Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (6) (1984), S. 523–526

Zur Unität der Lösung der Theodorsenschen Integralgleichung der konformen Abbildung

L. v. Wolfersdorf

In der Arbeit wird ein neuer Beweis für die Unität der stetigen Lösung der Theodorsenschen Integralgleichung der konformen Abbildung gegeben.

В работе даётся новое доказательство для единственности непрерывного решения интегрального уравнения Теодорсена конформного отображения.

In the paper a new proof of the uniqueness of the continuous solution to the Theodorsen integral equation of conformal mapping is given.

1. Problemstellung

Sei C eine bezüglich $w = 0$ sternige Jordankurve der komplexen w-Ebene mit der Darstellung in Polarkoordinaten $\varrho \doteq \varrho(\theta)$. Es wird die konforme Abbildung $w = f(z)$ des Einheitskreisgebietes $|z| < 1$ der komplexen z-Ebene auf das Innengebiet G der Kurve C mit der Normierung $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ betrachtet. Dann genügt die Ränderzuordnungsfunktion $\theta = \theta(\varphi)$ vom Randpunkt $e^{i\varphi}$ auf $|z| = 1$ und dem Bildpunkt $\varrho(\theta)\, e^{i\theta}$ der bekannten *Integralgleichung von Theodorsen* (vgl. [1: Kap. II])

$$\theta(\varphi) = \varphi + K[\log \varrho(\theta(\varphi))] \tag{1}$$

mit dem Operator der Konjugiertenbildung (der Hilbert-Transformation)

$$K[\mu]\,(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\vartheta) \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2}\, d\vartheta. \tag{2}$$

In der Monographie [1] von D. Gaier wird im Satz 1.3 (β) von Kapitel II die eindeutige Bestimmtheit einer stetigen Lösung $\theta(\varphi)$ der Gleichung (1) unter der zusätzlichen Annahme der Monotonie von θ bewiesen. Wie H. Grunsky bemerkte, läßt sich die Unität jedoch auch ohne diese zusätzliche Annahme zeigen. Dazu hat man zu beachten, daß die Umlaufszahl der in $|z| < 1$ holomorphen, in $|z| \leqq 1$ stetigen Funktion $f(z) = z\, e^{U(z)+iV(z)}$ mit $U(e^{i\varphi}) = \log \varrho(\theta(\varphi))$, $V(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi) - \varphi$ auf C bezüglich jedes Punktes w_0 in G gleich 1 ist, so daß nach dem Argumentprinzip jeder Punkt in G von $f(z)$ genau einmal angenommen wird und folglich $f(z)$ die konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf G liefert. Nach dem Argumentprinzip ist nämlich die Umlaufszahl von f auf C bezüglich $w_0 = 0$ offenbar gleich 1, und außerdem ist diese Umlaufszahl bezüglich der Punkte w_0 aus G konstant, da die Punkte $f(e^{i\varphi})$ auf C liegen und daher die bezüglich $w_0 \in G$ stetige Funktion $f(z) - w_0 \neq 0$ für $z = e^{i\varphi}$ ist. Im folgenden wird ein andersartiger Beweis für die Unität der stetigen Lösung der Gleichung (1) im Falle einer glatten Kurve C gegeben. Dieser Beweis nutzt den Zusammenhang der Gleichung (1) mit einem nichtlinearen Riemann-Hilbert-Problem aus. Anstelle der in dem obigen Beweis von D. GAIER und H. GRUNSKY benutzten eindeutigen Bestimmtheit der normierten Abbildungsfunktion der konformen Abbildung wird dabei die Unität der Lösung des Dirichletproblems für harmonische Funktionen verwendet.

Herrn Prof. Dr. GAIER (Gießen) und Herrn Kollegen R. KÜHNAU (Halle) dankt der Verfasser sehr herzlich für ihr freundliches Interesse und fachlichen Rat. Insbesondere hat Herr GAIER dem Verfasser freundlicherweise den oben skizzierten Beweis des Unitätssatzes mitgeteilt.

2. Unitätsbeweis

Wir setzen voraus, daß die Funktion $\varrho(\theta)$ eine stetige Ableitung $\varrho'(\theta)$ besitzt und führen wie üblich die Funktion

$$v(\varphi) = V(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi) - \varphi \tag{3}$$

ein. Dann schreibt sich (1) in der Form

$$v(\varphi) = K[\Phi(\cdot, v(\cdot))](\varphi) \tag{4}$$

mit der bezüglich v stetig differenzierbaren Funktion

$$\Phi(\varphi, v) = \log \varrho(\varphi + v), \tag{5}$$

wobei stetige 2π-periodische Lösungen v von (4) gesucht sind.

Jede stetige Lösung $v(\varphi) = V(e^{i\varphi})$ von (4) stellt die Randwerte des Imaginärteils $V(z)$ einer in $|z| \leqq 1$ stetigen Lösung $W(z) = U(z) + iV(z)$ des *Riemann-Hilbert-Problems* mit der Randbedingung

$$U(e^{i\varphi}) - \Phi(\varphi, V(e^{i\varphi})) = 0 \quad \text{auf} \quad |z| = 1 \tag{6}$$

und der Zusatzbedingung

$$V(0) = 0 \quad \text{in} \quad z = 0 \tag{7}$$

dar. Denn aus (4) folgt durch Integration über φ in $[0, 2\pi]$ zunächst (7) für die in $|z| \leqq 1$ stetige harmonische Funktion $V(z)$ mit den Randwerten $V(e^{i\varphi}) = v(\varphi)$. Weiter ergibt sich aus (4) durch Konjugiertenbildung

$$K[v](\varphi) = -\Phi(\varphi, v(\varphi)) + c \tag{8}$$

mit einer Konstanten c zunächst für fast alle $\varphi \in [0, 2\pi]$, d. h. mit

$$U(e^{i\varphi}) = -K[v](\varphi) + c \tag{9}$$

ergibt sich die Randbedingung (6) für fast alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\Phi(\varphi, v(\varphi))$ gilt (6) dann sogar für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $U(e^{i\varphi})$ ist stetig, so daß $W(z) = U(z) + iV(z)$ in $|z| \leqq 1$ stetig ist.

Offenbar ist die Unität der stetigen Lösung von (1) daher erbracht, wenn gezeigt wird, daß das Riemann-Hilbert-Problem (6), (7) höchstens eine in $|z| \leqq 1$ stetige Lösung $W(z)$ besitzt, weil zwei voneinander verschiedene stetige Lösungen $v_k(\varphi)$ $(k = 1, 2)$ von (4) auch zwei voneinander verschiedene stetige Lösungen $W_k(z) = U_k(z) + iV_k(z)$ $(k = 1, 2)$ von (6), (7) ergeben würden.

Die Differenzfunktion $W(z) = W_1(z) - W_2(z) = U(z) + iV(z)$ zweier Lösungen $W_k(z)$ $(k = 1, 2)$ von (6), (7) stellt eine stetige Lösung des homogenen linearen

Riemann-Hilbert-Problems

$$U(e^{i\varphi}) - \lambda(\varphi)\, V(e^{i\varphi}) = 0 \quad \text{auf} \quad |z| = 1 \tag{10}$$

mit der stetigen 2π-periodischen Funktion

$$\lambda(\varphi) = \int_0^1 \Phi_v\bigl(\varphi,\, V_2(e^{i\varphi}) + \tau[V_1(e^{i\varphi}) - V_2(e^{i\varphi})]\bigr)\, d\tau \tag{11}$$

und der Zusatzbedingung (7) dar.

Setzt man (vgl. [2: Kap. IV, § 29])

$$\omega(\varphi) = \operatorname{arc\,tan} \lambda(\varphi) \tag{12}$$

mit dem Hauptwert des Arkustangens und

$$\gamma(z) = S[\omega]\,(z), \tag{13}$$

wobei S das Schwarzsche Integral bezeichnet, so hat $\gamma(z)$ fast überall auf $|z| = 1$ die Randwerte

$$\gamma(e^{i\varphi}) = \omega(\varphi) + iK[\omega]\,(\varphi), \tag{14}$$

und es gilt

$$e^{i\gamma(e^{i\varphi})} = e^{-K[\omega](\varphi)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(\varphi)}} + i\frac{\lambda(\varphi)}{\sqrt{1 + \lambda^2(\varphi)}}\right) \tag{15}$$

für fast alle $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Die Randbedingung (10) ist daher äquivalent mit der homogenen Dirichletschen Randbedingung

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\gamma(e^{i\varphi})}\, W(e^{i\varphi})\right\} = 0 \quad \text{auf} \quad |z| = 1 \tag{16}$$

für die in $|z| < 1$ holomorphe Funktion $\hat{W}(z) = e^{i\gamma(z)}\, W(z)$. Nach bekannten Sätzen (vgl. [3: Kap. IX, § 5, Satz 7] liegt die Funktion $e^{i\gamma(z)}$ und daher $\hat{W}(z)$ in jeder Hardy-Klasse H_p, $p > 0$, also insbesondere in H_1, so daß das Problem (16) genau die eine linear unabhängige Lösung

$$\hat{W}_0(z) = i, \quad \text{d. h.} \quad W_0(z) = i\, e^{-i\gamma(z)}, \tag{17}$$

besitzt. (Vgl. [3: Kap. IX, § 4, Satz 3].) Lineare Unabhängigkeit ist hier bezüglich der reellen Zahlen zu verstehen.

Der Imaginärteil $V_0(z)$ von $W_0(z)$ hat in $z = 0$ den Wert

$$V_0(0) = \cos \gamma(0) = \cos \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\varphi)\, d\varphi\right] > 0, \tag{18}$$

weil $|\omega(\varphi)| < \pi/2$ ist. Wegen der Zusatzbedingung (7) kann daher $V(z)$ kein nichttriviales Vielfaches von $V_0(z)$ sein. Das heißt, es ist $V(z) \equiv 0$ in $|z| \leqq 1$, und aus (10) folgt, daß auch $U(e^{i\varphi}) = 0$ auf $|z| = 1$ und folglich $U(z) \equiv 0$ in $|z| \leqq 1$ sein muß Also gilt $W(z) \equiv 0$ in $|z| \leqq 1$.

LITERATUR

[1] GAIER, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Springer-Verlag: Berlin—Göttingen—Heidelberg 1964.
[2] ГАХОВ, Ф. Д.: Краевые задачи. Физматгиз: Москва 1963.
[3] GOLUSIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Dt. Verlag Wiss.: Berlin 1957.

Manuskripteingang: 04. 04. 1983

VERFASSER:

Prof. Dr. LOTHAR V. WOLFERSDORF
Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg
DDR-9200 Freiberg, Bernhard-v.-Cotta-Str. 2

Zusatz bei der Korrektur:

Man überlegt sich leicht, daß der vorliegende Unitätsbeweis gültig bleibt, wenn (wie Herr GAIER bemerkte) die Funktion $\varrho'(\varphi)$ und $\lambda(\varphi)$ damit beschränkt bleibt. Allgemeiner gilt der Beweis, wenn die Oszillation der Funktion $\omega(\varphi)$ kleiner als π ist; das heißt, $\varrho'(\varphi)$ kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ werden, jedoch nicht beides zugleich.