Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (6) (1984), S. 503–521

Orthonormalreihenentwicklungen für gewisse quasikonforme Normalabbildungen

E. Hoy

Die Arbeit befaßt sich mit der Konstruktion von Lösungen der Gleichung $f_{\bar z}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)}$ mit $\nu(z) \equiv 0$ in einem endlich vielfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ und $\nu(z) \equiv q_j = \text{const}$ in den Komplementärkontinuen $\overline{\mathfrak{B}_j}$ von $\mathfrak{G}$ $(0 < q_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Bei der Konstruktion der Lösungen wird von bekannten und leicht explizit berechenbaren analytischen Funktionen in $\mathfrak{G}$ ausgegangen, und nur unter Verwendung von Orthonormierungsverfahren werden Reihen für die Lösungen erhalten. Diese Reihen konvergieren in der bekannten, durch das Integral über $\mathfrak{G}$ vom Quadrat des Betrages der Ableitung erzeugten Norm. Besteht der Rand von $\mathfrak{G}$ sämtlich aus analytischen Jordankurven, so gibt es für das Supremum der Abweichung der m-ten Partialsumme dieser Reihen von den gesuchten Lösungen über $\mathfrak{G}$ sogar eine obere Schranke der Form $M^*\varrho^{*m}$ mit $M^* > 0$ und $0 < \varrho^* < 1$. Für die Berechnung von ϱ^* werden einfache Verfahrensweisen angegeben. Die Ergebnisse werden für den Fall verallgemeinert, daß anstatt der Konstanten q_j in $\overline{\mathfrak{B}_j}$ analytische Funktionen $q_j(z)$ stehen. Abschließend wird ein Ausblick für eine mögliche Erweiterung dieses Verfahrens für den Fall allgemeinerer Funktionen $\nu(z)$ gegeben.

Работа посвящена конструкции решений уравнения $f_{\bar z}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)}$ с $\nu(z) \equiv 0$ в конечносвязной области $\mathfrak{G}$ и $\nu(z) \equiv q_j = \text{const}$ в компонентах дополнения $\mathfrak{B}_j$ области $\mathfrak{G}$ $(0 < q_j < 1, j = 1, 2, \ldots, n)$. При конструкции решений исходят из знакомых и легко явно вычислимых аналитических функций в $\mathfrak{G}$, и только использованием процессов ортогонализации получаются ряды для решений. Эти ряды сходятся в знакомой норме, произведенной интегралом квадрата производной по $\mathfrak{G}$. Если граница области целиком состоит из аналитических Жордановых кривых, имеется даже верхняя граница в форме $M^*\varrho^{*m}$ $(M^* > 0, 0 < \varrho^* < 1)$ для точной верхней границы отклонения m-ой частной суммы этих рядов от искомых решений. Для вычисления величины ϱ^* приводятся сравнительно простые методы. Результаты обобщаются заменой постоянных q_j аналитическими функциями $q_j(z)$. В конце обсуждается возможное расширение этого способа на случай более общих функций $\nu(z)$.

The paper deals with the construction of solutions for the equation $f_{\bar z}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)}$ with $\nu(z) \equiv 0$ in a finitely connected region $\mathfrak{G}$ and $\nu(z) \equiv q_j = \text{const}$ in the complementary continua $\mathfrak{B}_j$ of $\mathfrak{G}$ $(0 < q_j < 1, j = 1, 2, \ldots, n)$. The construction starts with well-known and in a simple way explicitly computable analytic functions in $\mathfrak{G}$, and series for the solutions are received only by the use of orthogonalization processes. These series converge in the well-known norm produced by the integral over $\mathfrak{G}$ of the square of derivative's absolute value. If the boundary of $\mathfrak{G}$ consists of analytic Jordan curves only, then there is even an upper bound of the form $M^*\varrho^{*m}$ with $M^* > 0$ and $0 < \varrho^* < 1$ for the supremum of deviation of the m-th partial sum of these series from the sought solutions over $\mathfrak{G}$. Simple methods are given for the computation of ϱ^*. The results are generalized for the case, that in $\mathfrak{B}_j$ analytic functions take the place of the constants q_j. At the conclusion a possible extension of the procedure to more generalized functions $\nu(z)$ is discussed.

1. Einleitung

Die komplexe Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)} \tag{*}$$

spielt in vielen Situationen der mathematischen Physik und in der Theorie der Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung eine wichtige Rolle. Es sei beispielsweise auf die hierzu in [6] zitierten Arbeiten verwiesen. In [6] sind einige der bekannten Möglichkeiten zur Lösung von (*) bzw. zur Darstellung dieser Lösungen genannt und mit entsprechenden Literaturzitaten belegt worden. Die prinzipielle Vorgehensweise in [6], aus bekannten analytischen Funktionen mit Hilfe von Orthonormierungsverfahren solche Orthonormalsysteme herzustellen, deren Koeffizienten bei Entwicklung der gesuchten Lösungen sich ohne explizite Lösung der gegebenen Gleichung berechnen lassen, wird hier in allgemeineren Fällen als dort erläutert.

Es sei $\mathfrak{G}$ ein ∞ im Inneren enthaltendes Gebiet, das von endlich vielen, mathematisch positiv orientierten, aus abgeschlossenen analytischen Bögen bestehenden geschlossenen Jordankurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ berandet wird. Außerdem mögen diese Kurven keine Spitzen aufweisen, d. h., in den Ecken liegen keine Nullwinkel vor. Weiterhin sei $\mathfrak{B}_j$ jeweils das Innere von $\mathfrak{C}_j$, und es wird im folgenden noch $\mathfrak{B} = \cup\,\mathfrak{B}_j$ und $\mathfrak{C} = \cup\,\mathfrak{C}_j$ gesetzt. Gesucht wird eine in $\mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ analytische Funktion $f(z)$ mit der Entwicklung

$$f(z) = z^k + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

in einer Umgebung von ∞, die nach $\mathfrak{B}$ stetig fortsetzbar ist und dort der Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}}(z) = q_j\overline{f_z(z)} \quad (z \in \mathfrak{B}_j) \tag{1}$$

genügt. Dabei sind die q_j gegebene reelle Konstanten mit $0 < q_j < 1$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), und $k \geqq 1$ bezeichnet eine vorgegebene natürliche Zahl. Wie aus [11: Teil II, Kap. V, § 3] folgt, ist $f(z)$ durch die gegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt und existiert immer unter solchen Voraussetzungen. Für $k = 1$ ist $f(z)$ ein Homöomorphismus der Vollebene auf sich mit Konformität in $\mathfrak{G}$ und Quasikonformität in $\mathfrak{B}$, wobei infinitesimale Kreise in $\mathfrak{B}_j$ in solche Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $(1 + q_j)/(1 - q_j)$ und zur reellen Achse parallelen großen Halbachse übergehen. Diese Funktion ist Lösung des Extremalproblems $\operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Max}$ in der Klasse aller stetigen und schlichten Abbildungen der Vollebene auf sich, die in $\mathfrak{G}$ konform sind mit der Entwicklung $z + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots$ bei $z = \infty$ und in $\mathfrak{B}_j$ noch $[(1 + q_j)/(1 - q_j)]$-quasikonform sind. Letzteres wurde in [3] bewiesen. Die Funktion $f(z)$ aus (1) und mit den dort zuvor angeführten Eigenschaften wird bei vorgegebenem q mit $0 < q < 1$ für $q_j = q$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) und einer analogen Singularität bei $z_0 \in \mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ in [6] in der oben beschriebenen Weise bestimmt.

2. Zusammenstellung von grundlegenden Eigenschaften der Lösung von (1), die den zuvor angegebenen Bedingungen genügt

Zunächst soll eine Gleichung für $f(z)$ hergeleitet werden. Aus (1) ergibt sich unmittelbar, daß $f(z) - q_j\overline{f(z)}$ in $\mathfrak{B}_j$ analytisch ist, und damit gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_j} \frac{f(\zeta) - q_j\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \tag{2}$$

für $j = 1, 2, \ldots, n$ und $z \in \mathfrak{G}$. Wegen

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) - z^k$$

für $z \in \mathfrak{G}$ folgt aus (2) durch Summation dieser Gleichungen

$$f(z) - z^k = -\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_j} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta$$

mit $z \in \mathfrak{G}$. Setzt man $r(z) = f(z) - z^k$, so ergibt sich endgültig

$$r(z) = A[r(z)] + A(z^k). \tag{3}$$

Dabei ist

$$A[X(z)] = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n} q_j \int\limits_{\mathfrak{C}_j} \frac{\overline{X(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{**}$$

gesetzt worden. Offenbar ist A ein antilinearer Operator.

Um eine Orthonormalreihenentwicklung durchführen zu können, wird zunächst folgender Hilbertraum eingeführt. Mit $H(\mathfrak{G})$ wird die Menge aller in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen $h(z)$ mit $h(\infty) = 0$ und

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy < \infty$$

bezeichnet. Diese Menge bildet bezüglich des Skalarproduktes

$$[h_1(z), h_2(z)] = \iint\limits_{\mathfrak{G}} h_1'(z) \cdot \overline{h_2'(z)}\, dx\, dy$$

einen Hilbertraum mit einem vollständigen Orthonormalsystem $\{\varphi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\ldots}$, wie man z. B. [10: Satz IV.2] entnimmt. Weitere Eigenschaften von $H(\mathfrak{G})$ werden im Abschnitt 3 aufgeführt. Man verifiziert leicht, daß die oben erklärte Funktion $r(z)$ in $H(\mathfrak{G})$ liegt. Somit existieren komplexe Zahlen β_ν mit $r(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \varphi_\nu(z)$ für $z \in \mathfrak{G}$. Setzt man diese Darstellung formal in (3) ein und nimmt an, daß A und die unendliche Summation vertauschbar sind, was bisher nicht bewiesen wurde, so erhält man für die β_ν ein unendliches Gleichungssystem (linear in β_ν und $\overline{\beta}_\nu$), welches im allgemeinen nur recht mühevoll zu lösen ist. Auf Fälle, bei denen das Gleichungssystem mit erträglichem Aufwand lösbar ist, wird im Abschnitt 11 eingegangen. Es ergibt sich gegenüber (3) bei der Bestimmung der β_ν eine gewisse Vereinfachung, wenn auf beide Seiten von (3) nochmals A angewendet wird und die entstehende

Gleichung zu (3) addiert wird. Man erhält dann

$$r(z) = A\{A[r(z)]\} + A[A(z^k)] + A(z^k).$$

Schreibt man für $A \circ A$ nun A^2, so folgt wegen der Linearität von A^2 folgende lineare Gleichung zweiter Art für $r(z)$:

$$r(z) = A^2 r(z) + b(z) \quad \text{mit} \quad b(z) = A^2(z^k) + A(z^k). \tag{4}$$

Allerdings muß für die exakte Herleitung von (4) noch gezeigt werden, daß $A\{A[r(z)]\}$ und $A[A(z^k)]$ sinnvoll erklärt werden können.

Im weiteren soll zur Lösung von (4) folgendes Verfahren untersucht werden. Man verwendet anstatt des Orthonormalsystems $\{\varphi_\nu(z)\}$ ein Funktionensystem $\{\psi_\nu(z)\}$, für das $\{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $H(\mathfrak{G})$ bildet. Dabei bedeutet I der identische Operator. Das zuvor erklärte System $\{\psi_\nu(z)\}$ kann noch anders motiviert werden. Anstatt des Skalarproduktes $[\cdot, \cdot]$ wird eine Bilinearform durch $[(I - A^2)\{h_1(z)\}, (I - A^2)\{h_2(z)\}]$ eingeführt und bewiesen, daß diese Bilinearform ein Skalarprodukt in $H(\mathfrak{G})$ bildet und prinzipiell die gleichen Eigenschaften wie $[\cdot, \cdot]$ (Separierbarkeit von $H(\mathfrak{G})$ und Existenz einer Kernfunktion) aufweist. Die Koeffizienten der $\psi_\nu(z)$ in der Darstellung von $r(z)$ ergeben sich, wie später gezeigt wird, auf bemerkenswert einfache Art und Weise. Dieses Vorgehen ist den Überlegungen in [6] sehr ähnlich. Dort wird ebenfalls ein neues Skalarprodukt eingeführt, so daß die Koeffizienten bei einer Orthonormalentwicklung der gesuchten Funktion bezüglich des neuen Skalarproduktes ohne vorherige Kenntnis der gesuchten Funktion berechnet werden können.

Für die theoretische Fundierung des soeben erläuterten Verfahrens werden zwei Aussagen über den Operator A formuliert und im Abschnitt 4 bewiesen.

Aussage 1: *Der Operator A ist für alle $h(z) \in H(\mathfrak{G})$ mit stetigen Randwerten auf $\mathfrak{C}$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ stetig.*

Aussage 2: *Die Gleichungen $(I - A)[h(z)] = g(z)$ und $(I + A)[h(z)] = g(z)$ sind für alle $g(z) \in H(\mathfrak{G})$ mit stetigen Randwerten auf $\mathfrak{C}$ lösbar und liefern jeweils genau eine Funktion $h(z) \in H(\mathfrak{G})$ mit stetigen Randwerten auf $\mathfrak{C}$, die von $g(z)$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ stetig abhängt.*

Bevor diese Aussagen bewiesen werden können, müssen einige Hilfsmittel aus verschiedenen Gebieten der Analysis bereitgestellt werden.

3. Einige Hilfsmittel

a) Gaußscher Integralsatz

Aus [9: S. 158, (6.17)] entnimmt man unter unwesentlichen Modifikationen der Voraussetzungen folgenden Satz.

Sei G ein beschränktes Gebiet der komplexen Ebene und D ein Jordangebiet mit rektifizierbarem Rand ∂D, wobei der Abschluß von D noch in G enthalten sei. Dann gilt für jede in G stetige Funktion $h(z)$ mit über G absolut integrierbaren Sobolevableitungen bei mathematisch positiver Orientierung von ∂D

$$\iint_D h_{\bar{z}}(z)\, dx\, dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} h(z)\, dz.$$

Bemerkung: Hier wurden die absolute Stetigkeit auf Geraden durch die zweidimensionale Stetigkeit und die in [9] als verallgemeinert bezeichneten Ableitungen durch Sobolevableitungen ersetzt.

Eine häufig benötigte Formel ist die nach Borel und Pompeiu benannte. Sie wird in der folgenden Form gebraucht: Sei $h^*(z) \in H(\mathfrak{G})$ und gestatte eine noch im Abschluß von $\mathfrak{B}$ stetige Fortsetzung, die über $\mathfrak{B}$ absolut integrierbare Sobolevableitungen besitzt, so gilt

$$h^*(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathfrak{B}} \frac{h_{\bar{\zeta}}^*(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta)\ \forall z \in \mathbf{C}.$$

Diese Formel folgt nach einfachen Rechnungen aus der vorherigen (siehe z. B. [9: Kap. III, Hilfssatz 7.1]).

b) Eigenschaften der P- und T-Operatoren

Aus [11: Teil II, Kap. V, § 2] entnimmt man folgenden Satz.

Es sei G ein beschränktes Gebiet, für das

$$Ph = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{G} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \quad \text{und} \quad Th = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{G} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta$$

definiert werden. Dann gilt für alle $h(z) \in L_p(G)$ mit $p > 1$

$$\frac{\partial Ph}{\partial z} = Th, \quad \frac{\partial Ph}{\partial \bar{z}} = h, \quad Th \in L_p(\mathbf{C})$$

und

$$\iint\limits_{G} |Th|^p\, dx\, dy \leqq (\Lambda_p)^p \iint\limits_{G} |h(z)|^p\, dx\, dy$$

mit $\Lambda_2 = 1$.

Aus den Überlegungen nach dem Beweis von Lemma 2 in [1: Chap. V. A.] erhält man für $h(z) \in L_2(G)$, wobei G wie zuvor erklärt wird,

$$\iint\limits_{\mathbf{C}} |Th|^2\, dx\, dy = \iint\limits_{G} |h(z)|^2\, dx\, dy.$$

Anmerkung: $L_p(G)$ bzw. $L_p(\mathbf{C})$ ist die Menge aller zur p-ten Potenz über G bzw. über die Vollebene absolut integrierbarer Funktionen.

c) Abschätzung von Dirichletintegralen mittels Eigenwerten zum Neumannschen Kern

In [14] wird der kleinste nichttriviale Eigenwert λ zum Neumannschen Kern (hierzu siehe [2: S. 3ff.]) auch für Systeme nichtglatter Jordankurven eingeführt, und es werden noch notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $\lambda > 1$ gilt. Aus einer solchen Bedingung (Theorem 3) entnimmt man, daß genau dann $\lambda > 1$ für eine aus endlich vielen abgeschlossenen glatten Bögen bestehende geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}$ bzw. für ein System von endlich vielen solcher Kurven gilt, wenn $\mathfrak{C}$ bzw. die Jordankurven des Systems keine Spitzen aufweisen. Diese Bedingung an die Kurven $\mathfrak{C}_j$ aus Abschnitt 1 wurde bereits als Voraussetzun formuliert. Ist nun $u(z)$ eine in $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ stetige und in $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{G}$ harmonische Funktion, deren Konjugierte in $\mathfrak{G}$ eindeutig ist, so gilt

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \leqq \frac{\iint\limits_{\mathfrak{G}} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy}{\iint\limits_{\mathfrak{B}} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy} \leqq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

(vorausgesetzt, der Nenner ist weder Null noch Unendlich).

d) Auszüge aus der Theorie der Hilbertschen Räume mit Kernfunktion

In [10] wird die Theorie der Hilbertschen Räume mit Kernfunktion ausführlich dargestellt. Das folgende wird hieraus benötigt.

$H(\mathfrak{G})$ ist ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, d. h., es gibt eine Funktion $K(z, \bar{\zeta}) \in H(\mathfrak{G})$ für alle $\zeta \in \mathfrak{G}$ (als Funktion von z) und $h(\zeta) = [h(z), K(z, \bar{\zeta})]$ für alle $h(z) \in H(\mathfrak{G})$ und alle $\zeta \in \mathfrak{G}$ (Satz IV.2). Ein vollständiges Funktionensystem in $H(\mathfrak{G})$ stellt die Menge aller $(z - z_j)^{-l}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots)$ dar, wobei $z_j \in \mathfrak{B}_j$ gilt (Kapitel IV, § 5). Die Menge aller in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ analytischen Funktionen, die in ∞ verschwinden, ist in $H(\mathfrak{G})$ enthalten, und der Abschluß dieser Menge bezüglich $[\cdot, \cdot]$ ist $H(\mathfrak{G})$. Die Menge aller Funktionen aus $H(\mathfrak{G})$ mit stetigen Werten in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ ist ebenfalls eine in $H(\mathfrak{G})$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ überall dichte Menge. Die beiden letzten Eigenschaften folgen aus der Existenz eines in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ analytischen vollständigen Orthonormalsystems in $H(\mathfrak{G})$, wie man aus Satz IV.6 unter leicht modifizierten Voraussetzungen erhält.

e) Randwerte des Cauchyschen Integrals

In [12: I, § 15] werden die Grenzwerte des Cauchyschen Integrals in den Endpunkten einer glatten Integrationskurve untersucht. Aus den dortigen Überlegungen entnimmt man die Stetigkeit in z bei Annäherung an die Eckpunkte von $\mathfrak{C}$ der Funktion

$$\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{\overline{h(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in \mathfrak{G}),$$

wenn $h(\zeta)$ auf $\mathfrak{C}$ analytisch ist. In die übrigen Punkte von $\mathfrak{C}$ kann die durch das Integral erklärte Funktion so fortgesetzt werden, daß sie dort noch analytisch ist. Letzteres folgt aus der analytischen Fortsetzbarkeit von $\overline{h(\zeta)}$ in eine (kleine) Umgebung dieser Punkte.

4. Beweise der Aussagen 1 und 2

Zunächst soll die Herleitung von (4) legitimiert werden. Wegen 3e) ist $A(z^k)$ in alle Punkte von $\mathfrak{C}$ stetig fortsetzbar. Aus $A[r(z)] \mathrel{=}_{\overline{\ }} r(z) - A(z^k)$ und der Stetigkeit von $r(z)$ auf $\mathfrak{C}$ folgt damit die Stetigkeit von $A[r(z)]$, d. h., $A\{A[r(z)]\}$ und $A[A(z^k)]$ sind sinnvoll erklärt.

Beweis von Aussage 1: Die Funktion $h(z)$ wird durch die Lösung des Dirichletproblems bei der Laplacegleichung für $\operatorname{Re} h(z)$ und $\operatorname{Im} h(z)$ stetig nach $\mathfrak{B}$ fortgesetzt.

Aus 3c) folgt dann die Existenz von

$$\iint_{\mathfrak{B}} [|h_z(z)|^2 + |h_{\bar z}(z)|^2]\, dx\, dy.$$

Mit Hilfe von 3a) schließt man aus der Definition von A

$$A[h(z)] = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} q_j \iint_{\mathfrak{B}_j} \frac{\overline{h_\zeta(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta.$$

Aus 3b) entnimmt man

$$\iint_{\mathfrak{G}} \left| \frac{d}{dz} \{A[h(z)]\} \right|^2 dx\, dy \leqq \sum_{j=1}^{n} q_j^2 \iint_{\mathfrak{B}_j} |h_z(z)|^2\, dx\, dy$$

$$\leqq q_{\mathrm{Max}}^2 \iint_{\mathfrak{B}} [|h_{\bar z}(z)|^2 + |h_z(z)|^2]\, dx\, dy,$$

wobei $q_{\mathrm{Max}} = \max q_j$ sei. Mittels 3c) kann der letzte Term durch

$$q_{\mathrm{Max}}^2 \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy$$

nach oben abgeschätzt werden. Somit gilt

$$\iint_{\mathfrak{G}} \left| \frac{d}{dz} \{A[h(z)]\} \right|^2 dx\, dy \leqq q_{\mathrm{Max}}^2 \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy,$$

d. h., $A[h(z)]$ ist für randstetige $h(z) \in H(\mathfrak{G})$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ stetig. Aufgrund der Dichtheit aller dieser $h(z)$ in $H(\mathfrak{G})$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ und der soeben bewiesenen Ungleichung ist offensichtlich, daß $A[h^*(z)]$ sinnvoll erklärt werden kann, wenn $h^*(z)$ ein beliebiges Element aus $H(\mathfrak{G})$ ist, und daß $A[h^*(z)]$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ in $H(\mathfrak{G})$ stetig ist ∎

Beweis von Aussage 2: Man setzt $g(z)$ analog wie $h(z)$ im vorigen Beweis durch die Lösung des Dirichletproblems stetig fort. Dann wird eine Funktion $h_*(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch die folgenden Eigenschaften definiert. In $\mathfrak{B}_j$ gelte

$$h_{*\bar z}(z) = q_j \overline{h_{*z}(z)} + g_{\bar z}(z),$$

und $h_*(z)$ sei nach $\mathfrak{G}$ analytisch fortsetzbar mit $h_*(\infty) = 0$. Wie man den Überlegungen in [11: Teil II, Kap. V, § 3] entnimmt, ist $h_*(z)$ damit eindeutig festgelegt, und die Existenz einer solchen Funktion ist ebenfalls gesichert. Ferner gilt die Ungleichung (siehe ebenda bzw. [1: Chapter V.B] und 3b))

$$\iint_{\mathfrak{B}} |h_{*z}(z)|^2\, dx\, dy \leqq (1 - q_{\mathrm{Max}})^{-2} \iint_{\mathfrak{B}} |g_z(z)|^2\, dx\, dy. \tag{5}$$

Mittels der Differentialgleichung für $h_*(z)$ folgt durch Integration leicht

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathfrak{B}} \frac{h_{*\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} q_j \iint_{\mathfrak{B}_j} \frac{\overline{h_{*\zeta}(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathfrak{B}} \frac{g_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \quad (z \in \mathfrak{G}).$$

Nun liegt eine Anwendung von 3a) nahe. Wegen 3c) ist $[|g_z(z)|^2 + |g_{\bar z}(z)|^2]$ über $\mathfrak{B}$ integrierbar, d. h., wegen (5) und der Differentialgleichung für $h_*(z)$ gilt das auch für $[|h_{*z}(z)|^2 + |h_{*\bar z}(z)|^2]$. Mit Hilfe von 3a) folgt nach der Formel von Borel-Pompeiu

$$h_*(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}{}' q_j \int_{\mathfrak{C}_j} \frac{\overline{h_*(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta + g(z) \qquad (z \in \mathfrak{G}),$$

d. h., $h_*(z)$ ist eine Lösung von $(I - A)\,[h_*(z)] = g(z)$.

Es soll nun gezeigt werden, daß letztere Gleichung höchstens eine in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ stetige Lösung aus $H(\mathfrak{G})$ haben kann. Dafür ist hinreichend, daß $(I - A)\,[h_0(z)] = 0$ nur die triviale Lösung in $H(\mathfrak{G})$ (zunächst bei Beschränkung auf in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ stetige Funktionen) besitzt. Für $h_0(z)$ ergibt sich dann ähnlich wie in Abschnitt 2 (allerdings in umgekehrter Folge), daß $h_0(z) - q_j\overline{h_0(z)}$ in $\mathfrak{B}_j$ analytisch ist. Damit ist aber $h_0(z)$ nach $\mathfrak{B}$ stetig fortgesetzt worden und stellt eine in $\mathfrak{B}$ harmonische Funktion dar. Letzteres folgt wegen

$$0 = \{[h_0(z) - q_j\overline{h_0(z)}]_{\bar z}\}_z = h_{0\bar z z}(z) - q_j\overline{h_{0\bar z z}(z)}, \quad \text{d. h. } h_{0\bar z z}(z) = 0 .$$

Mittels 3c) erhält man aus $h_0(z) \in H(\mathfrak{G})$ die Endlichkeit des Dirichletintegrals von $h_0(z)$ über $\mathfrak{B}$. Die Formel von Borel-Pompeiu bringt nun für alle komplexen z die Darstellung

$$h_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathfrak{B}} \frac{h_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta .$$

Wegen $[h_0(z) - q_j\overline{h_0(z)}]_{\bar z} = 0$ in $\mathfrak{B}_j$ folgt damit

$$h_0(z) = -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} q_j \iint_{\mathfrak{B}_j} \frac{\overline{h_{0\zeta}(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta .$$

Mit Hilfe von 3b) erhält man hieraus

$$\iint_{\mathfrak{B}} |h_{0z}(z)|^2\, dx\, dy \leqq q_{\text{Max}}^2 \iint_{\mathfrak{B}} |h_{0z}(z)|^2\, dx\, dy,$$

also $h_{0z}(z) \equiv 0$ in $\mathfrak{B}$ wegen $q_{\text{Max}} < 1$. Damit gilt $h_{0\bar z}(z) \equiv 0$ in $\mathfrak{B}$, d. h. $h_0(z) \equiv 0$ für alle komplexen z.

Es soll nun gezeigt werden, daß $h_*(z)$ in $H(\mathfrak{G})$ liegt. Dann folgt nämlich, daß $(I - A)\,[h(z)] = g(z)$ genau eine Lösung unter allen in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ stetigen Funktionen aus $H(\mathfrak{G})$ hat. Man erhält nun wegen 3b) aus der Formel von Borel-Pompeiu für die Funktion $h_*(z)$

$$\iint_{\mathfrak{G}} |h_*'(z)|^2\, dx\, dy \leqq \iint_{\mathfrak{B}} |h_{*\bar z}(z)|^2\, dx\, dy .$$

Außerdem gilt wegen (5) und wegen $|h_{*\bar z}(z)|^2 \leqq 2q_{\text{Max}}^2\, |h_{*z}(z)|^2 + 2|\, g_{\bar z}(z)|^2$ in $\mathfrak{B}$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{G}} |h_*'(z)|^2\, dx\, dy &\leqq \iint_{\mathfrak{B}} |h_{*\bar z}(z)|^2\, dx\, dy \\ &\leqq 2\left(\frac{q_{\text{Max}}}{1 - q_{\text{Max}}}\right)^2 \iint_{\mathfrak{B}} |g_z(z)|^2\, dx\, dy + 2\iint_{\mathfrak{B}} |g_{\bar z}(z)|^2\, dx\, dy \\ &\leqq 2\left[1 + \left(\frac{q_{\text{Max}}}{1 - q_{\text{Max}}}\right)^2\right] \iint_{\mathfrak{B}} [|g_z(z)|^2 + |g_{\bar z}(z)|^2]\, dx\, dy \\ &\leqq 2\left[1 + \left(\frac{q_{\text{Max}}}{1 - q_{\text{Max}}}\right)^2\right] \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \iint_{\mathfrak{G}} |g'(z)|^2\, dx\, dy . \qquad (6)\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung bringt neben dem gewünschten Resultat noch die Stetigkeit von $(I - A)^{-1}$. (Man beachte aber die Zusatzforderung der Stetigkeit der Lösungen $h(z)$ in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$, die noch besteht!) Wie beim Beweis der Aussage 1 schließt man auf die stetige Fortsetzbarkeit von $(I - A)^{-1}$ für beliebige $g(z) \in H(\mathfrak{G})$. Um aber zu zeigen, daß der fortgesetzte Operator die Umkehrung von $I - A$ darstellt, muß die vorher gemachte Einschränkung an die $h(z)$ fallengelassen werden. Es wird im folgenden bewiesen, daß $(I - A)[h(z)] = 0$ in $H(\mathfrak{G})$ nur die Lösung $h(z) \equiv 0$ hat. Ist nämlich $h(z)$ eine Lösung der homogenen Gleichung, so existiert eine Folge $\{h_m(z)\}_{m=1,2,\ldots}$ von in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ analytischen Funktionen, die gegen $h(z)$ in der von $[\cdot, \cdot]$ erzeugten Norm strebt (siehe auch 3d)). Setzt man $g_m(z) = (I - A)[h_m(z)]$, so sind die $g_m(z)$ wegen 3e) in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ stetig und erfüllen aufgrund der vorher bewiesenen Eindeutigkeitsaussage mit den entsprechenden $h_m(z)$ die Beziehung (6). Aufgrund der Stetigkeit von A strebt aber $g_m(z)$ gegen $(I - A)[h(z)] = 0$ mit $m \to \infty$, d. h., $h_m(z)$ strebt wegen (6) ebenfalls gegen Null. Damit ist $h(z) \equiv 0$. Der Beweis für die Gleichung $(I + A)[h(z)] = g(z)$ läuft analog ∎

Wegen $(I - A) \circ (I + A) = I - A^2$ ergibt sich zusammenfassend der folgende Fakt.

Satz 1: *$I - A^2$ ist ein linearer Homöomorphismus bezüglich $[\cdot, \cdot]$ von $H(\mathfrak{G})$ auf sich.*

5. Schlußfolgerungen für eine Reihenentwicklung

Es sei $\{\chi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\ldots}$ ein vollständiges System von Funktionen aus $H(\mathfrak{G})$, die sämtlich noch in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ analytisch sind. Berechnet man $\{(I - A^2)[\chi_\nu(z)]\}$ und führt mit diesem System eine Orthonormierung durch, so entsteht ein Orthonormalsystem $\{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Dieses System ist vollständig.

b) Für $\{a_\nu\} \in l^2$ konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(z)$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$.

Die Vollständigkeit ergibt sich sofort aus der Umkehrbarkeit und Stetigkeit von $I - A^2$. Da offenbar

$$\sum_{\nu=1}^{\nu} a_\nu \{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\}$$

bezüglich $[\cdot, \cdot]$ konvergiert, folgt aus der Stetigkeit von $(I - A^2)^{-1}$ sofort auch die zweite Eigenschaft. Beides wird zum Beweis der naheliegenden Vermutung benutzt, daß aus (4)

$$r(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [b(z), (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}]\, \psi_\nu(z) \tag{7}$$

folgt. Dafür ist zu zeigen, daß die auf der rechten Seite stehende Reihe in $H(\mathfrak{G})$ konvergiert und daß

$$(I - A^2)\left\langle r(z) - \sum_{\nu=1}^{\infty} [b(z), (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}]\, \psi_\nu(z)\right\rangle = 0$$

gilt. Die Konvergenz ergibt sich sofort aus der Eigenschaft b), wenn man noch beachtet, daß $\{[b(z), (I - A^2)\langle\psi_\nu(z)\rangle]\}$ die Folge der bekanntlich quadratisch (im Betrage) summierbaren Fourierkoeffizienten von $b(z) \in H(\mathfrak{G})$ bildet. Zum anderen ist die letzte Gleichung äquivalent mit

$$(I - A^2)[r(z)] - \sum_{\nu=1}^{\infty} [b(z), (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}] \{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\} = 0 .$$

Wegen der Vollständigkeit von $\{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\}$ in $H(\mathfrak{G})$ ist der Subtrahend auf der linken Seite gleich $b(z)$, d. h. $(I - A^2)[r(z)] = b(z)$, was nichts anderes als die Ausgangsgleichung (4) ist. Damit ist (7) vollständig bewiesen.

Der soeben dargelegte Sachverhalt läßt sich — wie bereits im Abschnitt 2 bemerkt — mit Hilfe der Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ausdrücken. Zunächst ist offensichtlich, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wegen Satz 1 sogar ein Skalarprodukt in $H(\mathfrak{G})$ ist und $H(\mathfrak{G})$ bezüglich diesem ebenfalls einen separierbaren Hilbertraum mit einem reproduzierenden Kern $K_A(z, \bar{\zeta})$ darstellt. Nun gilt wegen (4) für alle $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\langle r(z), \psi_\nu(z)\rangle = [(I - A^2)\{r(z)\}, (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}] = [b(z), (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}],$$

d. h. die Fourierkoeffizienten von $r(z)$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ lassen sich durch die gegebene Funktion $b(z)$ ausdrücken, und man erhält sofort (7). Damit ergeben sich die bereits im Abschnitt 2 erwähnten Parallelen zu [6] und natürlich auch zu den Überlegungen in [10: Kap. VII, § 1—3].

6. Darstellung von $(I - A^2)^{-1}$ mit Hilfe eines Kernes

Da $(I - A^2)^{-1}$ wegen Satz 1 ein linearer und beschränkter Operator ist, folgt nach [10: Satz III.10] die Darstellung

$$(I - A^2)^{-1}[g(z)] = [g(\zeta), K_*(\zeta, \bar{z})] \tag{8}$$

für alle $g(z) \in H(\mathfrak{G})$, wobei der Kern $K_*(\zeta, \bar{z})$ des Operators $(I - A^2)^{-1}$ in ζ und $\bar{z}$ analytisch ist. Entsprechend wie bei der Kernfunktion in $H(\mathfrak{G})$ bezüglich $[\cdot,\cdot]$ gilt für $K_*(\zeta, \bar{z})$ ebenfalls die Reihenentwicklung

$$K_*(\zeta, \bar{z}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \{(I - A^2)[\psi_\nu(\zeta)]\} \overline{\psi_\nu(z)},$$

wobei $\{\psi_\nu(z)\}$ wieder das System aus Abschnitt 5 ist. $K_*(\zeta, \bar{z})$ kann durch folgende Extremaleigenschaft charakterisiert werden.

Satz 2: *Es sei $z \in \mathfrak{G}$ fest vorgegeben. Unter allen $g(t) \in H(\mathfrak{G})$ mit $(I - A^2)^{-1}[g(t)]_{t=z} = 1$ hat*

$$K_*(t, \bar{z}) \Big/ \iint_{\mathfrak{G}} \left| \frac{\partial K_*(\zeta, \bar{z})}{\partial \zeta} \right|^2 d\xi\, d\eta$$

und nur diese Funktion die minimale Norm, die durch $[\cdot,\cdot]$ erzeugt wird.

Beweis: Wegen (8) und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$1 = |(I - A^2)^{-1}[g(t)]|_{t=z}^2 \leq [g(t), g(t)] \cdot [K_*(t, \bar{z}), K_*(t, \bar{z})].$$

Dabei steht das Gleichheitszeichen nur für $g(t) = \alpha \cdot K_*(t, \bar{z})$. α ist hier eine von t unabhängige komplexe Zahl. Nach kurzer Rechnung folgt dann die Behauptung ∎

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch die Funktion $r(z)$ mittels $b(t)$ und $K_*(t, \bar{z})$ ausgedrückt werden. Es gilt wegen (4) und (8)

$$r(z) = [b(t), K_*(t, \bar{z})]. \tag{9}$$

Dabei gibt es zwischen $K_*(t, z)$ und $K(t, \bar{z})$ den Zusammenhang

$$K_*(t, \bar{z}) = \overline{(I - A^2)^{-1} \left[\overline{K(t, \bar{z})}\right]}, \tag{9'}$$

wobei der Operator $(I - A^2)^{-1}$ auf $\overline{K(t, \bar{z})}$ als (analytische) Funktion in z angewendet wird.

7. Erläuterung eines Verfahrens zur Berechnung von $r(z)$

Es seien z_j jeweils Punkte aus $\mathfrak{B}_j$. Das System aller negativen ganzzahligen Potenzen von $z - z_j$ sei im weiteren mit $\{\chi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\ldots}$ bezeichnet. Dieses System ist wegen 3d) in $H(\mathfrak{G})$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ vollständig. Die Anordnung der Funktionen $\chi_\nu(z)$ erfolgt so, daß zuerst alle Potenzen von $z - z_j$ mit dem Exponenten -1, dann -2 usw. verwendet werden. Ein Verfahren zur Berechnung von $r(z)$ könnte wie folgt gegliedert werden.

a) Man bestimmt zunächst $\{(I - A^2)[\chi_\nu(z)]\}_{\nu=1,2,\ldots,N}$ und $b(z) = A(z^k) + A^2(z^k)$. In vielen praktischen Fällen werden diese Funktionen nur durch gewisse diskrete Funktionswerte gegeben sein.

b) Diese Werte genügen aber zur (näherungsweisen) Orthonormierung nach E. Schmidt, die sich im folgenden anschließt. Allerdings wird aber noch die Darstellung

$$\psi_\nu(z) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \gamma_{\nu\mu} \cdot \chi_\mu(z) \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, N$$

realisiert, wobei $\{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\}_{\nu=1,2,\ldots,N}$ eine endliche Teilfolge des vollständigen Orthonormalsystems aus Abschnitt 5 darstellt. Es sei hier noch bemerkt, daß bei einer näherungsweisen Orthonormierung die Genauigkeit von $r(z)$ aus (7) gering sein kann.

c) Dann werden die Skalarprodukte $[b(\hat{z}), (I - A^2)\{\chi_\nu(z)\}]$ berechnet und in einem Vektor $\mathfrak{b}$ zusammengefaßt. Abschließend erfolgt die Berechnung des Matrizenproduktes $\left((\gamma_{\nu\mu})\right)^{\mathrm{T}} \left((\bar{\gamma}_{\nu\mu})\right) \mathfrak{b}$. Als Ergebnis erhält man die genäherten Koeffizienten bei $\chi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ und insgesamt bei geeigneter Zusammenfassung eine Entwicklung nach Orthonormalpolynomen bezüglich $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Zur Approximation von $r(z)$ durch solche Entwicklungen ist zu sagen, daß diese Approximation in der von $\langle\cdot, \cdot\rangle$ erzeugten Norm erfolgt und damit die Approximation in der von $[\cdot, \cdot]$ erzeugten Norm mit sich bringt. Nach [10: Satz III.4] erhält man leicht, daß die Approximation sogar in der bekannten Supremumsnorm über abgeschlossene Teilmengen von $\mathfrak{G}$ erfolgt. Hierzu mögliche Fehlerabschätzungen werden im folgenden Abschnitt gegeben.

8. Zwei Fehlerabschätzungen

Es wird hier davon ausgegangen, daß $\{(I - A^2)[\psi_\nu(z)]\}_{\nu=1,2,\ldots,N}$ ein exaktes Orthonormalsystem ist; $r_N(z)$ sei das Ergebnis des Verfahrens aus Abschnitt 7. Wegen einer bekannten Formel aus der Theorie der Fourierreihen folgt mit $\|h(z)\|^2 = [h(z), h(z)]$

$$\|(I - A^2)[r_N(z) - r(z)]\|^2 = \|b(z)\|^2 - \sum_{\nu=1}^{N} |[b(z), (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}]|^2$$

(siehe z. B. [10: Satz II.5 und Satz II.7]). Mittels (6) erhält man dann die erste Fehlerabschätzung

$$\|r_N(z) - r(z)\|^2 \leqq \left\{2\left[\left(\frac{q_{\mathrm{Max}}}{1-q_{\mathrm{Max}}}\right)^2 + 1\right]\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right\}^2$$
$$\times \left\{\|b(z)\|^2 - \sum_{\nu=1}^{N} |[b(z), (I - A^2)\{\psi_\nu(z)\}]|^2\right\}. \tag{10}$$

In manchen Fällen ist es auch sinnvoll, $|r_N(z) - r(z)|$ für $z \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$ durch eine Größe der Form $M^*\varrho^{*N}$ mit $M^* > 0$ und $0 < \varrho^* < 1$ abzuschätzen. Solche Ungleichungen bei Approximation von analytischen Funktionen werden unter gewissen Voraussetzungen in [15] (siehe z. B. Theorem 5 auf S. 75) angegeben. Diese Voraussetzungen erfordern, daß die $\mathfrak{C}_j$ sogar durchweg analytische Kurven sind. Dann ist nämlich, wie noch gezeigt wird, $r(z)$ auf $\mathfrak{C}$ analytisch. Im folgenden ist ein Hilfssatz über die analytische Fortsetzung notwendig.

Lemma 1: *Sei $h(t)$ in $\{t: r_0 \leqq |t| \leqq r_0^{-1}\}$ $(0 < r_0 < 1)$ stetig, und sei $h(t)$ in $\{t: r_0 \leqq |t| < 1\}$ bzw. $h(t) - q\overline{h(t)}$ (q — komplexe Konstante) in $\{t: 1 < |t| \leqq r_0^{-1}\}$ analytisch. Dann gestattet $h(t)$ eine analytische Fortsetzung nach $\{t: 1 < |t| \leqq r_0^{-1}\}$.*

Der Beweisgedanke beruht auf allgemeineren Überlegungen in [5] (siehe dazu Fußnote auf S. 273). Die Funktion $h^*(t) = h(t) - q\overline{h(t)} + q\overline{h(1/\bar{t})}$ ist für $1 < |t| \leqq r_0$ analytisch und schließt sich stetig an $h(t)$ an.

Um Lemma 1 auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, bildet man das Äußere des Einheitskreises durch $\sigma_j(t)$ schlicht und konform auf $\mathfrak{B}_j$ ab, wobei $\sigma_j(\infty) = z_j$ sei (z_j wie in Abschnitt 7). Offenbar gibt es, da die $\mathfrak{C}_j$ durchweg analytische Kurven sind, eine Zahl ϱ mit $0 < \varrho < 1$, so daß $\sigma_j(t)$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ in $\{t: |t| \geqq \varrho\}$ noch schlicht und analytisch ist und ihr Bild von $\{t: |t| \geqq \varrho\}$ jeweils mit $\mathfrak{B}_l$ ($l \neq j$, $l = 1, 2, \ldots, n$) disjunkt ist. Weiterhin sei $\sigma_j(\{t: |t| = \varrho^{-1}\}) = \mathfrak{C}_j^\varrho$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$. Auf $f[\sigma_j(t)]$ kann dann Lemma 1 angewandt werden. Es bringt die analytische Fortsetzbarkeit von $f[\sigma_j(t)]$ (also auch von $r[\sigma_j(t)]$) nach $\{t: 1 \leqq |t| \leqq \varrho^{-1}\}$. Damit ist $r(z)$ in allen Punkten auf und außerhalb aller Kurven $\mathfrak{C}_j^\varrho$ analytisch. Diese Menge ist ein n-fach zusammenhängender Bereich $\overline{\mathfrak{G}}^\varrho$, der $\mathfrak{G}$ im Inneren enthält und von den mathematisch positiv orientierten analytischen Jordankurven $\mathfrak{C}_j^\varrho$ berandet wird. Für innere Punkte aus $\overline{\mathfrak{G}}^\varrho$ folgt die Zerlegung von $r(z)$ in seine Komponenten $r^{(j)}(z)$ mit

$$r^{(j)}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_j^\varrho} \frac{r(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} r^{(j)}(z) = r(z).$$

Die Funktionen $r^{(j)}(z)$ sind jeweils außerhalb und auf $\mathfrak{C}_j^\varrho$ analytisch bzw. dorthin analytisch fortsetzbar. Um zu erreichen, daß die im weiteren zu betrachtenden Funktionen auf einer kompakten Menge analytisch sind, setzt man $r_j^*(\zeta_j) = r^{(j)}(z_j + 1/\zeta_j)$ und wendet [15: Theorem 5/S. 75] an. Hierbei stellt $\log|\sigma_j^{-1}(z_j + 1/\zeta_j)|$ die Greensche Funktion des Bildes von $\mathfrak{B}_j$ bei der Abbildung $\zeta_j = 1/(z - z_j)$ mit dem Quellpunkt bei ∞ dar und das Bild von $\mathfrak{C}_j^\varrho$ bei dieser Abbildung erweist sich als Niveaulinie der Greenschen Funktion zum Wert $1/\varrho$ $(\varrho < 1)$. Es existieren also nach dem zitierten Satz Polynome $p_m^{(j)}(\zeta_j)$ vom Grade m, so daß

$$|p_m^{(j)}(\zeta_j) - r_j^*(\zeta_j)| \leqq M_j\varrho^m$$

für z $(= z_j + 1/\zeta_j)$ auf und außerhalb von $\mathfrak{C}_j$ gilt, wobei $M_j > 0$ von m unabhängig ist. Aus dieser Ungleichung ergibt sich mit ähnlichen Überlegungen wie in [15: § 4.7 und § 5.3] (vergleiche auch mit dem Ergebnis im konformen Fall in [2: Satz 5.5/S. 247]) die folgende Aussage.

Satz 3: *Sind die Kurven $\mathfrak{C}_j$ sogar noch sämtlich analytisch, so gilt für alle $z \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$*

$$|r_N(z) - r(z)| \leqq M\left(\sqrt[n]{\varrho}\right)^N. \tag{11}$$

Dabei ist $M > 0$ und $0 < \varrho < 1$, und ϱ hat die Eigenschaften, daß die Abbildung $\sigma_j(t)$ von $\{t: |t| > 1\}$ auf $\mathfrak{B}_j$ in $\{t: |t| \geqq \varrho\}$ noch schlicht und analytisch ist und ihr Bild von $\{t: |t| \geqq \varrho\}$ mit $\mathfrak{B}_l$ $(l \neq j,\ l = 1, 2, \ldots, n)$ disjunkt ist $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Eine Möglichkeit der Bestimmung von ϱ ohne die Kenntnis der Abbildungen von $\{t: |t| > 1\}$ auf $\mathfrak{B}_j$ wird im folgenden gegeben.

9. Eine mögliche Bestimmung von ϱ

Da die Überlegungen für alle Kurven $\mathfrak{C}_j$ analog laufen, werden sie nur für $\mathfrak{C}_1$ durchgeführt. Für $\mathfrak{C}_1$ sei die Parameterdarstellung $z = z^{(1)}(e^{is})$ mit $s \in [0, 2\pi]$ gegeben. Es ist nun möglich, die eineindeutige und analytische Funktion $z^{(1)}(e^{is})$ so analytisch fortzusetzen, daß die entstehende Funktion $z^{(1)}(\tau)$ für $R \leqq |\tau| \leqq 1/R$ $(0 < R < 1)$ schlicht und analytisch ist. Damit liegt $\mathfrak{C}_1$ also im Inneren eines Ringbereiches $\overline{\mathfrak{B}_1{}^R}$, der aus $\{\tau: R \leqq |\tau| \leqq 1/R\}$ bei $z^{(1)}(\tau)$ entsteht. Wie das Schwarzsche Spiegelungsprinzip zeigt, ist die (i. a. nicht explizit bekannte) Abbildung des Äußeren des Einheitskreises auf $\mathfrak{B}_1$ nach $\overline{\mathfrak{B}_1{}^R} \setminus \mathfrak{B}_1$ noch analytisch fortsetzbar. Das Urbild von $\overline{\mathfrak{B}_1{}^R} \setminus \mathfrak{B}_1$ bei dieser Abbildung wird mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Offenbar ist $\mathfrak{D}$ von $\{t: |t| = 1\}$ und einer in $\{t: |t| < 1\}$ gelegenen analytischen geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{K}^R$ berandet. Daher existiert ein ϱ mit $0 < \varrho < 1$ derart, daß $\{t: \varrho \leqq |t| < 1\}$ in $\mathfrak{D}$ enthalten ist. Offensichtlich ist dieses ϱ für die Aussage von Satz 3 geeignet. Nun hat das Innere von $\mathfrak{D}$ den Modul $-\log R/(2\pi)$, d. h., der Abstand der Punkte von $\mathfrak{K}^R$ zum Ursprung ist höchstens $1/\Phi^{-1}(1/R)$. Letzteres wird durch eine genauere Betrachtung der Überlegungen klar, die in [1: Chap. III.B] und in [8: Kap. 1.9] zum Normalgebiet von Grötzsch führen. Dabei bezeichnet Φ^{-1} die Umkehrung der dort gegebenen Funktion Φ. Es ergibt sich also der

Satz 4: *Die in Satz 3 auftretende Größe ϱ kann durch analytische und schlichte Fortsetzung der Parameterdarstellungen $z^{(j)}(e^{is})$ der Kurven $\mathfrak{C}_j$ auf den Kreisring $\{\tau: R \leqq |\tau| \leqq 1/R\}$ $(0 < R < 1)$ unter Beachtung der dortigen Disjunktheitsforderung durch $1/\Phi^{-1}(1/R)$ (< 1) nach oben abgeschätzt werden, d. h., diese Schranke liefert auch einen brauchbaren Wert für ϱ.*

Bemerkung: Mit Hilfe der Gleichungen 6.197 in [13: S. 290] erhält man für $1/\Phi^{-1}(1/R)$ den Ausdruck

$$4R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} R^{2\nu^2-2\nu}\right)^2 \cdot \left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} R^{2\nu^2}\right)^{-2}.$$

10. Erweiterung des Verfahrens auf eine gewisse Klasse von Differentialgleichungen

Gegeben sei folgende Problemstellung. Es sei $q(z)$ eine im Abschluß von $\mathfrak{B}$ analytische Funktion mit $|q(z)| < 1$ daselbst. Gesucht ist die stetige Lösung der Gleichung

$$w_{\bar{z}}(z) = q(z)\,\overline{w_z(z)} \quad \text{für} \quad z \in \mathfrak{B}$$

mit der sich stetig anschließenden Funktion $w(z)$, für die $w(z) - z^k$ in $\mathfrak{G}$ analytisch und bei $z = \infty$ Null ist. Es zeigt sich, daß die Überlegungen der Abschnitte 2 und 4 fast wörtlich wiederholt werden können. Schwierigkeit gibt es nur beim ersten Eindeutigkeitsbeweis für die Lösung der homogenen Operatorgleichung, da aus der Analytizität von $h(z) - q(z)\,\overline{h(z)}$ im allgemeinen nicht die Harmonizität von $h(z)$ folgt. Damit bleibt die absolute (quadratische) Integrierbarkeit der Ableitungen von $h(z)$ über $\mathfrak{B}$ offen, d. h., der Gaußsche Integralsatz (als Formel von Borel-Pompeiu) ist nicht ohne weiteres anwendbar. Diese Lücke kann durch die Zusatzvoraussetzung, daß alle $\mathfrak{C}_j$ durchweg analytische Kurven sind, geschlossen werden. In völliger Analogie zu einer Fußnote in [5: S. 273] läßt sich bei diesem Eindeutigkeitsbeweis zeigen, daß dann sogar $h(z)$ und $h(z) - q(z)\,\overline{h(z)}$ auf $\mathfrak{C}$ analytisch sind und damit die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes legitimiert ist. Wird im folgenden

$$A^*[X(z)] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{q(\zeta)\,\overline{X(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta$$

gesetzt, so gilt also der

Satz 5: *Der Operator $I - A^{*2}$ ist ein linearer Homöomorphismus von $H(\mathfrak{G})$ auf sich.*

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, eine analoge Verfahrensweise wie in den Abschnitten 5 und 7 zur Berechnung von $w(z)$ zu benutzen. Ebenso kann $(I - A^{*2})^{-1}$ wie in Abschnitt 6 durch einen Kern dargestellt werden. Es lassen sich sogar beide Fehlerabschätzungen übertragen, jedoch muß bei der zweiten die im allgemeinen beschränkte analytische Fortsetzbarkeit von $q(z)$ berücksichtigt werden. Letzteres gilt auch für die Übertragung von Abschnitt 9 auf diesen allgemeineren Fall.

11. Behandlung einiger Spezialfälle durch Lösung eines unendlichen Gleichungssystems

a) Es gilt der

Satz 6: *Sei $q(z)$ eine in $\{z\colon |z| \leqq 1\}$ analytische Funktion. Die Funktion $w(z)$ habe in $\{z\colon |z| \geqq 1\}$ die Entwicklung z^k + reguläre Funktion in z und gestatte eine stetige Fortsetzung nach $\{z\colon |z| < 1\}$, wobei dort die Gleichung $w_{\bar{z}}(z) = q(z)\,\overline{w_z(z)}$ erfüllt sei. Dann gilt*

$$w(z) = z^k + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{q^{(k-\nu)}(0)}{(k-\nu)!}\,\bar{z}^{-\nu} + \text{const} \quad \textit{für} \quad |z| \geqq 1.$$

Beweis: Ausgehend vom Analogon zu (3), d. h. der Gleichung

$$w(z) - z^k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{q(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta + \text{const} \quad \text{für} \quad |z| > 1,$$

und dem dort gültigen Ansatz

$$w(z) = z^k + \text{const} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu z^{-\nu}$$

erhält man wegen $1/\zeta = \bar{\zeta}$ für $|\zeta| = 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu z^{-\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left\{ q(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta^k} + \text{const} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\delta}_\nu \zeta^\nu \right] \Big/ (\zeta - z) \right\}' d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{q(\zeta)}{\zeta^k(\zeta - z)} d\zeta \quad \text{für} \quad |z| > 1. \tag{13}$$

Dies bringt nach einer kurzen Zwischenrechnung durch Koeffizientenvergleich

$$\delta_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=1} \frac{q(\zeta)}{\zeta^{k+1-\nu}} d\zeta & \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, k \\ 0 \quad \text{für} \quad \nu = k+1, k+2, \ldots . \end{cases}$$

Damit ist die Behauptung offensichtlich ∎

Es soll noch bemerkt werden, daß die sonst gegebene Voraussetzung $|q(z)| < 1$ für $|z| \leqq 1$ in diesem Fall überflüssig ist. Speziell für $q(z) = q = \text{const}$ erhält man das bekannte Ergebnis $w(z) = z^k + qz^{-k} + \text{const}$ für $|z| \geqq 1$.

b) Nun wird im folgenden ein Spezialfall von (1) betrachtet. Es sei $n = 1$, und $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$ sei eine Ellipse mit den Halbachsen c und d. Der Mittelpunkt der Ellipse liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Ursprung und die große Halbachse parallel zur reellen Achse. Die gesuchte Lösung werde mit $F(z)$ bezeichnet. Um die Operatorgleichung (3) anwenden zu können, ist eine in $\mathfrak{G}$ konvergente Reihenentwicklung vonnöten. Eine Potenzreihenentwicklung scheint hier (außer im Fall $c = d$) nicht sinnvoll zu sein. Jedoch erhält man sogar ein vollständiges Orthonormalsystem bezüglich $[\cdot, \cdot]$ in $H(\mathfrak{G})$, wenn man die Potenzen einer schlichten konformen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf das Innere des Einheitskreises, die ∞ in 0 überführt, heranzieht. Zur Begründung dafür sei auf [10: Satz IV.3] verwiesen. Eine solche Abbildung wird beispielsweise durch

$$W(z) = \left(z - \sqrt{z^2 - c^2 + d^2}\right)/(c - d)$$

bei geeigneter Wahl des Wurzelzweigs ($W(z) \to 0$ für $z \to \infty$) geliefert. Offenbar ist der Ansatz

$$F(z) = \left(\frac{c-d}{2} W(z) + \frac{c+d}{2W(z)}\right)^k + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu [W(z)]^\nu$$

gerechtfertigt. Mit ihm folgt aus (3)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu [W(z)]^\nu = -\frac{q}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \overline{\left\{ \left(\frac{c-d}{2} W(\zeta) + \frac{c+d}{2W(\zeta)}\right)^k + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu [W(\zeta)]^\nu \right\}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

für $z \in \mathfrak{G}$. Dieses Integral wird mittels schlichter konformer Abbildung vom Inneren des Einheitskreises auf $\mathfrak{G}$ in ein Randintegral längs der Einheitskreislinie verwandelt.

Für $k = 1$ erhält man nach einiger Rechnung durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha_1 = \frac{c+d}{2} q - q \frac{c-d}{c+d} \left(\bar{\alpha}_1 + \frac{c-d}{2}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_\nu = -q \left(\frac{c-d}{c+d}\right)^\nu \bar{\alpha}_\nu \qquad (\nu \geqq 2),$$

d. h.

$$\alpha_1 = \left(\frac{(c+d)\,q + c - d}{(c-d)\,q + c + d} - \frac{c-d}{c+d}\right) \cdot \frac{c+d}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 2).$$

Für $k = 1$ folgt somit

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2 + d^2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{(c+d)\,q + c - d}{(c-d)\,q + c + d} \cdot \frac{c+d}{c-d}\left(z - \sqrt{z^2 - c^2 + d^2}\right) \tag{14}$$

für $z \in \mathfrak{G}$. Dieses Ergebnis wurde z. B. in [4: (7)] auf anderem Wege erhalten. Das Gleichungssystem für die α_ν ist bei $k \geqq 2$ ebenfalls lösbar, jedoch erfordert das einen höheren Rechenaufwand. Das Resultat ist in [7: (38)] zu finden.

12. Bemerkungen

Die hier angestellten Überlegungen lassen sich auch auf die Fälle übertragen, in denen anstatt (1) die Differentialgleichung

$$\{\log [f(z)]\}_{\bar{z}} = q(z)\, \overline{\{\log [f(z)]\}_z}$$

für $z \in \mathfrak{B}$ zu behandeln ist. Dabei sei $q(z)$ im Abschluß von $\mathfrak{B}$ analytisch und kleiner als 1 im Betrag daselbst. Das sich stetig anschließende $f(z)$ sei in $\mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ analytisch und habe bei $z = \infty$ die Entwicklung z^k + *reguläre Funktion* von z. Der Fall $q(z) = q_j$ für $z \in \mathfrak{B}_j$ ist hier eingeschlossen. Die obige Differentialgleichung spielt eine wichtige Rolle bei dem Extremalproblem $\ln |f^{*\prime}(\zeta)| = \text{Max}$ für fest gewähltes $\zeta \in \mathfrak{G}$ und $f^*(z)$ aus einer Klasse quasikonformer Abbildungen. In dem hier abgehandelten und in dem soeben angeführten Fall kann jeweils die Singularität der Lösung auch bei $z_0 \in \mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ vorliegen, ohne daß sich an den bisherigen Überlegungen etwas Wesentliches ändern würde.

13. Schlußbemerkungen in Hinblick auf eine mögliche Erweiterung

Naturgemäß erhebt sich nach diesen Ausführungen die Frage nach einer Erweiterung der Methoden für den allgemeinen ortsabhängigen Fall (hierzu siehe (*) im Abschnitt 1), d. h. für meßbares $\nu(z)$ mit $|\nu(z)| \leqq \nu^* = \text{const} < 1$ fast überall in $\mathfrak{B}$ und $\nu(z) \equiv 0$ fast überall in $\mathfrak{G}$. Wie z. B. in [9: Kap. 5, § 1] könnte man $\nu(z)$ so durch Treppenfunktionen approximieren, daß dann jeweils die bisherigen Überlegungen anwendbar sind. Jedoch treten beim Grenzübergang erhebliche Probleme auf, da die Randintegrale letztlich nicht gegen ein Randintegral längs $\mathfrak{C}$ konvergieren und die jeweils benötigten vollständigen Systeme von Funktionen aus $H(\mathfrak{G})$ sich beim Grenzübergang wesentlich ändern.

Eine andere Möglichkeit, den ortsabhängigen Fall allgemein zu behandeln, wäre, anstatt der Randintegrale bei geeigneter Fortsetzung der Funktionen ins Innere der Integrationskurven Flächenintegrale zu betrachten. Das in Abschnitt 1 gegebene Konzept, mittels bekannter analytischer oder ähnlicher Funktionen gewisse Orthonormalsysteme zu konstruieren, deren Koeffizienten bei Entwicklung der gesuchten Funktionen ohne die explizite Kenntnis letzterer berechenbar sind, kann dann angewendet werden, wenn einige Eigenschaften der gesuchten Funktionen in $\mathfrak{B}$ bekannt sind. So könnte man diese Eigenschaften der gesuchten Funktionen schon bei der Fortsetzung der in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen nach $\mathfrak{B}$ berücksichtigen, dann im folgenden nur diese fortgesetzten Funktionen in $\mathfrak{B}$ betrachten und schließlich daraus gewisse Orthonormalsysteme konstruieren, durch die die gesuchten Funktionen (allerdings in $\mathfrak{B}$) dargestellt werden können. Eine solche Eigenschaft wäre z. B. die Harmonizität der Abbildungsfunktion in $\mathfrak{B}$. Diese Verfahrensweise soll nun an einem Beispiel erläutert werden.

Gesucht wird die für alle $z \in \mathbf{C}$ stetige und in $\mathfrak{G} \setminus \{\infty\}$ analytische Funktion $E(z)$, die bei $z = \infty$ die Entwicklung

$$z^k + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

hat und in $\mathfrak{B}$ der Gleichung

$$E_{\bar z}(z) = \mathfrak{q}(z)\,\overline{E_z(z)}$$

genügt. Dabei sei $\mathfrak{q}(z)$ eine im Abschluß von $\mathfrak{B}$ antianalytische Funktion, d. h., $\overline{\mathfrak{q}(z)}$ ist dort analytisch, mit $|\mathfrak{q}(z)| < 1$ daselbst. Man verifiziert leicht, daß aus der Differentialgleichung durch abermalige Differentiation $E_{z\bar z}(z) = 0$ folgt, d. h., $E(z)$ ist in $\mathfrak{B}$ harmonisch. Setzt man noch

$$S(z) = E(z) - z^k,$$

so gilt bekanntermaßen (siehe z. B. [1: Chap. V.B] bzw. [11: Teil II, Kap. V, § 3])

$$S_z(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\mathfrak{q}(\zeta)\,\overline{S_\zeta(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta - \frac{k}{\pi}\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\mathfrak{q}(\zeta)\,\bar\zeta^{k-1}}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta \tag{15}$$

für alle $z \in \mathbf{C}$. Der auf $S_z(z)$ angewandte Operator soll im folgenden mit $T_{\mathfrak{q}}[S_z(z)]$ bezeichnet werden. Um wieder eine lineare Operatorgleichung zu erhalten, wird $T_{\mathfrak{q}}$ von beiden Seiten der Gleichung (15) gebildet, und wie in Abschnitt 2 ergibt sich dann

$$S_z(z) = T_{\mathfrak{q}}^2[S_z(z)] + B(z) \quad \text{mit} \quad B(z) = T_{\mathfrak{q}}(kz^{k-1}) + T_{\mathfrak{q}}^2(kz^{k-1}). \tag{16}$$

Nach dem Vorherigen ist nun folgender Algorithmus naheliegend. Ausgehend von dem System $\{\chi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\dots}$ aus Abschnitt 7 setzt man die $\chi_\nu(z)$ jeweils harmonisch nach $\mathfrak{B}$ fort und berechnet dort $(I - T_{\mathfrak{q}}^2)\,[\chi_{\nu z}(z)]$. Diese Funktionen werden bezüglich des Skalarproduktes

$$\big(h_1(z), h_2(z)\big) = \iint_{\mathfrak{B}} h_1(z)\,\overline{h_2(z)}\,dx\,dy$$

orthonormiert, und man erhält das Orthonormalsystem $\{(I - T_{\mathfrak{q}}^2)\,[\Phi_{\nu z}(z)]\}$. Dabei wird zur Vereinfachung der Symbolik vereinbart, daß $(I - T_{\mathfrak{q}}^2)\,[\Phi_{\nu z}(z)] = 0$ bei entsprechender linearer Abhängigkeit zugelassen wird und diese Nullelemente im „Orthonormalsystem" verbleiben. Dann folgt, wie im weiteren gezeigt wird, die Darstellung

$$S_z(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(B(z), (I - T_{\mathfrak{q}}^2)\,[\Phi_{\nu z}(z)]\big) \cdot \Phi_{\nu z}(z). \tag{17}$$

Es ist nur zu beweisen, daß die Reihe in (17) konvergiert und die Gleichung

$$B(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(B(z), (I - T_q^2) [\Phi_{\nu z}(z)]\right) \{(I - T_q^2) [\Phi_{\nu z}(z)]\} \tag{18}$$

gilt. Das letzte wird durch eine Approximation von $S(z)$ durch endliche Linearkombinationen der $\chi_\nu(z)$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$ in $H(\mathfrak{G})$ klar, die zu einer Approximation von $S_z(z)$ durch entsprechende Linearkombinationen der $\chi_{\nu z}(z)$ in $\mathfrak{B}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)$ führt (siehe 4.a)). Wegen der Stetigkeit von $I - T_q^2$ bezüglich $(\cdot, \cdot)$ und (16) folgt nach [10: Satz II.6] die Darstellung (18). Die Konvergenz der Reihe in (17) ergibt sich aus (18) und der Stetigkeit von $(I - T_q^2)^{-1}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)$. Aus (17) bestimmt man $S(z)$ und $E(z)$ mittels einfacher Rechnungen.

Das vorher erläuterte Verfahren soll anhand eines einfachen Spezialfalls betrachtet werden. Sei $\mathfrak{G} = \{z: |z| > 1\}$ und $\chi_\nu(z) = z^{-\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gewählt. Die harmonische Fortsetzung nach $\mathfrak{B}$ ist dann jeweils $\bar{z}^\nu$, woraus sich sofort $(I - T_q^2) [\chi_{\nu z}(z)] \equiv 0$ ergibt, d. h., es liegt ein besonders einfacher Fall vor. Damit gilt $S_z(z) \equiv 0$ für alle z mit $|z| < 1$. Daraus folgt mit $\overline{Q'(z)} = q(z)$

$$E_{\bar{z}}(z) = \overline{kQ'(z)\, z^{k-1}}$$

bzw. mit $P'(z) = kQ'(z)\, z^{k-1}$

$$E(z) = z^k + \overline{P(z)} \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

($P(z)$ und $Q(z)$ sind in $\{z: |z| < 1\}$ analytisch mit $P(0) = 0$.) Für $|z| > 1$ ergibt sich ferner $E(z) = z^k + \overline{P(1/\bar{z})}$.

Zum Schluß soll noch bemerkt werden, daß die notwendigen Rechnungen zur Bestimmung von $E(z)$ für allgemeinere Gebiete $\mathfrak{G}$ wesentlich komplizierter sind als die Berechnung von $f(z)$ in Abschnitt 7 und es somit wünschenswert wäre, daß ein anderer, einfacherer Algorithmus für die Bestimmung von $E(z)$ gefunden wird.

Der Verfasser dankt Herrn Doz. Dr. R. KÜHNAU für viele wertvolle Hinweise und Anregungen, die diese Arbeit in der vorliegenden Form ermöglicht haben.

LITERATUR

[1] AHLFORS, L. V.: Lectures on quasiconformal mappings. Toronto—New York—London: D. Van Nonstrand Company 1966.

[2] GAIER, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1964.

[3] KÜHNAU, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. Math. Nachr. **40** (1969), 1—11.

[4] KÜHNAU, R.: Bemerkungen zu den GRUNSKYschen Gebieten. Math. Nachr. **44** (1970), 285—293.

[5] KÜHNAU, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. Ann. Polon. Math. **31** (1975/1976), 269—289.

[6] KÜHNAU, R.: Eine Kernfunktion zur Konstruktion gewisser quasikonformer Normalabbildungen. Math. Nachr. **95** (1980), 229—235.

[7] KÜHNAU, R., und H. BLAAR: Kriterien für die quasikonforme Fortsetzbarkeit konformer Abbildungen eines Kreisrings bzw. des Äußeren oder Inneren einer Ellipse. Math. Nachr. **91** (1979), 183—196.

[8] KÜNZI, H. P.: Quasikonforme Abbildungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1960.

[9] LEHTO, O., und K. I. VIRTANEN: Quasikonforme Abbildungen. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1966.

[10] Meschkowski, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1962.
[11] Монахов, В. Н.: Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Изд-во Наука (Сибирское отд.) 1977.
[12] Muschelischwili, N. I.: Singuläre Integralgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag 1965.
[13] Ryshik, I. M., und I. S. Gradstein: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1957.
[14] Springer, G.: Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping. Acta Math. 111 (1964), 121—142.
[15] Walsh, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 20. Providence 1956 (sec. ed.).

Manuskripteingang: 13. 05. 1983

VERFASSER:

Dipl.-Math. Erich Hoy
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4020 Halle, Universitätsplatz 8/9