Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (6) (1984), S. 527–539

Zur Stetigkeit der Lösung der adjungierten Gleichung bei Aufgaben der optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen

HOÀNG XUÂN PHÚ

Die Stetigkeit der Lösung der adjungierten Gleichung bei Aufgaben der optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen wurde schon von anderen Autoren unter gewissen Bedingungen gezeigt, die oft nicht erfüllt sind. Hier wird die Stetigkeit dieser Lösung unter anderen Bedingungen gezeigt. Weiterhin werden andere interessante Ergebnisse und Anwendungen erreicht.

Непрерывность решения сопряженного уравнения в задачах оптимального управления с ограничениями состояния уже доказана другими авторами, однако при условиях, часто не выполняющихся. В этой работе непрерывность этого решения доказывается при других условиях. Кроме этого работа содержит другие интересные результаты и применения.

The continuity of the solution of the adjoint equation in optimal control problems with state restrictions has already been shown by other authors under certain conditions that are often not fulfilled. Here the continuity of this solution is shown under different conditions. Furthermore, some other interesting results and applications are given.

1. Problemstellung

In dieser Arbeit betrachten wir die nachstehende Aufgabe der optimalen Steuerung mit festem Integrationsintervall:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \to \inf!,\\
&\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), u(t)\big), \qquad u(t) \in U \subset \mathbf{R}^r,\\
&g_i\big(t, x(t)\big) \leqq 0 \qquad (t \in [t_0, t_1];\ i = 1, 2, \ldots, k),\\
&h_0\big(x(t_0)\big) = 0, \qquad h_1\big(x(t_1)\big) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen und Abbildungen

$$f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}, \qquad g_i\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},$$
$$\varphi\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n, \qquad h_l\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{s_l} \qquad (l = 0, 1)$$

stetig und $f(t, \cdot, v)$, $\varphi(t, \cdot, v)$, g_i und h_l stetig differenzierbar sind. Außerdem sei U kompakt.

Als *zulässige Steuerungen* bezeichnen wir beliebige in $[t_0, t_1]$ rechtseitig stückweise stetige und in t_1 stetige Vektorfunktionen u, die Werte aus der Menge U annehmen. Ein Paar (x, u) heißt ein *Prozeß*, falls u eine zulässige Steuerung ist und alle Bedingungen in (1) erfüllt sind. Dabei heißt x eine *Zustandsfunktion* und ihr Graph

Trajektorie. (x^*, u^*) heißt *optimaler Prozeß*, wenn für alle Prozesse (x, u) gilt $\mathcal{F}(x, u) \geqq \mathcal{F}(x^*, u^*)$.

Für die Aufgabe (1) wurde von A. D. IOFFE und V. M. TICHOMIROV in [2] das folgende Pontrjaginsche Maximumprinzip bewiesen.

Satz 1: *Sei (x^*, u^*) ein optimaler Prozeß der Aufgabe* (1). *Dann existiert eine Zahl $\lambda_0 \geqq 0$, Vektoren $l_0 \in \mathbf{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbf{R}^{s_1}$, eine Vektorfunktion $p\colon [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ und k auf den Mengen $T_i := \{t \in [t_0, t_1] \mid g_i(t, x^*(t)) = 0\}$ konzentrierte nichtnegative reguläre Maße μ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ derart, daß diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden und folgendes gilt:*

a) *p ist die Lösung der adjungierten Gleichung*

$$\begin{aligned} p^{\mathrm{T}}(t) &= h_0'(x^*(t_0)) \cdot l_0^{\mathrm{T}} + \int_{t_0}^{t} H_\xi(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau), p(\tau), \lambda_0)\, d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \int_{[t_0,t]} g_{i\xi}(\tau, x^*(\tau))\, d\mu_i, \qquad (2) \\ p^{\mathrm{T}}(t_1) &= -h_1'(x^*(t_1)) \cdot l_1^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

b) *Für fast alle t aus $[t_0, t_1]$ ist die Gleichung*

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t), \lambda_0) = \mathcal{H}(t, x^*(t), p(t), \lambda_0) \qquad (3)$$

erfüllt.

Dabei ist $H(t, \xi, v, q, \lambda) := \varphi(t, \xi, v) \cdot q^{\mathrm{T}} - \lambda f(t, \xi, v)$ *und* $\mathcal{H}(t, \xi, q, \lambda) := \sup_{v \in U} H(t, \xi, v, q, \lambda)$.

Benutzt man das Pontrjaginsche Maximumprinzip, um zu untersuchen, ob ein vorgegebener Prozeß optimal sein kann, so treten nicht selten Schwierigkeiten auf, da die Maße μ_i und die Funktion p zunächst unbekannt sind. Noch größer ist der Aufwand, wenn ein (noch unbekannter) optimaler Prozeß (x^*, u^*) erst zu bestimmen ist, weil dann sowohl x^*, u^* als auch p und μ_i unbekannt sind. Dabei ist es schon eine große Erleichterung zu wissen, ob p stetig ist, d. h., ob das Maß in einzelnen Punkten gleich Null ist.

Was wissen wir bis jetzt über die Stetigkeit von p? Da jedes Maß μ_i auf der Randfläche

$$\partial G_i := \{(t, \xi) \in [t_0, t_1] \times \mathbf{R}^n \mid g_i(t, \xi) = 0\}$$

konzentriert ist, ist die Funktion p in t stetig, wenn der Punkt $(t, x^*(t))$ im Inneren des Zustandsbereiches

$$G := \{(t, \xi) \in [t_0, t_1] \times \mathbf{R}^n \mid g_i(t, \xi) \leqq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, k)\}$$

liegt. Die Unstetigkeit von p kann also nur auf dem Rande des Zustandsbereichs G auftreten. Außerdem ist p wegen der Regularität der Maße μ_i in $[t_0, t_1]$ linksseitig stetig (vgl. [2]).

W. G. BOLTJANSKI zeigte in [1] die Stetigkeit von p unter einer Zusatzbedingung, die er „Bedingung der allgemeinen Lage" nennt. Wenn

$$\frac{\partial}{\partial t} g_i(t, \xi) = 0 \quad \text{für alle} \quad (t, \xi) \in G \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \text{ und}$$

$$U := \{v \in \mathbf{R}^r \mid g_j(v) \leqq 0 \quad (j = k + 1, k + 2, \ldots, m)\}$$

gilt, d. h. U durch $m - k$ vorgegebene Funktionen $g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_m$ definiert wird, dann besagt diese Bedingung, daß die Vektoren

$$\mathrm{grad}_v\, g_i(t, \xi) \quad \text{und} \quad \mathrm{grad}_v\, g_j(v),$$

im Falle $g_i(t, \xi) = 0$ und $g_j(v) = 0$ linear unabhängig sein sollen. Weil nun aber $\mathrm{grad}_v\, g_i(t, \xi) = (0, 0, \ldots, 0)$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und $(t, \xi) \in G$ gilt, ist diese Bedingung verletzt.

H. W. Knobloch zeigte in [3] die Stetigkeit von p für solche Aufgaben mit *einer* Zustandsbeschränkung, d. h. $k = 1$, allerdings unter den Bedingungen, daß

$$\frac{d}{dt}\, g_1(z_1, x(z_1)) > 0 \quad \text{für jede Aufsprungstelle } z_1 \text{ und}$$

$$\frac{d}{dt}\, g_1(z_2, x(z_2)) < 0 \quad \text{für jede Absprungstelle } z_2$$

gilt und daß jede Aufsprungstelle zugleich eine Absprungstelle ist. Diese Forderungen sind bei unseren im Abschnitt 3 genannten Aufgaben (13) und (14) nicht erfüllt.

In dieser Arbeit wird die Stetigkeit der Funktion p unter anderen Bedingungen gezeigt, und anschließend werden einige Anwendungen dieser Untersuchungen betrachtet.

Definition: Wenn für ein i, $1 \leqq i \leqq k$, und z_1, z_2 aus $[t_0, t_1]$ gilt

$$z_1 \leqq z_2, \quad g_i(t, x(t)) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [z_1, z_2] \quad \text{und}$$
$$\text{für beliebiges} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{existiert ein} \quad t \in (z_1 - \varepsilon, z_1) \quad \text{mit}$$
$$g_i(t, x(t)) < 0 \quad \text{und ein} \quad t \in (z_2, z_2 + \varepsilon) \quad \text{mit} \quad g_i(t, x(t)) < 0,$$

dann heißt z_1 eine *g_i-Aufsprungstelle*, z_2 eine *g_i-Absprungstelle* und jedes $t \in (z_1, z_2)$ eine *g_i-Verweilstelle* von x.

Diese Begriffe entlehnen wir H. W. Knobloch [3], sie werden aber bei uns in einem umfassenderen Sinne gebraucht: H. W. Knobloch forderte, daß es nur endlich viele Aufsprung- und Absprungstellen gibt, was bei uns nicht der Fall zu sein braucht.

2. Einige Hilfsmittel

In diesem Abschnitt stellen wir einige Lemmata zusammen, die im nächsten Abschnitt angewandt werden.

Lemma 1: *Gegeben seien zwei Funktionen $b: Z \times U \to \mathbf{R}^1$ und $a: Z \to \mathbf{R}^1$, wobei $Z \subset \mathbf{R}^1$, $U \subset \mathbf{R}^r$ kompakt und $b(t, \cdot)$ stetig für alle $t \in Z$ sind. Ferner sei*

$$F_1(t) := \{v \in U \mid b(t, v) = a(t)\},$$

$$F_2(t) := \{v \in U \mid b(t, v) \leqq a(t)\} \quad \text{und} \quad F_3(t) := \{v \in U \mid b(t, v) \geqq a(t)\}.$$

Sind dann $b(\cdot, v)$ und a in $z \in \operatorname{int} Z$ linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig, so sind alle Abbildungen F_j $(j = 1, 2, 3)$ in z linksseitig (bzw. rechtsseitig) oberhalbstetig.

Beweisidee: Es seien $b(\cdot, v)$ und a in $z \in \operatorname{int} Z$ linksseitig stetig. Angenommen, F_1 wäre in z nicht linksseitig oberhalbstetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß sich für alle $\delta > 0$ ein $t \in Z \cap (z - \delta, z)$ und $v(t) \in F_1(t)$ mit $v(t) \notin F_1(z) + V(\varepsilon)$ finden läßt, wobei $V(\varepsilon)$ eine ε-Nullumgebung in $\mathbf{R}^r$ ist. Man kann eine Folge $\{z_i\}$ konstruieren mit

$$z_i \in (z - \delta, z) \quad \text{für alle } i, \lim_{i\to\infty} z_i = z,$$

$$v(z_i) \in F_1(z_i), \quad v(z_i) \notin F_1(z) + V(z).$$

Weiterhin wird gezeigt, daß

$$|b(z, v(z_i)) - a(z)| \geqq \gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

für ein $\gamma > 0$ gilt (vgl. [6]). Wegen der Kompaktheit von U existiert eine Teilfolge $\{z_{i'}\}$ mit $\lim_{i'\to\infty} v(z_{i'}) = \bar{v} \in U$. Für diese Teilfolge gilt wegen der linksseitigen Stetigkeit von $b(\cdot, v)$ und a und wegen der Stetigkeit von $b(t, \cdot)$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i'\to\infty} \left(|b(z, v(z_{i'})) - b(z_{i'}, v(z_{i'}))| + |a(z_{i'}) - a(z)|\right) \\ &\geqq \lim_{i'\to\infty} |b(z, v(z_{i'})) - b(z_{i'}, v(z_{i'})) + a(z_{i'}) - a(z)| \\ &= \lim_{i'\to\infty} |b(z, v(z_{i'})) - a(z)| \geqq \gamma, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $0 < \gamma$. Also ist die Annahme falsch, und deshalb muß F_1 in diesem Fall linksseitig oberhalbstetig sein. Für F_2 und F_3 verläuft der Beweis analog ∎

Dieses Lemma wird später bei der Auswertung der Gleichung (3) im Pontrjaginschen Maximumprinzip eine wichtige Rolle spielen. Es gestattet die Eigenschaften optimaler Prozesse auch an solchen Stellen zu ergründen, in denen (3) nicht gilt.

Es seien

$$p_z(t) := \begin{cases} p(t) & \text{für } t \neq z, \\ p(z+0) & \text{für } t = z \end{cases}$$

$$\tilde{H}(t, v) := H(t, x^*(t), v, p(t), \lambda_0), \qquad \tilde{H}_z(t, v) := H(t, x^*(t), v, p_z(t), \lambda_0),$$

$$\tilde{\mathscr{H}}(t) := \mathscr{H}(t, x^*(t), p(t), \lambda_0), \qquad \tilde{\mathscr{H}}_z(t) := \mathscr{H}(t, x^*(t), p_z(t), \lambda_0).$$

Dann gilt die folgende Aussage.

Lemma 2: *$\tilde{H}(\cdot, v)$ und $\tilde{\mathscr{H}}$ sind in $t = z$ linksseitig stetig, $\tilde{H}_z(\cdot, v)$ und $\tilde{\mathscr{H}}_z$ sind in $t = z$ rechtsseitig stetig.*

Der Beweis für dieses Lemma ist ganz ähnlich dem von B. N. Pšeničnyj [8: Kap. 3] für den stetigen Fall zu führen (s. [6]).

Definition: Es sei $y(t) := (t, x(t)) \in G$. Dann heißt d_i mit

$$d_i(t) := \operatorname{Min} \{\|y(t) - \eta\| \mid \eta \in \partial G_i\}$$

Abstandsfunktion zwischen der Trajektorie y und der Randfläche ∂G_i und jeder Punkt $y_i(t)$ mit

$$y_i(t) \in \partial G_i \quad \text{und} \quad \|y_i(t) - y(t)\| = d_i(t)$$

heißt *nächster Fußpunkt* von $y(t)$ auf ∂G_i.

Lemma 3: d_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *ist stetig und fast überall differenzierbar.*

Beweis: Aus der Definition folgt für $z_1, z_2 \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned}|d_i(z_1) - d_i(z_2)| &\leqq \|y(z_1) - y_i(z_2)\| - \|y(z_2) - y_i(z_2)\| \\ &\leqq \|y(z_1) - y(z_2)\| \leqq |z_1 - z_2| + \|x(z_1) - x(z_2)\|.\end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von U und der Stetigkeit von x und φ existiert ein K mit $\left\|\varphi\big(t, x(t), u(t)\big)\right\| \leqq K$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Daraus folgt

$$\|x(z_1) - x(z_2)\| \leqq \int_{z_1}^{z_2} \left\|\varphi\left(t, x(t), u(t)\right)\right\| dt \leqq K \cdot |z_2 - z_1|.$$

Damit gilt $|d_i(z_1) - d_i(z_2)| \leqq (K + 1) \cdot |z_2 - z_1|$, d. h., d_i ist Lipschitz-stetig in $[t_0, t_1]$. Deshalb ist d_i in $[t_0, t_1]$ stetig und fast überall differenzierbar (vgl. H. RADEMACHER [9]) ∎

Lemma 4: *Sei* $z \in [t_0, t_1]$ *mit* $g_i\big(z, x(z)\big) = 0$. *Für alle* $\omega > 0$ *gilt:*

a) $\dot{d}_i(t) \leqq 0$ *auf einer Menge von positivem Maß im Intervall* $(z - \omega, z)$,

b) $\dot{d}_i(t) \geqq 0$ *auf einer Menge von positivem Maß im Intervall* $(z, z + \omega)$.

Beweis: Wäre $\dot{d}_i(t) > 0$ fast überall in $(z - \omega, z)$, dann gälte für ein $z_1 \in (z - \omega, z)$ mit $d_i(z_1) > 0$ die Ungleichung

$$d_i(z) > d_i(z) - d_i(z_1) = \int_{z_1}^{z} \dot{d}_i(t)\, dt > 0,$$

im Widerspruch zu $d_i(z) = 0$. Also muß a) wahr sein. Der Beweis für b) verläuft analog ∎

Bei unserer Betrachtung fordern wir sogar:

Für alle $\omega > 0$ existieren zwei Mengen $\Omega_1 \subset (z - \omega, z)$ und $\Omega_2 \subset (z, z + \omega)$ von positivem Maß mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned}&\dot{d}_i(t) \leqq 0 \text{ für alle } t \in \Omega_1 \text{ und } i \in I(z, x) \text{ und} \\ &\dot{d}_i(t) \geqq 0 \text{ für alle } t \in \Omega_2 \text{ und } i \in I(z, x).\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist $I(z, x)$ die Menge der aktiven Indizes in z bez. der Zustandsfunktion x und wie folgt definiert:

$$I(z, x) := \left\{i \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid g_i\big(z, x(z)\big) = 0\right\}.$$

Die Forderung (4) ist in vielen Fällen erfüllt. Zum Beispiel folgt aus Lemma 4, daß (4) gilt, wenn es höchstens ein i_1 und ein i_2 aus $I(z, x)$ gibt, für die z eine g_{i_1}-Aufsprungstelle und eine g_{i_2}-Absprungstelle ist (das ist insbesondere immer erfüllt für den Fall $k = 1$).

Nun untersuchen wir die nächsten Fußpunkte. Für ein beliebiges $t \in [t_0, t_1]$ kann es mehrere solcher Punkte geben. Wir betrachten deshalb die folgende lokale Lipschitz-Bedingung:

Für alle $\eta \in \partial G$ und $i \in I(\eta)$ existieren $\varepsilon_i(\eta) > 0$ und $M_i(\eta) > 0$, so, daß für $\eta', \eta'' \in U_{\varepsilon_i}(\eta) \cap \partial G_i$ gilt

$$\|\mathfrak{N}_i(\eta') - \mathfrak{N}_i(\eta'')\| \leqq M_i(\eta) \cdot \|\eta' - \eta''\|, \tag{5}$$

wobei $U_{\varepsilon_i}(\eta)$ eine $\varepsilon_i(\eta)$-Umgebung von η in $\mathbf{R}^{n+1}$ und $\mathfrak{N}_i$ der äußere Normalenvektor der Randfläche ∂G_i ist.

Mit ihrer Hilfe gelingt die folgende Aussage.

Lemma 5: *Für alle $z \in [t_0, t_1]$ mit $g_i(y(z)) \doteq 0$ existiert eine Umgebung von z, in der die Abbildung $t \mapsto y_i(t)$ eindeutig, stetig und fast überall differenzierbar ist.*

Beweis: Wir setzen

$$\varepsilon := \operatorname{Min}\left\{\varepsilon_i(y(z)), \frac{1}{M_i(y(z))}\right\} > 0.$$

Wegen der Stetigkeit von d_i und y sowie wegen $d_i(z) = 0$ existiert zu diesem ε solch ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, daß $|t - z| < \delta$ zu $\|y(t) - y(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d_i(t) < \frac{\varepsilon}{2}$ führt. Sei nun $y_i(t)$ ein beliebiger nächster Fußpunkt von $y(t)$ auf der Randfläche ∂G_i. Dann gilt nach der Definition von d_i und mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|y_i(t) - y(z)\| \leqq d_i(t) + \|y(t) - y(z)\| < \varepsilon \leqq \varepsilon_i(y(z)),$$

d. h. $y_i(t) \in U_{\varepsilon_i}(y(z)) \cap \partial G_i$ für $|t - z| < \delta$. Deshalb folgt aus (5)

$$\|\mathfrak{N}_i(y_i(z_1)) - \mathfrak{N}_i(y_i(z_2))\| \leqq M_i(y(z)) \cdot \|y_i(z_1) - y_i(z_2)\|$$

für $|z_j - z| < \delta$, $j = 1, 2$. Wegen der Definition von d_i und

$$y_i(z_j) = y(z_j) + d_i(z_j) \cdot \mathfrak{N}_i(y_i(z_j)) \qquad (j = 1, 2)$$

gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
&\|y_i(z_1) - y_i(z_2)\| \\
&\leqq \|y(z_1) - y(z_2)\| + d_i(z_1) \cdot \|\mathfrak{N}_i(y_i(z_1)) - \mathfrak{N}_i(y_i(z_2))\| + |d_i(z_1) - d_i(z_2)| \\
&\leqq 2\,\|y(z_1) - y(z_2)\| + d_i(z_1)\, M_i(y(z))\, \|y_i(z_1) - y_i(z_2)\|
\end{aligned}$$

für $|z_j - z| < \delta$, $j = 1, 2$. Weil

$$d_i(z_1)\, M_i(y(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot M_i(y(z)) \leqq \frac{1}{2M_i(y(z))} M_i(y(z)) = \frac{1}{2}$$

ist, ergibt sich daraus $\|y_i(z_1) - y_i(z_2)\| \leqq 4\,\|y(z_1) - y(z_2)\|$ für $|z_j - z| < \delta$, $j = 1, 2$. Da $y_i(z_j)$ ein beliebiger nächster Fußpunkt von $y(z_j)$ ist, folgt die Eindeutigkeit von $y_i(t)$ für $|t - z| < \delta$ aus der letzten Ungleichung (für $z_1 = z_2$).

Genau wie im Beweis zu Lemma 3 existiert ein $\bar{K} > 0$ mit $\|y(z_1) - y(z_2)\| \leqq \bar{K} \cdot |z_1 - z_2|$. Daraus folgt $\|y_i(z_1) - y_i(z_2)\| \leqq 4\bar{K}\,|z_1 - z_2|$ für $|z_j - z| < \delta$ ($j = 1, 2$), d. h., y_i ist in der δ-Umgebung von z Lipschitz-stetig. Deshalb ist y_i dort fast überall differenzierbar (vgl. bei H. RADEMACHER [9]) ∎

Aus Lemma 3, Lemma 5 und der Definition von d_i folgt

$$\dot{d}_i(t) = -\frac{1}{\|\operatorname{grad} g_i(y_i(t))\|} (\dot{y}(t) - \dot{y}_i(t)) \operatorname{grad} g_i(y_i(t)).$$

Wegen

$$\dot{y}(t) \operatorname{grad} g_i(y_i(t)) = 0,$$

$$\dot{y}(t) = (1, \dot{x}(t)) = (1, \varphi(t, x(t), u(t))),$$

$$\operatorname{grad} g_i(y_i(t)) = \begin{pmatrix} g_{it}(y_i(t)) \\ g_{i\xi}(y_i(t)) \end{pmatrix}$$

folgt aus (4) für alle $\omega > 0$ die Existenz zweier Mengen $\Omega_1 \subset (z - \omega, z)$ und $\Omega_2 \subset (z, z + \omega)$ von positivem Maß mit der Eigenschaft:

$$\varphi(t, x(t), u(t))\, g_{i\xi}(y_i(t)) \geqq -g_{it}(y_i(t)) \quad \text{für} \quad t \in \Omega_1 \quad \text{und} \quad i \in I(z, x),$$

$$\varphi(t, x(t), u(t))\, g_{i\xi}(y_i(t)) \leqq -g_{it}(y_i(t)) \quad \text{für} \quad t \in \Omega_2 \quad \text{und} \quad i \in I(z, x).$$

Wenn wir für den optimalen Prozeß (x^*, u^*) die Mengen

$$W_1(t) := \{v \in U \mid \varphi(t, x^*(t), v)\, g_{i\xi}(y_i^*(t)) \geqq -g_{it}(y_i^*(t)) \ \forall i \in I(z, x^*)\}$$

und

$$W_2(t) := \{v \in U \mid \varphi(t, x^*(t), v)\, g_{i\xi}(y_i^*(t)) \leqq -g_{it}(y_i^*(t)) \ \forall i \in I(z, x^*)\}$$

definieren, wobei $y_i^*(t)$ ein nächster Fußpunkt von $y^*(t) = (t, x^*(t))$ auf ∂G_i ist, dann lautet die letzte Eigenschaft folgendermaßen.

Lemma 6: *Wenn* (x^*, u^*) *der Bedingung* (4) *genügt, dann ist* $u^*(t) \in W_1(t)$ *für* $t \in \Omega_1$ *und* $u^*(t) \in W_2(t)$ *für* $t \in \Omega_2$ *(mit den in* (4) *definierten* Ω_1, Ω_2*).*

3. Zur Stetigkeit von p und andere Hauptergebnisse

Zunächst führen wir einige Definitionen ein:

$$\mathcal{H}^{-v}(t) := \{v \in U \mid \tilde{H}(t, v) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\}, \qquad \mathcal{H}_z^{-v}(t) := \{v \in U \mid \tilde{H}_z(t, v) = \tilde{\mathcal{H}}_z(t)\},$$

$$M_1(t) := W_1(t) \cap \mathcal{H}^{-v}(t), \qquad M_2(t) := W_2(t) \cap \mathcal{H}_z^{-v}(t).$$

Alle im Abschnitt 2 geführten Betrachtungen sind eine Vorbereitung für Lemma 7.

Lemma 7: *Die Bedingungen* (4) *und* (5) *seien erfüllt und es sei* $z \in (t_0, t_1)$ *mit* $I(z, x^*) \neq \emptyset$. *Dann gilt* $M_1(z) \neq \emptyset$ *und* $M_2(z) \neq \emptyset$.

Beweis: a) Nach Lemma 2 sind $\tilde{H}(\cdot, v)$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ in $t = z$ linksseitig stetig und $\tilde{H}_z$ und $\tilde{\mathcal{H}}_z$ in $t = z$ rechtsseitig stetig. Deshalb gilt nach Lemma 1, daß $\mathcal{H}^{-v}$ in $t = z$ linksseitig oberhalbstetig und $\mathcal{H}_z^{-v}$ in $t = z$ rechtsseitig oberhalbstetig sind. Nach Lemma 5 ist y_i^* in einer hinreichend kleinen Umgebung von z stetig. Wegen der Stetigkeit von x^* und φ und der stetigen Differenzierbarkeit von g_i sind die Funktionen

$$t \mapsto (t, x^*(t), v)\, g_{i\xi}(y_i^*(t)) \quad \text{und} \quad t \mapsto -g_{it}(y_i^*(t))$$

für alle i ebenso stetig in dieser Umgebung. Deshalb folgt aus Lemma 1, daß

$$W_{1i}(t) := \{v \in U \mid \varphi(t, x^*(t), v)\, g_{i\xi}(y_i^*(t)) \geqq -g_{it}(y_i^*(t))\}$$

für $i \in I(z, x^*)$ in $t = z$ oberhalbstetig ist. Damit wird $W_1(t)$ folgendermaßen gebildet

$$W_1(t) = \bigcap_{i \in I(z, x^*)} W_{1i}(t),$$

wobei nur endlich viele Mengen $W_{1i}(t)$ zum Durchschnitt gebracht werden. Folglich ist W_1 in $t = z$ ebenfalls oberhalbstetig. Analog folgt die Oberhalbstetigkeit von W_2 in $t = z$. Aus der Definition folgt nun die linksseitige Oberhalbstetigkeit von M_1 und die rechtsseitige Oberhalbstetigkeit von M_2 in $t = z$.

b) Die Gleichung (3) bedeutet nach der Definition von $\mathcal{H}^{-v}$

$$u^*(t) \in \mathcal{H}^{-v}(t) \quad \text{fast überall in} \quad [t_0, t_1].$$

Nach Lemma 6 existiert zu jedem $\omega > 0$ eine Menge Ω_1' mit

$$u^*(t) \in W_1(t) \cap \mathcal{H}^{-v}(t) = M_1(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \Omega_1',$$

wobei Ω_1' gleich dem Durchschnitt von Ω_1 mit der Menge aller t ist, für die $u^*(t) \in \mathcal{H}^{-v}(t)$ gilt. Weil $u^*(t) \in \mathcal{H}^{-v}(t)$ fast überall in $[t_0, t_1]$ gilt, ist das Maß von Ω_1' gleich dem Maß von Ω_1, also größer als Null. Das bedeutet, daß zu jedem $\omega > 0$ eine Menge $\Omega_1' \subset (z - \omega, z) \cap [t_0, t_1]$ von positivem Maß mit $M_1(t) \neq \emptyset$ für $t \in \Omega_1'$ existiert. Weil sich p und p_z nur in $t = z$ unterscheiden, gilt auch $u^*(t) \in \mathcal{H}_z^{-v}(t)$ fast überall in $[t_0, t_1]$. Dann kann analog gezeigt werden, daß zu jedem $\omega > 0$ eine Menge $\Omega_2' \subset (z, z + \omega) \cap [t_0, t_1]$ von positivem Maß mit $M_2(t) \neq \emptyset$ für $t \in \Omega_2'$ existiert.

c) In a) wurde gezeigt, daß M_1 in $t = z$ linksseitig oberhalbstetig ist, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\omega > 0$, so daß $M_1(t) \subset M_1(z) + V(\varepsilon)$ für $t \in (z - \omega, z)$ gilt, wobei $V(\varepsilon)$ eine Nullumgebung in $\mathbf{R}^r$ ist. Nach b) existiert ein $\Omega_1' \subset (z - \omega, z)$ von positivem Maß mit $M_1(t) \neq \emptyset$ für $t \in \Omega_1'$. Daraus folgt $M_1(z) + V(\varepsilon) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Folglich ist $M_1(z) \neq \emptyset$. Analog läßt sich $M_2(z) \neq \emptyset$ zeigen ∎

Lemma 7 ist das wichtigste Hilfsmittel zum Beweis des folgenden Satzes. Damit die Ausdrücke übersichtlicher sind, wollen wir im weiteren schreiben:

$$\tilde{\mathcal{H}}(z + 0) := \tilde{\mathcal{H}}_z(z) = \mathcal{H}\big(z, x^*(z), p(z + 0), \lambda_0\big),$$

$$\mathcal{H}^{-v}(z + 0) := \mathcal{H}_z^{-v}(z) = \big\{v \in U \mid H\big(z, x^*(z), v, p(z + 0), \lambda_0\big) = \mathcal{H}\big(z, x^*(z), p(z + 0), \lambda_0\big)\big\}.$$

Satz 2: *(x^*, u^*) sei ein optimaler Prozeß der Aufgabe* (1) *mit* (4) *und* (5), $z \in (t_0, t_1)$ *mit* $I(z, x^*) \neq \emptyset$. *Dann gilt:*

a) $\tilde{\mathcal{H}}(z) = \tilde{\mathcal{H}}(z + 0) + \sum_{i \in I(z, x^*)} \mu_i(\{z\})\, g_{it}\big(z, x^*(z)\big);$

$$M_1(z) \subset \mathcal{H}^{-v}(z + 0) \quad \textit{und} \quad M_2(z) \subset \mathcal{H}^{-v}(z).$$

Aus $v_1 \in M_1(z)$ *folgt für alle* $i \in I(z, x^*)$

$$\mu_i(\{z\}) \big[g_{it}\big(z, x^*(z)\big) + \varphi\big(z, x^*(z), v_1\big)\, g_{i\xi}\big(z, x^*(z)\big)\big] = 0,$$

aus $v_2 \in M_2(z)$ *folgt für alle* $i \in I(z, x^*)$

$$\mu_i(\{z\}) \big[g_{it}\big(z, x^*(z)\big) + \varphi\big(z, x^*(z), v_2\big)\, g_{i\xi}\big(z, x^*(z)\big)\big] = 0.$$

b) *Existiert ein* $\bar{v} \in M_1(z) \cup M_2(z)$ *mit*

$$g_{it}\big(z, x^*(z)\big) + \varphi\big(z, x^*(z), \bar{v}\big)\, g_{i\xi}\big(z, x^*(z)\big) \neq 0,$$

so ist $\mu_i(\{z\}) = 0$.

c) *Es sei für alle* $v \in \partial U$ *und alle* $i \in I\big(z, x^*(z)\big)$

$$g_{it}\big(z, x^*(z)\big) + \varphi\big(z, x^*(z), v\big)\, g_{i\xi}\big(z, x^*(z)\big) \neq 0. \tag{6}$$

Außerdem existiere für alle $v \in \operatorname{int} U$ ein $j = j(v)$ $(1 \leqq j \leqq r)$, so daß entweder

$$\varphi_{v_j}(z, x^*(z), v)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)) > 0 \quad \textit{für alle} \quad i \in I(z, x^*)$$

oder (7)

$$\varphi_{v_j}(z, x^*(z), v)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)) < 0 \quad \textit{für alle} \quad i \in I(z, x^*)$$

ist. Dann ist p in z stetig (d. h. $\mu_i(\{z\}) = 0$ für alle $i \in I(z, x^*)$.

d) *Gilt* (6) *und* (7) *für alle $z \in (t_0, t_1)$, dann ist p in $[t_0, t_1]$ stetig.*

Beweis: Wir beschränken uns darauf, a) und c) zu zeigen. b) und d) lassen sich einfach daraus folgern.

a) Nach Lemma 7 ist $M_1(z) \neq \emptyset$. Für ein beliebiges $v_1 \in M_1(z)$ gilt dann wegen

$$p^{\mathrm{T}}(z+0) - p^{\mathrm{T}}(z) = \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, g_{i\xi}(z, x^*(z))$$

(vgl. (2)) die Beziehung

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(z) &= \varphi(z, x^*(z), v_1)\, p^{\mathrm{T}}(z) - \lambda_0 f(z, x^*(z), v_1)\\ &= [\varphi(z, x^*(z), v_1)\, p^{\mathrm{T}}(z+0) - \lambda_0 f(z, x(z), v_1)]\\ &\quad - \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_1)\, g_{i\xi}(z, x^*(z))\\ &= H(z, x^*(z), v_1, p(z+0), \lambda_0)\\ &\quad - \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_1)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)).\end{aligned}$$

Einerseits ist

$$H(z, x^*(z), v_1, p(z+0), \lambda_0) \leqq \mathscr{H}(z+0), \tag{8}$$

andererseits folgt aus $v_1 \in W_1(z)$

$$\varphi(z, x^*(z), v_1)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)) \geqq -g_{it}(z, x^*(z))$$

für alle $i \in I(z, x^*)$. Weil $\mu_i(\{z\}) \geqq 0$ für alle i ist, gilt wegen der letzten Ungleichung

$$\mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_1)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)) \geqq -\mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)) \tag{9}$$

für alle $i \in I(z, x^*)$ und damit

$$\sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_1)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)) \geqq \sum_{i \in I(z,x^*)} -\mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)).$$

Also haben wir

$$\mathscr{H}(z) \leqq \mathscr{H}(z+0) + \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)). \tag{10}$$

Nach Lemma 7 ist auch $M_2(z) \neq \emptyset$. Sei $v_2 \in M_2(z)$ beliebig, dann gilt analog

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(z) &= \sup_{v \in U} H(z, x^*(z), v, p(z), \lambda_0) \geqq H(z, x^*(z), v_2, p(z), \lambda_0)\\ &= H(z, x^*(z), v_2, p(z+0), \lambda_0)\\ &\quad - \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_2)\, g_{i\xi}(z, x^*(z)).\end{aligned} \tag{11}$$

Einerseits ist wegen $v_2 \in \mathscr{H}^{-v}(z+0)$ nun $H(z, x^*(z), v_2, p(z+0), \lambda_0) = \tilde{\mathscr{H}}(z+0)$, andererseits gilt wegen $v_2 \in W_2(z)$

$$\mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_2)\, g_{it}(z, x^*(z)) \leqq -\mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)) \tag{12}$$

für alle $i \in I(z, x^*)$ und damit

$$\sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi(z, x^*(z), v_2)\, g_{it}(z, x^*(z)) \leqq \sum_{i \in I(z,x^*)} -\mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)).$$

Deshalb haben wir

$$\tilde{\mathscr{H}}(z) \geqq \tilde{\mathscr{H}}(z+0) + \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)).$$

Daraus folgt wegen (10) die erste Behauptung des Satzes, d. h.

$$\tilde{\mathscr{H}}(z) = \tilde{\mathscr{H}}(z+0) + \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, g_{it}(z, x^*(z)).$$

Demzufolge müssen alle „$\leqq$" und „$\geqq$" in (8), (9), (11) und (12) durch Gleichheitszeichen ersetzt werden. Aus (8) entsteht dadurch $H(z, x^*(z), v_1, p(z+0), \lambda_0) = \tilde{\mathscr{H}}(z+0)$, d. h. $v_1 \in \mathscr{H}^{-v}(z+0)$ für alle $v_1 \in M_1(z)$. Also gilt $M_1(z) \subset \mathscr{H}^{-v}(z+0)$. Analog kommt $M_2(z) \subset \mathscr{H}^{-v}(z)$ durch das Gleichheitszeichen in (11) zustande. Die übrigen Behauptungen in a) ergeben sich aus (9) und (12).

c) v_1 sei beliebig aus $M_1(z)$ $(\neq \emptyset)$. Ist $v_1 \in \partial U$, so folgt aus (6) und a) $\mu_i(\{z\}) = 0$ für alle $i \in I(z, x^*)$. Damit ist $p(z) = p(z+0)$, d. h. p ist in z stetig. Ist $v_1 \in \operatorname{int} U$, so folgt einerseits wegen $v_1 \in M_1(z) \subset \mathscr{H}^{-v}(z)$ (nach der Definition) und $M_1(z) \subset \mathscr{H}^{-v}(z+0)$ (nach a))

$$H_{v_j}(z, x^*(z), v_1, p(z), \lambda_0) = H_{v_j}(z, x^*(z), v_1, p(z+0), \lambda_0) = 0$$

für alle $j = 1, 2, \ldots, r$. Andererseits ist

$$H_{v_j}(z, x^*(z), v_1, p(z), \lambda_0) = H_{v_j}(z, x^*(z), v_1, p(z+0), \lambda_0) - \sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi_{v_j}(z, x^*(z), v_1)\, g_{it}(z, x^*(z)).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{i \in I(z,x^*)} \mu_i(\{z\})\, \varphi_{v_j}(z, x^*(z), v_1)\, g_{it}(z, x^*(z)) = 0.$$

Wegen (7) muß $\mu_i(\{z\}) = 0$ für alle $i \in I(z, x^*)$ sein, d. h. p ist in z stetig ∎

Bemerkung: Für die lineare Aufgabe

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} \big(f_0(t, x(t)) + f_1(t, x(t))\, u(t)\big)\, dt \to \inf!, \\ \dot{x}(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t), \\ |u(t)| \leqq 1, \quad |x(t)| \leqq \alpha \quad \text{für} \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x(t_1) = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

und die quasireguläre Aufgabe

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} \big(f_0(t, x(t)) + f_1(t, x(t))\, u(t) + f_2(t, x(t))\, u^2(t)\big)\, dt \to \inf!, \\ \dot{x}(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t), \\ |u(t)| \leqq 1, \quad |x(t)| \leqq \alpha \quad \text{für} \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x(t_1) = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

lauten die Bedingungen (6) und (7)

$$C(t)\,(\pm\alpha) + D(t) \neq 0, \qquad C(t)\,(\pm\alpha) - D(t) \neq 0, \qquad D(t) \neq 0. \tag{15}$$

Diese Bedingungen können in vielen Fällen erfüllt werden. Dagegen gilt die Bedingung der allgemeinen Lage von W. G. Boltjanski nicht, wie am Anfang schon gesagt wurde. In [4] und [6] wurde gezeigt, daß bei einem optimalen Prozeß der Aufgabe (13) eine Aufsprungstelle im allgemeinen nicht zugleich eine Absprungstelle ist. Das heißt man kann die Theorie von H. W. Knobloch nicht für (13) anwenden. Für (14) ist die Forderung von H. W. Knobloch ebenfalls nicht erfüllt, denn nach [6] bzw. Lemma 8 gilt $\dot{x}^*(z) = 0$ für alle Aufsprung- bzw. Absprungstellen z.

Im allgemeinen besagt die Bedingung (6): Eine optimale Trajektorie kann mit Steuerungen aus dem Rande des Steuerbereichs U nicht weiterhin auf dem Rande des Zustandsbereichs G bleiben.

4. Einige Anwendungen

In diesem Abschnitt werden aus den vorangegangenen Ergebnissen einige Schlußfolgerungen über die Optimalstellenmenge der Pontrjaginfunktion und über die Stetigkeit der optimalen Steuerung gezogen.

Lemma 8: *Gegeben sei* $\mathcal{H}^{-v}(z) = \{\bar{v}\}$ (d. h. $\mathcal{H}^{-v}$ *besitzt genau ein Element*) *und* $I(z, x^*) \neq \emptyset$. *Dann gilt:*

a) $\big(1, \varphi(z, x^*(z), v)\big)$ grad $g_i\big(z, x^*(z)\big) = 0$ für alle $i \in I(z, x^*)$,

b) *Unter* (6) *ist* $\bar{v} \in \operatorname{int} U$ *und* $H_v\big(z, x^*(z), \bar{v}, p(z), \lambda_0\big) = 0$.

Beweis: a) Nach Lemma 7 und Definition gilt

$$\emptyset \neq M_1(z) = W_1(z) \cap \mathcal{H}^{-v}(z) = W_1(z) \cap \{\bar{v}\} \subset \{\bar{v}\}.$$

Daraus folgt $\bar{v} \in W_1(z)$, d. h. $\varphi\big(z, x^*(z), \bar{v}\big)\, g_{ix}\big(z, x^*(z)\big) \geqq -g_{it}\big(z, x^*(z)\big)$ für alle $i \in I(z, x^*)$. Nach Lemma 7 und Satz 2 gilt $\emptyset \neq M_2(z) \subset \mathcal{H}^{-v}(z) = \{\bar{v}\}$. Deshalb ist $\{\bar{v}\} = M_2(z) = W_2(z) \cap \mathcal{H}^{-v}(z+0)$. Daraus folgt $\bar{v} \in W_2(z)$, d. h. $\varphi\big(z, x^*(z), \bar{v}\big) \times g_{ix}\big(z, x^*(z)\big) \leqq -g_{it}\big(z, x^*(z)\big)$ für alle $i \in I(z, x^*)$. Also gilt $\big(1, \varphi(z, x^*(z), v)\big) \times$ grad $g_i\big(z, x^*(z)\big) = 0$ für alle $i \in I(z, x^*)$.

b) Aus (6) folgt sofort $\bar{v} \in \operatorname{int} U$ und wegen $v \in \mathcal{H}^{-v}(z)$ auch $H_v\big(z, x^*(z), \bar{v}, p(z), \lambda_0\big) = 0$ ∎

Die Voraussetzung des Lemmas 8 ist bei den quasiregulären Aufgaben, beispielsweise (14), erfüllt. Weiterhin kann man Lemma 8 zur Untersuchung der folgenden quasilinearen Aufgabe der optimalen Steuerung anwenden:

$$\begin{gathered}
\int_{t_0}^{t_1} \Big(f_0(t, x(t)) + \sum_{j=1}^{r} f_j(t, x(t))\, u_j(t)\Big)\, dt \to \inf!, \\
\dot{x}(t) = \varphi_0\big(t, x(t)\big) + \sum_{j=1}^{r} \varphi_j\big(t, x(t)\big)\, u_j(t) \in \mathbf{R}^n, \\
\beta_j \leqq u_j(t) \leqq b_j, \qquad \alpha_i \leqq x_i(t) \leqq a_i, \qquad x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad x_i(t_1) = x_{i1} \\
(j = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ t \in [t_0, t_1]).
\end{gathered} \tag{16}$$

Lemma 9: *Sei (x^*, u^*) ein optimaler Prozeß der Aufgabe* (16) *und* (6) *sei erfüllt. Dann existiert für beliebiges $z \in [t_0, t_1]$ mit $I(z, x^*) \neq \emptyset$ ein j $(1 \leqq j \leqq r)$ mit $H_{v_j}(z, x^*(z), u^*(z), p(z), \lambda_0) = 0$.*

Beweis: Wäre die Behauptung falsch, dann gälte

$$H_{v_j}(z, x^*(z), u^*(z), p(z), \lambda_0) \neq 0$$

für $j = 1, 2, \ldots, r$. Für diese Aufgabe ist H_{v_j} unabhängig von v, deshalb ist

$$H_{v_j}(z, x^*(z), v, p(z), \lambda_0) \neq 0 \tag{17}$$

für alle $v \in U$ und $j = 1, 2, \ldots, r$. Daraus folgt wegen der Definition von U und der Linearität von H in v, daß $\mathcal{H}^{-v}(z)$ genau ein Element $\bar{v}$ enthält, d. h. $H(z, x^*(z), \cdot, p(z), \lambda_0)$ hat genau eine Maximalstelle. Nun wird Lemma 8 angewandt, und es ergibt sich daraus $H_{v_j}(z, x^*(z), \bar{v}, p(z), \lambda_0) = 0$ für alle $j = 1, 2, \ldots, r$ im Widerspruch zu (17). Also muß die Behauptung des Lemmas richtig sein ∎

Lemma 10: *Für die Aufgabe* (1) *seien* (4)—(7) *erfüllt und es sei vorausgesetzt, daß $H(t, x^*(t), \cdot, p(t), \lambda_0)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ genau eine Maximalstelle besitzt. Dann ist die optimale Steuerung u^* stetig.*

Beweis: Nach Satz 2 ist p stetig. Daraus folgt die Stetigkeit von $\tilde{H}(\cdot, v)$ für alle $v \in U$ und damit wegen $\tilde{\mathcal{H}}(t) = \sup_{v \in U} \tilde{H}(t, v)$ auch die Stetigkeit von $\tilde{\mathcal{H}}$ (vgl. B. N. PŠENIČNYJ [8: Kap. 3]). Wegen

$$\mathcal{H}^{-v}(t) = \{v \in U \mid \tilde{H}(t, v) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\}$$

ist $\mathcal{H}^{-v}$ nach Lemma 1 oberhalbstetig. Weil $\mathcal{H}^{-v}$ nach Voraussetzung einelementig ist, etwa $\mathcal{H}^{-v}(t) = \{\bar{u}(t)\}$, folgt aus der Oberhalbstetigkeit von $\mathcal{H}^{-v}$ die Stetigkeit von $\bar{u}$. Nach (3) gilt $u^*(t) \in \mathcal{H}^{-v}(t)$ fast überall in $[t_0, t_1]$, also stimmt u^* mit $\bar{u}$ fast überall überein. Aus der Stetigkeit von $\bar{u}$, der rechtsseitigen Stetigkeit in $[t_0, t_1]$ und der Stetigkeit in t_1 von u^* folgt, daß u^* und $\bar{u}$ überall in $[t_0, t_1]$ übereinstimmen und damit u^* stetig ist ∎

Insbesondere erfüllt die Aufgabe (14)—(15) alle Voraussetzungen des Lemmas 10, deshalb ist jede optimale Steuerung dieser Aufgabe stetig.

LITERATUR

[1] BOLTJANSKI, W. G.: Mathematische Methoden der optimalen Steuerung. Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G.: Leipzig 1971.

[2] IOFFE, A. D., und V. M. TICHOMIROV: Theorie der Extremalaufgaben (Übers. a. d. Russ.). Dt. Verlag Wiss.: Berlin 1979.

[3] KNOBLOCH, H. W.: Das Pontryaginsche Maximumprinzip für Probleme mit Zustandsbeschränkung. ZAMM 55 (1975), 545—556 und 621—634.

[4] HOÀNG XUÂN PHÚ: Lineare Steuerungsprobleme mit engen Zustandsbereichen. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization (eingereicht).

[5] HOÀNG XUÂN PHÚ: Einige notwendige Optimalitätsbedingungen für einfache reguläre Aufgaben der optimalen Steuerung. Z. Anal. Anw. (erscheint).

[6] HOÀNG XUÂN PHÚ: Methoden zur Lösung von Aufgaben der optimalen Steuerung mit engen Zustandsbereichen. Dissertation A: Karl-Marx-Universität Leipzig 1983.

[7] Hoàng Xuân Phú: Lösung einer einfachen regulären Aufgabe der optimalen Steuerung mit engen Zustandsbereichen anhand der Methode der Bereichsanalyse. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization (eingereicht).
[8] Pšeničnyj, B. N.: Notwendige Optimalitätsbedingungen. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1972.
[9] Rademacher, H.: Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über Transformation der Doppelintegrale. Math. Ann. 79 (1919), 340–359.

Manuskripteingang: 15. 07. 1983

VERFASSER:

Dr. Hoàng Xuân Phú
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz
Heimatadresse: Truong Dang cao cap
Nguyen Ai Quoc
Tu liem
Ha noi, SR Vietnam