup \chi \qquad (r \to \infty) \text{ in } L^q \tag{5.6}$$

gilt.

Wir zeigen zunächst $v^r \rightharpoonup |u|^p u$ $(r \to \infty)$ in L^q. Es bezeichne $W_2{}^1(G)$ den Sobolew-Raum der Distributionen, die zusammen mit ihren ersten Ableitungen im L^2 liegen und für die folgende Norm definiert ist:

$$\|g\|^2_{W_2{}^1} = (g, g)_{L^2} + \sum_{i=1}^{3} (g_{x_i}, g_{x_i})_{L^2}.$$

Berücksichtigt man (V 4), so folgt aus $u^r \in H_1 \cap L^{p+2}$, daß

$$w^r := |x_3|^{\frac{m}{2}} u^r \in W_2{}^1(G) \tag{5.7}$$

gilt (man vergleiche hierzu die Bemerkung 3 in Abschnitt 1). Insbesondere hat man die Ungleichung $\|w^r\|_{W_2{}^1} \leqq c_{19} \|u^r\|_{H_1 \cap L^{p+2}}$ bzw. mit (5.2) die Abschätzung $\|w^r\|_{W_2{}^1} \leqq c_{20}$, unabhängig von r. Da der Raum $W_2{}^1(G)$ reflexiv ist, kann man eine in $W_2{}^1(G)$ schwach konvergente Teilfolge aus $\{w^r\}_r$ auswählen. Diese konvergiert nach dem Sobolewschen Einbettungssätzen (stark) in $L^2(G)$. Es gibt also eine Funktion $w \in W_2{}^1(G)$, gegen die w^r für $r \to \infty$ in $L^2(G)$ konvergiert. Man kann nun weiter eine Teilfolge von $\{w^r\}_r$ finden, die fast überall (f. ü.) in G gegen w konvergiert. Nach Definition von w^r bedeutet das

$$u^r \to w\, |x_3|^{-\frac{m}{2}} \qquad (r \to \infty) \text{ f. ü. in } G. \tag{5.8}$$

Damit gilt auch

$$|u^r|^{p+2} \to \left| w\, |x_3|^{-\frac{m}{2}} \right|^{p+2} \qquad (r \to \infty) \text{ f. ü. in } G. \tag{5.9}$$

Dies und $\|u^r\|_{p+2} \leqq c_{17}$ ((5.2) und der Satz von FATOU [9: S. 73]) ergeben

$$w\, |x_3|^{-\frac{m}{2}} \in L^{p+2}. \tag{5.10}$$

Aus (5.9), (5.2) und (5.10) folgt mit [5: Lemma 1.3]

$$u^r \rightharpoonup w\,|x_3|^{-\frac{m}{2}} \quad (r \to \infty) \text{ in } L^{p+2}. \tag{5.11}$$

(5.3), (5.8) und (5.11) liefern $u = w\,|x_3|^{-\frac{m}{2}}$ und $u^r \to u$ $(r \to \infty)$ f. ü. in G. Damit hat man jetzt

$$v^r \to |u|^p\, u \qquad (r \to \infty) \text{ f. ü. in } G. \tag{5.12}$$

Wegen $u \in L^{p+2}$ gilt $|u|^p\, u \in L^q$, woraus zusammen mit (5.5) und (5.12)

$$v^r \rightharpoonup |u|^p\, u \qquad (r \to \infty) \text{ in } L^q \tag{5.13}$$

folgt, wenn man wieder [5: Lemma 1.3] anwendet.

Da $\psi^n \in L^{p+2}$ gilt, liefert (5.13)

$$\int_G |u^r|^p\, u^r \psi^n\, dx \to \int_G |u|^p\, u \psi^n\, dx \quad (r \to \infty), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Zusammen mit (5.4) und der Definition der Form $B(\cdot, \cdot)$ besagt dies

$$B(u^r, \psi^n) \to B(u, \psi^n) \qquad (r \to \infty), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5.14}$$

3. *Schritt:* Da $u^r \to u$ $(r \to \infty)$ f. ü. in G gilt, folgt mit (V 2)

$$f\big(x, u^r(x)\big) \to f\big(x, u(x)\big) \quad (r \to \infty) \text{ für fast alle } x \in G. \tag{5.15}$$

Nach Bemerkung 2 in Abschnitt 2 hat man

$$f\big(\cdot, u(\cdot)\big) \in L^{\frac{p+2}{p+1}}. \tag{5.16}$$

Weiter gilt nach (V 3) und Satz 3

$$\|f\big(\cdot, u^r(\cdot)\big)\|_{\frac{p+2}{p+1}} \leqq c_{21}, \tag{5.17}$$

so daß sich wieder [5: Lemma 1.3] dahingehend anwenden läßt, daß aus (5.15) bis (5.17) $f\big(\cdot, u^r(\cdot)\big) \rightharpoonup f\big(\cdot, u(\cdot)\big)$ $(r \to \infty)$ in $L^{\frac{p+2}{p+1}}$ folgt, woraus man

$$\big(f(\cdot, u^r(\cdot)), \psi^n\big)_{L^2} \to \big(f(\cdot, u(\cdot)), \psi^n\big)_{L^2} \quad (r \to \infty), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5.18}$$

erhält. Aus $B(u^r, \psi^n) = \big(f(\cdot, u^r(\cdot)), \psi^n\big)_{L^2}$ $(n = 1, 2, \ldots, r)$ folgt für $r \to \infty$, wenn (5.14) und (5.18) berücksichtigt werden, $B(u, \psi^n) = \big(f(\cdot, u(\cdot)), \psi^n\big)_{L^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Da die endlichen Linearkombinationen der Funktionen ψ^j in $H_1^+ \cap L^{p+2}$ dicht liegen und $B(\cdot, \cdot)$ im zweiten Argument linear ist, hat man schließlich $B(u, v) = \big(f(\cdot, u(\cdot)), v\big)_{L^2}$, $v \in H_1^+ \cap L^{p+2}$ ∎

LITERATUR

[1] Дачев, Г. Д.: О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа в многомерных областях. C. R. Acad. bulg. Sci. 30, 8 (1977), 1101–1104.

[2] Сорокина, Н. Г.: Энергетические соотношения для многомерных уравнений смешанного типа. Дифф. уравнения 9, 1 (1973), 158–161.

[3] Сорокина, Н. Г.: Сильная разрешимость грануčной задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях. Укр. мат. ж. 26 (1974), 115–123.

[4] Подгаев, А. Г.: О разрешимости обобщенной задачи Трикоми для одного нелинейного уравнения. Докл. Акад. Наук СССР 236, 6 (1977), 1307–1310.

[5] LIONS, J. L.: Quelques méthodes de rèsolution des problèmes aux limites non linéares. Dunod: Paris 1969.
[6] Диденко, В. П.: О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением. Докл. Акад. Наук СССР 205 (1972), 763÷766.
[7] Диденко, В. П.: Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми. Укр. мат. ж. 25 (1973), 14—24.
[8] MORAWETZ, C. S.: A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type. Comm. Pure Appl. Math. 11 (1958), 315—331.
[9] KOLMOGOROV, A., and S. FOMIN: Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space. New York—London 1961.

Manuskripteingang: 04. 04. 1983

VERFASSER:

Dr. ANDREAS MÜLLER-RETTKOWSKI
Mathematisches Institut I der Universität
D-7500 Karlsruhe 1, Englerstr. 2, PF 6380