Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (5) 1984, S. 435–440

Einige Bemerkungen über die Fortsetzung positiv definiter Funktionen

Z. SASVÁRI

In dieser Note werden gewisse Fortsetzungen von stetigen, im Intervall $(-a, a)$, $0 < a < \infty$, positiv definiten Funktionen angegeben. Aus Satz 3 ergibt sich als Spezialfall ein Resultat von P. LÉVY über periodische Fortsetzungen.

В работе приводятся некоторые продолжения непрерывных функций, положительно-определенных на интервале $(-a, a)$, $0 < a < \infty$. Из теоремы 3, как частный случай, вытекает один результат П. Леви о периодических продолжениях.

In this note we give some extensions of continuous, positive definite functions on $(-a, a)$, $0 < a < \infty$. Theorem 3 yields as a special case a result of P. LÉVY on periodic extensions.

1. Einleitung

Eine komplexwertige Funktion auf dem Intervall $(-a, a)$, $0 < a \leqq \infty$, heißt positiv definit auf diesem Intervall, wenn für jede natürliche Zahl n, für beliebige komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ und $t_1, \ldots, t_n \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_j - t_k)\, z_j \bar{z}_k \geqq 0.$$

Nach einem Satz von M. G. KREIN läßt sich jede stetige, positiv definite Funktion auf dem Intervall $(-a, a)$ zu einer stetigen positiv definiten Funktion auf $\mathbf{R}$ fortsetzen. Die Problematik, alle solche Fortsetzungen zu beschreiben, wurde und wird stark untersucht (siehe hierzu die Überblicksarbeit [9]). Im allgemeinen gibt es jedoch kein einfaches Verfahren, nach dem man die Fortsetzungen einer auf dem Intervall $(-a, a)$ gegebenen positiv definiten Funktion explizit bestimmen kann. In dieser Note werden wir für eine spezielle Klasse von positiv definiten Funktionen mit Hilfe einer Faltung konkrete Fortsetzungen angeben.

Es seien $\mathscr{P}$ die Menge aller stetigen, positiv definiten Funktionen auf $\mathbf{R}$ und $\mathscr{P}_a$, $0 < a < \infty$, die Menge der Funktionen f aus $\mathscr{P}$ mit $f(t) = 0$ für $|t| \geqq a$. P. LÉVY hat in [7] gezeigt, daß im Falle $f \in \mathscr{P}_a$ und $a \leqq b < \infty$ die Funktion $\tilde{f}$ mit den Eigenschaften:

(i) $\tilde{f}(t) = f(t)$ für $|t| \leqq b$,
(ii) $\tilde{f}$ ist periodisch mit der Periode $2b$,

eine stetige, positiv definite Funktion ist. Spezialfälle dieses Satzes haben T. KAWATA [6], C. G. ESSEEN [2] und D. DUGUÉ-M. GIRAULT [1] bewiesen.

Es bezeichne f_a die Einschränkung der Funktion $f \in \mathscr{P}_a$ auf das Intervall $(-a, a)$, $0 < a < \infty$. Dann ist f_a eine stetige, positiv definite Funktion auf $(-a, a)$, und das Resultat von P. LÉVY gibt uns eine stetige, periodische, positiv definite Fortsetzung $\tilde{f}$

von f_a. Im Abschnitt 2 zeigen wir unter anderem: Multipliziert man die Lévysche Fortsetzung $\tilde{f}$ auf den Intervallen $[(2k-1)\,b, (2k+1)\,b]$ mit c^k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, wobei c eine komplexe Zahl mit $|c| = 1$ ist, so ergibt sich eine stetige, positiv definite Fortsetzung von f_a.

2. Fortsetzung von f_a im Falle $f_a \in \mathscr{P}_a$

Es seien $\mathscr{B}$ die Klasse der Borelmengen in $\mathbf{R}$ und $\mathscr{M}$ die Menge aller endlichen komplexen Maße auf dem meßbaren Raum $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$. Die Definition und Eigenschaften endlicher komplexer Maße sind z. B. in [4] und [5] zu finden. Für die totale Variation bzw. die Norm eines Maßes $\mu \in \mathscr{M}$ benutzen wir die Symbole $|\mu|$ bzw. $\|\mu\|$. Mit λ werden wir jenes normierte Lebesguesche Maß bezeichnen, für welches $\lambda([0, 1]) = (2\pi)^{-1/2}$ ist. $\mathscr{L}^1$ und $\mathscr{L}^2$ seien die Mengen der komplexwertigen Funktionen, die bezüglich λ integrierbar bzw. quadratisch integrierbar sind. Die Fourier-Transformierte $\hat{\mu}$ von $\mu \in \mathscr{M}$ sei durch

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-itx}\, d\mu(x), \qquad t \in \mathbf{R},$$

definiert. Im Falle $d\mu(x) = f(x)\, d\lambda(x)$ mit $f \in \mathscr{L}^1$ schreiben wir $\hat{f}$ anstelle von $\hat{\mu}$, das heißt

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-itx} f(x)\, d\lambda(x), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Die inverse Fourier-Transformierte $\check{f}$ von $f \in \mathscr{L}^1$ ist

$$\check{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} f(x)\, d\lambda(x), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Wenn f bezüglich $\mu \in \mathscr{M}$ integrierbar ist, dann ist die Faltung von f und μ durch

$$f * \mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-x)\, d\mu(x), \qquad t \in \mathbf{R},$$

erklärt. Im Falle $d\mu(x) = g(x)\, d\lambda(x)$ mit $g \in \mathscr{L}^1$, schreiben wir $f * g$ anstelle von $f * \mu$, das heißt:

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-x)\, g(x)\, d\lambda(x), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Im weiteren werden solche komplexe Maße $\mu \in \mathscr{M}$ eine Rolle spielen, für die gilt:

$$\mu(\{0\}) = 1 \quad \text{und} \quad |\mu|\,\big((0, 2a)\big) = |\mu|\,\big((-2a, 0)\big) = 0$$

mit einem $a > 0$. Die Menge aller dieser Maße bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_a$.

Satz 1: *Seien $f \in \mathscr{P}_a$ und $\mu, \nu \in \mathscr{M}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *$f * \mu$ ist dann und nur dann positiv definit, wenn $\hat{\mu} \geqq 0$ ist.*

(ii) *Im Falle $\mu \in \mathscr{M}_a$ und $\hat{\mu} \geqq 0$ ist $\tilde{f} = f * \mu$ eine positiv definite Fortsetzung von f_a.*

(iii) *Aus $f * \nu = f * \mu$ folgt $\nu = \mu$.*

Lemma 1 [5: Lemma 21.50]: *Sei $h \in \mathscr{L}^1$ eine stetige und beschränkte Funktion. Wenn $\hat{h} \geqq 0$ ist, dann gilt $\hat{h} \in \mathscr{L}^1$ und $h = (\hat{h})^\vee$.*

Beweis des Satzes 1: (i) Da $f \in \mathscr{P} \cap \mathscr{L}^1$ ist, gilt $\hat{f} \geqq 0$ (siehe z. B. [4: Satz 33.10]). Wegen $f \in \mathscr{L}^1$ ist auch $f * \mu \in \mathscr{L}^1$ und somit $(f * \mu)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{\mu}$. Im Falle $\hat{\mu} \geqq 0$ gilt also $(f * \mu)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{\mu} \geqq 0$, und nach Lemma 1 ist $f * \mu = (\hat{f} \cdot \hat{\mu})^\vee$. Die Funktion $f * \mu$ ist also die inverse Fourier-Transformierte einer nichtnegativen, integrierbaren Funktion und damit positiv definit.

Sei nun $f * \mu$ positiv definit. Wegen $f \in \mathscr{P}_a$ ist $\hat{f}$ analytisch, was z. B. aus Satz 7.2.1. in [8] folgt. Also hat $\hat{f}$ nur diskrete Nullstellen. Aus $\hat{f} \geqq 0$ und der Ungleichung $(f * \mu)^\wedge = \hat{f} * \hat{\mu} \geqq 0$ folgt nun, daß $\hat{\mu} \geqq 0$ ist.

(ii) Sei jetzt $\mu \in \mathscr{M}_a$ mit $\hat{\mu} \geqq 0$. Dann gilt $f * \mu(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(t - x)\, d\mu(x) = f(t)$, $|t| \leqq a$. Nach (i) ist $f * \mu$ positiv definit, und damit haben wir gezeigt, daß $f * \mu$ eine Fortsetzung von f_a ist.

(iii) Wenn $f * \mu = f * \nu$ ist, dann gilt $\hat{f} \cdot \hat{\mu} = \hat{f} \cdot \hat{\nu}$. Infolge der Analytizität von $\hat{f}$ erhalten wir $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ und damit $\mu = \nu$ ∎

Bemerkung 1: Die Funktionen $\omega_q(t) = \max \left\{1 - \frac{|t|}{q}, 0\right\}$ sind für jedes $q \in (0, \infty)$ bekanntlich positiv definite Funktionen. Wir werden im weiteren häufig von ihnen Gebrauch machen.

Bemerkung 2: In Satz 1 (i) kann man die Voraussetzung $f \in \mathscr{P}_a$ nicht durch $f \in \mathscr{P} \cap \mathscr{L}^1$ ersetzen, da $f \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{P}$ und $\mu \in \mathscr{M}$ derart existieren, daß $f * \mu$ eine positiv definite Funktion ist und $\hat{\mu}$ nicht der Ungleichung $\hat{\mu} \geqq 0$ genügt.

In der Tat, sei $f = \hat{\omega}_1$. Dann gilt $f \geqq 0$ und $\hat{f} \in \mathscr{L}^1$. Seien weiter

$$h(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leqq 2 \\ h \text{ ist periodisch mit der Periode } 4, \end{cases}$$

$g = (\omega_2 \cdot h)^\vee$ und $d\mu = g\, d\lambda$. Wie wir in Bemerkung 10 sehen werden, ist h eine positiv definite Funktion. Es gilt $\hat{f} \cdot \hat{\mu} \geqq 0$. Demzufolge ist $f * \mu = (\hat{f} \cdot \hat{\mu})^\vee$ eine positiv definite Funktion, und es gilt $\hat{\mu} = \hat{g} = \omega_2 h \ngeqq 0$.

Bemerkung 3: Sei $\mu \in \mathscr{M}$ mit $\hat{\mu} \geqq 0$ und $f \in \mathscr{P}$. Dann ist $f * \mu$ positiv definit. In der Tat, für jede natürliche Zahl n ist $\omega_n \cdot f$ eine positiv definite Funktion aus $\mathscr{P}_n$ und nach Satz 1 (i) ist $(\omega_n \cdot f) * \mu$ eine positiv definite Funktion. Nach dem Lebesgueschen Satz gilt für jedes $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} f * \mu(t) &= \int\limits_{\mathbf{R}} f(t - x)\, d\mu(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} \lim_{n \to \infty} \omega_n(t - x)\, f(t - x)\, d\mu(x) \\ &= \lim_{n \to \infty} (\omega_n \cdot f) * \mu(t). \end{aligned}$$

Da die Grenzfunktion einer positiv definiten Funktionsfolge positiv definit ist, ist auch $f * \mu$ positiv definit.

Bemerkung 4: Ist $\mu \in \mathscr{M}_a$ mit $\mu(-A) = \overline{\mu(A)}$ für alle $A \in \mathscr{B}$, $A \subseteqq [0, \infty)$ und $|\mu| \left((2a, \infty)\right) \leqq \frac{1}{2}$, so gilt $\hat{\mu} \geqq 0$.

In der Tat, sei μ_0 das im Nullpunkt konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaß und μ_1 das komplexe Maß, für das $\mu_1(\{0\}) = 0$ und $\mu_1(A) = \mu(A)$, $0 \notin A$, gilt. Dann ist $\mu = \mu_0 + \mu_1$ und $\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 = 1 + \hat{\mu}_1$. Wegen der Symmetrie von μ ist $\hat{\mu}_1$ reell. Weiter gilt $|\hat{\mu}_1| \leqq \|\mu_1\| = |\mu_1| (\mathbf{R}) \leqq 1$, also $\hat{\mu} \geqq 0$.

Bemerkung 5: Ist μ in den Punkten $0, t, -t$ konzentriert mit $|t| \geqq 2a$, und gilt $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{t\}) = \overline{\mu(\{-t\})} = c$ für eine komplexe Zahl c mit $|c| \leqq \frac{1}{2}$, dann ist die Bedingung aus Bemerkung 4 erfüllt. Sei jetzt $f \in \mathscr{P}$. Nach Bemerkung 3 ist $f * \mu(x) = f(x) + c f(x - t) + \bar{c} f(x + t)$ positiv definit.

Bemerkung 6: Sei ψ eine positiv definite Funktion, die außerhalb der Punkte $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, mit $t_1 = 0$, verschwindet, und es gelte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\psi(t_k)| < \infty$. Es bezeichne μ_ψ das in den Punkten $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ konzentrierte komplexe Maß mit $\mu_\psi(\{t_k\}) = \psi(t_k)$. Dann ist $\hat{\mu}_\psi \geqq 0$.

Im Falle $\psi(0) = 1$ und $|t_k| \geqq 2a$ für $k = 2, 3, \dots$ ist $\mu_\psi \in \mathcal{M}_a$. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem folgenden Lemma.

Lemma 2 [3]: *Seien $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ und $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ Folgen reeller bzw. komplexer Zahlen und $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$. Die Funktion $x \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e^{it_k x}$ $(x \in \mathbf{R})$ ist dann und nur dann nichtnegativ für jedes $x \in \mathbf{R}$, wenn die Funktion*

$$t \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{\{t_k\}}(t) \quad (t \in \mathbf{R}) \quad \textit{mit} \quad \chi_{\{t_k\}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = t_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

positiv definit ist.

Bemerkung 7: Eine positiv definite Funktion, die außerhalb der beliebig gegebenen Punkte $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ mit $t_0 = 0$ und $-t_{-k} = t_k$ verschwindet, kann man wie folgt konstruieren. Die Funktionen

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } t = t_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \varphi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind positiv definit. Das folgt aus Lemma 2 und Bemerkung 4. Das ist aber auch leicht direkt zu überprüfen. Seien nun $c_k > 0$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) =: \varphi(t)$. Die Funktion φ ist positiv definit, nimmt in den Punkten $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ positive Werte an und ist außerhalb dieser Punkte gleich Null.

Im Falle $f \in \mathcal{P}_a$ und $a \leqq b$ gilt offenbar $f \in \mathcal{P}_b$. In dem folgenden Satz werden wir annehmen, daß a die kleinste reelle Zahl ist, für die $f \in \mathcal{P}_a$ gilt, das heißt, daß $a = \inf \{a' \in \mathbf{R} : f \in \mathcal{P}_{a'}\}$ ist.

Satz 2: *Sei $f \in \mathcal{P}_a$. Eine positiv definite Fortsetzung $\tilde{f}$ von f_a läßt sich dann und nur dann in der Form*

$$\tilde{f} = f * \mu \quad \textit{mit} \quad \mu \in \mathcal{M}_a$$

darstellen, wenn ein $k \in \mathbf{R}$ so existiert, daß für jede natürliche Zahl n, beliebige komplexe Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ und $x_1, x_2, \dots, x_n > a$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{f}(x_i) \right| \leqq k \sup_{|t| \geqq 2a} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(t - x_i) \right|. \tag{$*$}$$

Beweis: Es bezeichne B den Banach-Raum der auf $[2a, \infty)$ stetigen, beschränkten, komplexen Funktionen, versehen mit der Supremum-Norm und den gewöhnlichen Operationen. Weiter sei f^x die Einschränkung der Funktion $t \to f(t - x)$ auf $[2a, \infty)$.

Die Funktionen $\{f^x : x > a\}$ sind linear unabhängig. Es gelte z. B. $x_1 > x_2 > \dots > x_n > a$ und

$$\alpha_1 f^{x_1}(t) + \dots + \alpha_n f^{x_n}(t) = 0, \qquad t \in [2a, \infty).$$

Aus der Definition von a und $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > a$ folgt die Existenz einer Zahl $t \in [2a, \infty)$ mit $f^{x_1}(t) \neq 0$, $f^{x_2}(t) = \cdots = f^{x_n}(t) = 0$. Es muß also $\alpha_1 = 0$ sein. Durch Induktion erhalten wir $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Nun bezeichne B_f den linearen Unterraum von B, der durch die Funktionen $\{f^x : x > a\}$ erzeugt ist. Da diese Funktionen unabhängig sind, gibt es ein eindeutig bestimmtes lineares Funktional I_0 auf B_f, für das $I_0(f^x) = \tilde{f}(x)$, $x > a$, ist. Die Bedingung $(*)$ ist dazu äquivalent, daß I_0 ein beschränktes lineares Funktional auf B_f ist. I_0 kann also dann und nur dann zu einem beschränkten linearen Funktional I auf B fortgesetzt werden, wenn $(*)$ erfüllt ist. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist die Beschränktheit von I dazu äquivalent, daß es ein komplexes Maß μ_0 auf $[2a, \infty)$ gibt, für das gilt:

$$\tilde{f}(x) = I(f^x) = \int_{2a}^{\infty} f^x(t)\, d\mu_0(t), \qquad x > a.$$

Sei jetzt μ das komplexe Maß aus $\mathcal{M}_a$, das in $[2a, \infty)$ mit μ_0 übereinstimmt und für das $\mu(A) = \overline{\mu_0(-A)}$, $A \subset (-\infty, 2a]$, ist. Dann gilt $\tilde{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x - t)\, d\mu(t) = f * \mu(x)$, $x \in \mathbf{R}$ ∎

Definition: Eine Folge $\{p_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ von komplexen Zahlen heißt *positiv definit*, wenn für jede natürliche Zahl N und für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_N$ die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} p_{j-k} z_j \bar{z}_k \geqq 0$$

gilt.

Satz 3: *Seien $f \in \mathcal{P}_a$, $b > 0$, $\{p_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ eine positiv definite Folge mit $p_0 = 1$,*

$$\psi(t) = \begin{cases} p_k & \text{für } t = kb \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und μ_ψ wie in Bemerkung 6.

Dann ist $\tilde{f} = f * \mu_\psi$ eine stetige, positiv definite Funktion und im Falle $b \geqq 2a$ eine Fortsetzung von f_a.

Bemerkung 8: μ_ψ ist im allgemeinen kein (endliches) komplexes Maß, da $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |p_k| < \infty$ nicht immer erfüllt ist. Die Faltung ist aber trotzdem sinnvoll.

Beweis des Satzes 3: Es sei $\psi_n = \omega_n \psi$. Wegen $\psi_n \in \mathcal{L}^1$ ist μ_{ψ_n} ein komplexes Maß. Nach Lemma 2 ist $\hat{\mu}_{\psi_n} \geqq 0$, da die Folge $\{p_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ positiv definit ist. Nach Satz 1 (i) ist $\tilde{f}_n = f * \mu_{\psi_n}$ eine positiv definite Funktion. Da die Faltung für jedes $t \in \mathbf{R}$ eine endliche Summe ist und $\lim_{n\to\infty} \omega_n(t) = 1$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(t) = \tilde{f}(t)$. $\tilde{f}$ ist also positiv definit. Es ist leicht zu sehen, daß im Falle $b \geqq 2a$, $|t| \leqq a$ gilt: $\tilde{f}(t) = f(t)$.

Bemerkung 9: Die Fortsetzung $\tilde{f}$ im Satz 3 erhält man aus der Lévyschen Fortsetzung, indem man diese auf den Intervallen $\big((2k-1)b,\ 2k+1)b\big)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit p_k multipliziert. Damit ist $\tilde{f}$ dann und nur dann periodisch, wenn die Folge $\{p_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ periodisch ist.

Bemerkung 10: Sei $p_k = c^k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ für eine komplexe Zahl c mit $|c| = 1$. Dann ist $\{p_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ eine positiv definite Folge. Mit dieser Folge und einem $b \geqq 2a$ bilden wir die Fortsetzung $\tilde{f}$. Für $c = 1$ stimmt $\tilde{f}$ mit der Lévyschen Fortsetzung überein. Ist $c^k = 1$ für ein $k \neq 0$, so ist $\tilde{f}$ periodisch, sonst nicht. Im Falle $c = -1$, $a = 1$, $b = 2$ und $f = \omega_1$ gilt mit der Funktion h aus Bemerkung 2 $\tilde{f} = h$.

LITERATUR

[1] DUGUÉ, D., and M. GIRAULT: Fonctions convexes de Polya. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 4 (1955), 3—10.
[2] ESSEEN, C. G.: Fourier analysis of distribution functions. Acta Math. 77 (1945), 1—125.
[3] HEWITT, E.: Linear functionals on almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 303—322.
[4] HEWITT, E., and K. ROSS: Abstract Harmonic Analysis, Vol. II (Grundlehren d. math. Wiss.: Bd. 152). Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1970.
[5] HEWITT, E., and K. STROMBERG: Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1969.
[6] KAWATA, T.: On the division of probability laws. Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 249—254.
[7] LÉVY, P.: Quelques problèmes non résolus de la théorie des fonction caractéristiques. Annali Mat. Pura e Appl. 53 (1961), 315—332.
[8] LUKACS, E.: Characteristic Functions (Griffin's Statistical Monographs and Courses: Vol. 5). Griffin: London 1960.
[9] STEWART, J.: Positiv definite functions and generalizations, an historical survey. Rocky Mountain J. Math. 6 (1976), 409—434.

Manuskripteingang: 02. 08. 1983

VERFASSER:

ZOLTÁN SASVÁRI
Sektion Mathematik der Technischen Universität
DDR-8027 Dresden, Mommsenstr. 13