Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (6) (1984), S. 555–568

Extremalprinzipien zur Charakterisierung von quasikonformen Normalabbildungen und ihre Anwendung zur Abschätzung von Gebietsfunktionalen

S. Kirsch

Für eine gewisse Klasse quasikonformer Normalabbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes werden Extremalprinzipien mit dem Energieprinzip der modernen Potentialtheorie bewiesen und verschiedene Verzerrungssätze und Abschätzungen von Gebietsfunktionalen abgeleitet.

Для некоторого класса квазиконформых канонических отображений многосвязной области доказываются экстремальные принципы при помощи энергического принципа современной теории потенциалов и выводятся различные предложения искажения и оценки функционалов области.

For a certain class of quasiconformal canonical mappings of a multiple-connected domain the extremal principle is derived with the help of the energy-principle of the modern potential theory, and several distorsion theorems and estimations of domain functionals are proved.

§ 1. Einleitung

1979 gab R. Kühnau [14] mit Hilfe des Gaußschen Prinzips minimaler Energie Extremalungleichungen zur Charakterisierung von quasikonformen Normalabbildungen (Kreisscheibenschlitz- und Parallelschlitzabbildung) an. In dieser Mitteilung werden diese Extremalprinzipien mit dem *Energieprinzip* der modernen Potentialtheorie neu begründet mit dem Ziel ihrer Erweiterung auf allgemeinere Ladungsräume. Dies ermöglicht dann u. a. a priori-Abschätzungen für Gebietsfunktionale durch geometrisch evidente Größen. Die Begründung von derartigen Extremalprinzipien gelingt z. B. immer in solchen Fällen, in denen Normalabbildungen als Extremalabbildungen für Extremalprobleme vom Grötzschschen Typ bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung auftreten, die durch komplexe, von Ladungen endlicher Energie erzeugte Potentiale dargestellt werden können, wobei die zugehörigen quadratischen Differentiale vollständige Quadrate sind.

Die Potentialdarstellungen von quasikonformen Normalabbildungen geben einerseits Aufschluß über die Verzerrung, die eine ebene Figur bei der Abbildung erleidet, und lassen andererseits Abschätzungen der Lage der Schlitze der Normalgebiete durch geometrisch evidente Gebietsgrößen zu, die aus dem zweiten Maximumprinzip und dem Energieprinzip der modernen Potentialtheorie gewonnen werden. Eine zentrale Rolle bei diesen Überlegungen spielt die Differentialgleichung

$$w_{\bar{z}} = q(z)\,\overline{w_z} \tag{1}$$

mit $z = x + iy$, $w = u + iv$, wobei q reell und in noch zu präzisierendem Sinne glatt ist und $|q(z)| \leqq q_0 < 1$ erfüllt.

§ 2. Bezeichnungen und Hilfssätze

Mit G bezeichnen wir eine den unendlich fernen Punkt enthaltende offene k-fach zusammenhängende ebene Punktmenge, deren Rand C aus $k \geqq 1$ geschlossenen analytischen Jordankurven C_n bestehe und so orientiert sei, daß G zur Linken liegt. Die Abschließung des Innern von C_n sei E_n und $E = \sum_{n=1}^{k} E_n$.

$L_\theta(C_n)$ sei die θ-Breite der Randkomponente C_n, d. h. die euklidische Länge der Projektion von C_n auf eine Gerade mit dem Anstieg $\theta + \pi/2$ zur positiven reellen Achse. Mit $L_\theta'(C_n)$ meinen wir die θ-Breite von C_n in einer gewissen Hilfsebene.

Die in der gesamten z-Ebene $\mathbf{C}$ erklärte reellwertige Funktion p sei stückweise glatt mit

$$1/Q \leqq p(z) \leqq Q,$$

in einer gewissen Umgebung des unendlich fernen Punktes $= 1$ und gleich einer Konstanten in einem beidseitigen Umgebungsstreifen jeder Randkomponente von G. Des weiteren sei gesichert, daß alle eventuell auftretenden Sprunglinien von p die Menge E meiden.

Wir setzen noch

$$q(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}, \qquad |q(z)| \leqq \frac{Q-1}{Q+1} = q_0 < 1.$$

$T(q)$ sei der Träger von q; mit $D(M)$ bzw. $|M|$ bezeichnen wir den Durchmesser bzw. den äußeren Jordanschen Flächeninhalt der ebenen Punktmenge M.

$\mathfrak{A}(G)$ sei die Klasse aller quasikonformen Abbildungen von G, deren Dilatation $\leqq Q$ und $= 1$ in $\mathbf{C} \setminus T(q)$ ist und die in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes gemäß $z + a_1 z^{-1} + \cdots$ normiert sind. Für $w \in \mathfrak{A}(\mathbf{C})$ gilt nach [15]

$$|w(z) - z| \leqq (Q-1)\,(|T(q)|/\pi)^{1/2} \qquad (z \in \mathbf{C}) \tag{2}$$

und

$$\left|\log \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqq (Q-1)\left(1 + 2\,|z_1 - z_2|^{-1}\,(\pi^{-1}\,|T(q)|)^{1/2}\right) \tag{3}$$

$(z_1, z_2 \in \mathbf{C})$.

Mit $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(z, \zeta)$ bezeichnen wir diejenige stetige schlichte Abbildung der Vollebene auf sich, die $\mathfrak{r}(\infty, \zeta) = \infty$ und $\mathfrak{r}(\zeta, \zeta) = 0$ erfüllt und für die $i \cdot \log \mathfrak{r}(., \zeta)$ in z die Differentialgleichung (1) erfüllt, wobei $\log \mathfrak{r}(., \zeta)$ die Entwicklung

$$\log z + \varepsilon_1(z, \zeta) \qquad \text{in } z = \infty \tag{4}$$

bzw.

$$\left(1 + q(\zeta)\right)^{-1} [\log (z - \zeta) - q(\zeta)\,\overline{\log (z - \zeta)}] + c(\zeta) + \varepsilon_2(z, \zeta) \quad \text{in } z = \zeta, \tag{5}$$

(falls ζ nicht auf einer Sprunglinie von p liegt),

aufweist mit nach Null strebenden Funktionen ε_1 und ε_2 für z nach ∞ bzw. z nach ζ (vgl. [12, 13]), wobei die Konvergenz für ε_1 gleichmäßig bezüglich der Variablen $\zeta \in M$ (= Kompaktum) ist. Wir setzen noch

$$[z, \zeta] = |\mathfrak{r}(z, \zeta)|.$$

Die Funktion $\mathfrak{r}$ ist stetig in z und ζ und $[., .]$ ist symmetrisch bezüglich z und ζ (vgl. [13]). Für $p \equiv 1$ ist $[z, \zeta] \equiv |z - \zeta|$, und für im Innern und Äußeren des Einheitskreises jeweils stückweise konstantes p ist $[., .]$ in [14] angegeben worden.

Mit der Hilfsfunktion $H(x, y, t) = [x + 2y + 2(xy + y^2)^{1/2}]^{1-t}$ gilt nach [7] noch folgende Verzerrungsaussage:

$$B\,|z - \zeta|^Q \leqq |w(z) - w(\zeta)| \leqq A\,|z - \zeta|^{1/Q}, \qquad w \in \mathfrak{A}(\mathrm{C}), z \in \mathrm{C}, \tag{6}$$

mit

$$A = A(|z - \zeta|) = H\big(|z - \zeta|, D(T(q)), 1/Q\big)$$

und

$$B = B(|z - \zeta|) = H\big(|z - \zeta|^{1/Q} A,\ (3 + 8^{1/2})^{1-1/Q} D(T(q)), Q\big).$$

Insbesondere gilt (6) auch für $w(\cdot) = \mathfrak{r}(\cdot, \zeta)$.

Es gilt noch die Abschätzung der verallgemeinerten Kapazität cap (M, p) durch die gewöhnliche logarithmische Kapazität cap $(M, 1)$ einer ebenen Punktmenge M (siehe dazu [6, 7])

$$B\big(D(M)\big)\big(\operatorname{cap}(M, 1)\big)^Q \leqq \operatorname{cap}(M, p) \leqq A\big(D(M)\big)\big(\operatorname{cap}(M, 1)\big)^{1/Q}. \tag{7}$$

Weiter bezeichnen wir mit E diejenige eindeutig bestimmte, stetige und schlichte Abbildung von G, die C_1 in einen zu Null konzentrischen Kreis mit dem Radius R_1 und $C_2, \ldots, C_k$ (falls vorhanden) in hierzu konzentrische Kreisbogenschlitze mit den Parametern R_n (Radius) und φ_n (Öffnungswinkel im Bogenmaß) überführt, die den unendlich fernen Punkt festhält, wobei $i \log E(\cdot)$ die Differentialgleichung (1') erfüllt, und die in $z = \infty$ die Entwicklung $z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots$ besitzt.

Schließlich sei j_θ diejenige eindeutig bestimmte stetige und schlichte Abbildung von G, die die Randkomponenten C_n in Strecken der Länge $l_{\theta,n}$ des Neigungswinkels θ gegen die positive reelle Achse überführt, so daß

$$\operatorname{Re}\big(i\, e^{-i\theta} j_\theta(z)\big) = c_n \quad (= \text{const.}) \text{ auf } C_n \quad (n = 1, \ldots, k)$$

gilt, die $j_\theta(\infty) = \infty$ und für die $e^{-i\theta} j_\theta$ die Differentialgleichung (1) erfüllt, wobei der Entwicklungstypus

$$j_\theta(z) = z + a_{1,\theta} z^{-1} + \cdots \tag{8}$$

in $z = \infty$ vorliegt.

Die Abbildungsfunktion $\mathfrak{j}_\theta$ werde genau wie j_θ definiert, wobei G durch die Vollebene zu ersetzen ist. In $z = \infty$ liege die Normierung

$$\mathfrak{j}_\theta(z) = z + \mathfrak{a}_{1,\theta} z^{-1} + \cdots \tag{9}$$

vor. Nach [15] gilt für jedes reelle θ stets

$$(2\pi)^{-1}(Q - 1)\, Q^{-1} |T(q)| \leqq \operatorname{Re}(e^{-2i\theta}\, \mathfrak{a}_{1,\theta}) \leqq (2\pi)^{-1}(Q - 1)\, |T(q)|. \tag{10}$$

Mit $\mathfrak{C}(E)$ sei der Vektorraum aller auf $\mathbf{C}$ erklärten reellwertigen stetigen Funktionen bezeichnet, deren Träger in E enthalten sind. Weiterhin sei $\mathfrak{M}$ der Vektorraum aller reellwertigen σ-additiven Mengenfunktionen (auch Ladungen oder Maße genannt)

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \text{ (Jordanzerlegung von } \nu),$$

die auf der σ-Algebra aller Borelmengen e des $\mathbf{R}^2$ definiert und auf jedem Kompaktum endlich sind und kompakten Träger besitzen. Wir setzen noch

$$[\nu] := \nu^+(\mathbf{R}^2) + \nu^-(\mathbf{R}^2).$$

Unter dem Potential $U\mu$ des symmetrischen Potentialkernes $k = k(z, \zeta)$ bezüglich einer positiven Ladung μ mit kompaktem Träger meinen wir die numerische Funktion

$$U\mu: z = x + iy \to \int k^+(z, \zeta)\, d\mu(\zeta) - \int k^-(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$$

mit $k^+(z, \zeta) = \sup\big(k(z, \zeta), 0\big)$, $\quad k^-(z, \zeta) = -\inf\big(k(z, \zeta), 0\big)$.
Die Integrale sind äußere Integrale von k^+ bzw. k^- bezüglich μ, siehe [1].

Unter der wechselseitigen Energie zweier positiver Ladungen verstehen wir die reelle Zahl

$$(\mu_1, \mu_2) = \int U\mu_1(z)\, d\mu_2(z) \leqq +\infty .$$

Falls nicht ein unbestimmter Ausdruck auftritt, verstehen wir unter der Energie einer vorzeichenbehafteten Ladung ν die reelle Zahl

$$(\nu, \nu) := (\nu^+, \nu^+) + (\nu^-, \nu^-) - 2(\nu^+, \nu^-) .$$

Das reelle Potential $U\nu$ bezüglich $k(z, \zeta) = -\log\,[z, \zeta]$ erfüllt außerhalb des Trägers von ν die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\big(p(z)\operatorname{grad} U\big) = 0 \tag{11}$$

(vgl. dazu [6]).

Lemma 1: *Der Potentialkern $k(z, \zeta) = -\log\,[z, \zeta]$ genügt folgenden potentialtheoretischen Prinzipien für Potentiale $U\nu^+$, die von auf E eingeschränkten Maßen $\nu^+ \in \mathfrak{M}$ erzeugt werden:*
Maximumprinzip, Gleichgewichtsprinzip, Balayage-Prinzip, Stetigkeitsprinzip, Unitätsprinzip und Energieprinzip.

Beweis: Auf Grund der auf Seite 175 in [18] fortlaufenden Lemmata ist es hinreichend, für den konkreten Potentialkern die Gültigkeit

i) des zweiten Maximumprinzips,
ii) des Unitätsprinzips und des
iii) Energieprinzips

nachzuweisen. Denn aus dem zweiten folgt in Verbindung mit (4) das erste Maximumprinzip, daraus wiederum das Stetigkeitsprinzip, das Gleichgewichtsprinzip, das Balayage-Prinzip und daß $-\log\,[z, \zeta]$ vom Positiv-Typ ist, d. h., daß $(\nu, \nu) \geqq 0$ für alle $\nu \in \mathfrak{M}$ ist, die auf E eingeschränkt sind mit $\nu(E) = 0$ und von endlicher Energie sind.

i) Die Gültigkeit des zweiten Maximumprinzips kann mit derselben Beweisidee von Maria (vgl. [20: S. 53) nachgewiesen werden, mit der der Beweis des ersten Maximumprinzips für Potentiale bezüglich des logarithmischen Kerns geführt wurde. Man setze dazu statt $U\mu$ die Funktion $U\mu(\cdot) + \log\,[\cdot, \zeta]$ ein und berücksichtige, daß lokal für die Abstandsfunktion $[\cdot, \zeta]$ eine verallgemeinerte Dreiecksungleichung (vgl. [6]) gilt.

ii) Seien μ_1, μ_2 zwei auf E eingeschränkte positive Ladungen mit $[\mu_1] = [\mu_2] = 1$. Es gelte $U\mu_1 = U\mu_2$ λ — fast überall für alle stetige Potentiale erzeugende positive Ladungen $\lambda \in \mathfrak{M}$, die auf eine hinreichend kleine δ-Umgebung E_δ von E eingeschränkt seien. Nach dem Satz von Fubini gilt nun

$$\int U\lambda(z)\, d\mu_1(z) = \int U\lambda(z)\, d\mu_2(z) .$$

Wir wählen nun eine spezielle signierte Ladung

$$d\lambda(z) = d(\lambda^+ - \lambda^-)\,(z) := -(2\pi)^{-1} \operatorname{div}\big(p(z) \operatorname{grad} \varphi(z)\big)\, dx\, dy ,$$

mit $z = x + iy$ und $\varphi \in \mathfrak{C}_0^\infty(E_\delta)$. Offensichtlich erzeugen λ^+ und λ^- wieder stetige Potentiale. Mit Hilfe Greenscher Formeln verifiziert man unter Berücksichtigung von (5) die Beziehung $U\lambda = \varphi$. Folglich gilt

$$\int \varphi(z)\, d(\mu_1 - \mu_2) = 0 \tag{12}$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{C}_0^\infty(E_\delta)$. Da $\mathfrak{C}_0^\infty(E_\delta)$ in $\mathfrak{C}(E_{\delta/2})$ dicht liegt, so besteht die Beziehung (12) sogar für alle $f \in \mathfrak{C}(E_{\delta/2})$, was gleichbedeutend mit $\mu_1 \equiv \mu_2$ ist. Damit gilt das Unitätsprinzip.

iii) Entsprechend obiger Bemerkung ist der Kern $-\log \mathfrak{r}[z, \zeta]$ vom Positiv-Typ. Würde nun für ein $\nu = \nu^+ - \nu^- \not\equiv 0$ mit $\nu(E) = 0$ die Energie $(\nu, \nu) = 0$ sein, so müßte nach [18: Lemma 1/S. 176] notwendig $U\nu^+ = U\nu^-$ μ — fast überall für jede positive Ladung μ sein, die ein auf jedem Kompaktum beschränktes Potential erzeugt, und insbesondere λ — fast überall für jede positive Ladung λ mit stetigem Potential $U\lambda$ sein. Nach dem gültigen Unitätsprinzip müßte dann $\nu^+ \equiv \nu^-$, also $\nu \equiv 0$ sein, was aber nicht möglich ist. Daher gilt für $\nu \not\equiv 0$ stets $(\nu, \nu) > 0$ und nur für $\nu \equiv 0$ gilt $(\nu, \nu) = 0$. Unser Kern erfüllt somit das Energieprinzip ∎

§ 3. Potentialdarstellungen und Verzerrungsaussagen für quasikonforme Normalabbildungen und Abschätzungen von Gebietsfunktionalen

Für die quasikonformen Normalabbildungen E und j_θ gelten nach [14: S. 147–153] folgende Potentialdarstellungen:

$$-\log E(z) = \int_C -\log \mathfrak{r}(z, \zeta)\, \nu_1(\zeta)\, ds_\zeta, \qquad z \in \overline{G}, \tag{13}$$

mit der hölderstetigen Dichtefunktion

$$\nu_1(z) = (2\pi)^{-1}\, p(z)\, \frac{\partial}{\partial \mathfrak{n}} \log |E(z)| = (2\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \arg E(z) \tag{14}$$

und

$$i\, e^{-i\theta}\, j_\theta(z) = i\, e^{-i\theta}\, \mathfrak{j}_\theta(z) + \int_C \big(\log \mathfrak{r}(z, \zeta)\big)\, \nu_0(\zeta)\, ds_\zeta, \qquad z \in \overline{G}, \tag{15}$$

mit der hölderstetigen Dichtefunktion

$$\nu_0(z) = (2\pi)^{-1}\, p(z)\, \frac{\partial}{\partial \mathfrak{n}} \operatorname{Re}\big(i\, e^{-i\theta}\, j_\theta(z)\big) = (2\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \operatorname{Im}\big(i\, e^{-i\theta}\, j_\theta(z)\big). \tag{16}$$

Durch Realteilbildung in (13) und (15) erhalten wir

$$U\nu_1(z) = \begin{cases} -\log |E(z)|, & z \in G \quad (17) \\ -\log R_n, & z \in E_n \quad (n = 1, \ldots, k) \quad (18) \end{cases}$$

mit

$$(\nu_1, \nu_1) = -\log R_1, \tag{19}$$

und

$$U\nu_0(z) = \begin{cases} \operatorname{Re}\big(i\, e^{-i\theta}\, \mathfrak{j}_\theta(z)\big) - \operatorname{Re}\big(i\, e^{-i\theta}\, j_\theta(z)\big), & z \in G \quad (20) \\ \operatorname{Re}\big(i\, e^{-i\theta}\, \mathfrak{j}_\theta(z)\big) - c_n, & z \in E_n\ (n = 1, \ldots, k) \quad (21) \end{cases}$$

und

$$(\nu_0, \nu_0) = \int_C \operatorname{Re}\big(i\, e^{-i\theta}\mathfrak{j}_\theta(z)\big)\, \nu_0(z)\, ds_z = \operatorname{Re}\,[e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})]. \tag{22}$$

Die Gleichungen (18) und (21) ergeben sich dadurch, daß man auf die Differenz von jeweils linker und rechter Seite als stetige Lösung von (12) in E_n das Maximum-Minimum-Prinzip anwendet.

Bei Beachtung der Ränderzuordnung bei der quasikonformen Normalabbildung E bzw. j_θ erkennt man aus der Darstellung der Ladung ν_1 bzw. ν_0 in (14) bzw. (16), daß jede Randkomponente C_n durch zwei voneinander verschiedene Kurvenpunkte in zwei analytische Jordankurvenbögen $C^+_{n,1}$ und $C^-_{n,1}$ bezüglich ν_1 bzw. $C^+_{n,0}$ und $C^-_{n,0}$ bezüglich ν_0 zerlegt wird, wobei ν_1 bzw. ν_0 auf ersterem durchweg positiv, auf zweiterem durchweg negativ ist (in den Endpunkten der Kurvenbögen verschwinden die Dichtefunktionen), ausgenommen die Randkomponente C_1 im Fall der Kreisschlitzabbildung E, auf der ν_1 einheitlich positiv ist. Den Darstellungen der Dichtefunktionen ν_1 und ν_0 entnimmt man leicht die Beziehungen

$$[\nu_{1|C_n}] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2 \cdot \dfrac{\varphi_n}{2\pi} < 2, & n = 2, \ldots, k \end{cases} \tag{23}$$

und

$$[\nu_{0|C_n}] = 2\,\frac{l_{\theta,n}}{2\pi} \leqq 4r/\pi, \qquad n = 1, \ldots, k, \tag{24}$$

wobei r der Radius des kleinsten zu Null konzentrischen, $T(q)$ und C enthaltenden Kreises ist.

Bemerkung 1: Potentialdarstellungen quasikonformer Normalabbildungen von beliebigen k-fach zusammenhängenden Gebieten G ergeben sich aus Potentialdarstellungen quasikonformer Normalabbildungen von Gebieten G_n, die von geschlossenen analytischen Jordankurven berandet sind und gegen G mit $G_n \subset G_{n+1} \subset G$ kernkonvergent sind, wenn man einen Konvergenzsatz für Potentiale (siehe [1: Satz 8/ Seite 34]) bemüht unter Verwendung des Limessatzes [7: Lemma 2] und Beachtung von (13)—(24). Es gelten analoge Beziehungen wie in (13), (15), (17), (18), (20) und (21), wobei diese auf dem Rand C i. a. nur in einem gewissen Sinn fast überall gelten. Ohne zusätzliche Informationen über den Gebietsrand läßt sich hier i. a. nicht so ohne weiteres entscheiden, ob die sich einstellende Grenzladung von endlicher Energie ist, abgesehen von dem Fall der Kreisabbildung ($k = 1$), wo man mit positiven Ladungen operiert.

Die Potentialdarstellungen (13) und (15) geben Aufschluß über die Verzerrung, die eine ebene Figur in G durch die Normalabbildungen E und j_θ erleidet. Durch Aufspaltung der Gleichungen (13) und (15) in Real- und Imaginärteil und Verwendung des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung und der Beziehungen (23) und (24) erhalten wir den

Satz 1: *Zu jedem $z \in G$ gibt es $4k - 2$ von z abhängige, auf C gelegene Punkte $\zeta_1, \zeta_1' \in C_1$, $\zeta_n^+, \zeta_n'^+ \in C^+_{n,1}$, $\zeta_n^-, \zeta_n'^- \in C^-_{n,1}$ ($n = 2, \ldots, k$) derart, daß gilt*

$$|E(z)| = [z, \zeta_1] \prod_{n=2}^{k} ([z, \zeta_n^+]/[z, \zeta_n^-])^{\varphi_n/(2\pi)}, \tag{25}$$

und

$$\arg E(z) = \arg\left(\mathfrak{r}(z, \zeta_1') \prod_{n=2}^{k} \left(\mathfrak{r}(z, \zeta_n'^+)/\mathfrak{r}(z, \zeta_n'^-)\right)^{\varphi_n/(2\pi)}\right). \tag{26}$$

Analog bekommen wir Verzerrungssätze für die quasikonforme Parallelschlitzabbildung j_θ.

Satz 2: *Zu jedem $z \in G$ gibt es $4k$ von z abhängige, auf dem Rand C von G gelegene Punkte $\zeta_n^+, \zeta_n'^+ \in C_{n,2}^+, \zeta_n^-, \zeta_n'^- \in C_{n,2}^-$ $(n = 1, \ldots, k)$ derart, daß gilt*

$$\operatorname{Re}\left(i\, e^{-i\theta}(j_\theta(z) - \mathfrak{j}_\theta(z))\right) = \log \prod_{n=1}^{k} ([z, \zeta_n^+]/[z, \zeta_n^-])^{l_{\theta,n}/(2\pi)} \tag{27}$$

und

$$\operatorname{Im}\left(i\, e^{-i\theta}(j_\theta(z) - \mathfrak{j}_\theta(z))\right) = \arg \prod_{n=1}^{k} \left(\mathfrak{r}(z, \zeta_n'^+)/\mathfrak{r}(z, \zeta_n'^-)\right)^{l_{\theta,n}/(2\pi)}. \tag{28}$$

Im folgenden sei $A_{n,m} = A(D_{n,m})$, $B_{n,m} = B(D_{n,m})$, $B_n = B\big(D(C_n)\big)$ mit den Größen A und B aus (6), $D_{n,m} = \max |z - \zeta|$, $d_{n,m} = \min |z - \zeta|$, wobei $z \in C_n$ und $\zeta \in C_m$ sind. Weiterhin bezeichne μ bzw. μ_n die eindeutig bestimmte positive Gleichgewichtsverteilung der Gesamtmasse 1 auf C bzw. C_n $(n = 1, \ldots, k)$, für die

$$U\mu(z) = -\log \operatorname{cap}(E, p) \quad \text{auf } E$$

und

$$U\mu(z) \leqq -\log \operatorname{cap}(E, p) \quad \text{auf der gesamten } z\text{-Ebene}$$

bzw.

$$U\mu_n(z) = -\log \operatorname{cap}(E_n, p) \quad \text{auf } E_n$$

und

$$U\mu_n(z) \leqq -\log \operatorname{cap}(E_n, p) \text{ auf der gesamten } z\text{-Ebene}$$

gilt. (Siehe dazu [6]).

Seien $x_1, \ldots, x_k$ beliebige reelle Zahlen mit $\sum_{n=1}^{k} x_n = 1$. In Abhängigkeit von diesen Zahlen setzen wir noch

$$f_{n,m} := \begin{cases} \max\left[B_n\big(D(E_n)/4\big)^Q,\ B_m\big(D(E_m)/4\big)^Q\right], & \text{falls } x_n x_m \geqq 0 \text{ ist}, \\ A_{n,m}(D_{n,m})^{1/Q}, & \text{falls } x_n x_m < 0 \text{ ist}, \end{cases} \tag{29}$$

für $n, m = 1, \ldots, k$.

Satz 3: *Für die Radien $R_n = E(C_n)$ des Kreisscheibenschlitzgebietes $E(G)$ gelten folgende Beziehungen:*

$$\varrho^{-1} B_{1,n} d_{1,n}^Q \leqq R_n \leqq \varrho A_{1,n} D_{1,n}^{1/Q} \tag{30}$$

für $n = 2, \ldots, k$ mit

$$\varrho = \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{k} [(A_{n,m} D_{n,m}^{1/Q})/(B_{n,m} d_{n,m}^Q)]^{\varphi_m/(2\pi)},$$

$$R_1^{-1} \prod_{n=1}^{k} R_n^{2x_n} \geqq \prod_{n,m=1}^{k} f_{n,m}^{x_n x_m} \tag{31}$$

und

$$\operatorname{cap}(E, p) = \prod_{n=1}^{k} R_n^{\mu(E_n)}. \tag{32}$$

Beweis: Wir gehen von der Beziehung (18) aus und wenden auf

$$U\nu_{1|C_n}(z) = -\log R_n - U\nu_{1|C \setminus C_n}(z), \qquad z \in E_n \quad (n = 2, \ldots, k)$$

das zweite Maximumprinzip an, wonach dann unter Verwendung von (6)

$$\log (\varrho^{-1} B_{1,n} d_{1,n}^{Q}) \leqq U\nu_{1|C_n}(z) + \log R_n \leqq \log (\varrho A_{1,n} D_{1,n}^{1/Q}) \tag{33}$$

für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt, insbesondere für $z = \infty$, so daß wegen $U\nu_{1|C_n}(\infty) = 0$ die Abschätzung (30) aus (33) folgt.

Setzt man $\nu = \sum_{n=1}^{k} x_n \mu_n$, so erhält man einerseits in Verbindung mit (18), (19) und dem Energieprinzip

$$(\nu, \nu) = (\nu - \nu_1, \nu - \nu_1) + 2(\nu_1, \nu_1) - (\nu_1, \nu_1) \geqq -\log \left(R_1^{-1} \prod_{n=1}^{k} R_n^{2x_n}\right), \tag{34}$$

und andererseits unter Beachtung von (6) und (7)

$$(\nu, \nu) = \sum_{n,m=1}^{k} x_n x_m (\mu_n, \mu_m) \leqq -\log \prod_{n,m=1}^{k} f_{n,m}^{x_n x_m}. \tag{35}$$

Die Ungleichungen (34) und (35) bestätigen (31).
Integriert man (18) nach μ, ergibt sich mit dem Satz von Fubini

$$-\sum_{n=1}^{k} \mu(E_n) \log R_n = \int U\nu_1 \, d\mu = \int U\mu \, d\nu_1 = -\log \operatorname{cap} (E, p),$$

also die Beziehung (32) ∎

Bemerkung 2: Die Ungleichungen im Satz 3 sind im allgemeinen unscharf. Setzt man jedoch in (34) und (35) $x_1 = 1$, $x_n = 0$ für $n = 2, \ldots, k$, so ergibt sich die scharfe Ungleichung

$$R_1 \geqq \operatorname{cap} (E_1, p).$$

Das Gleichheitszeichen steht für Gebiete mit den Randkomponenten C_1 und Urbildern von $k - 1$ disjunkten, zu Null konzentrischen Kreisbogenschlitzen mit den Radien $> R_1$ bezüglich der quasikonformen Kreisabbildung des Äußeren von C_1 auf $|w| > R_1$. (Siehe Bemerkung 4 und [6].)

In ganz analoger Schlußweise gewinnt man unter Berücksichtigung von (2), (6) und (21) eine Abschätzung für die Lage der Bilder der Randkomponenten C_n von G bei der quasikonformen Parallelschlitzabbildung j_θ und eine zu (32) analoge Beziehung (38).

Satz 4: *Die Parallelschlitze* $i\,e^{-i\theta} j_\theta(C_n)$ (= *Strecken parallel zur imaginären Achse der* $u + iv = i\,e^{-i\theta} j_\theta(z)$*-Ebene mit* $\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta} j_\theta(z)\right) = c_n = const$ *für* $z \in C_n$) *liegen zwischen den Geraden*

$$u = \min_{z \in C_n} \operatorname{Re} (i\,e^{-i\theta} z) - u_n \tag{36}$$

und

$$u = \max_{z \in C_n} \operatorname{Re} (i\,e^{-i\theta} z) + u_n \tag{37}$$

mit

$$u_n = (Q - 1)\left(|T(q)|/\pi\right)^{1/2} + \log \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k} \left[(A_{n,m} D_{n,m}^{1/Q})/(B_{n,m} d_{n,m}^{Q})\right]^{l_{\theta,n}/(2\pi)}.$$

Im Fall $k = 1$ ist der zweite Summand in u_n wegzulassen.

Für die Konstanten c_n und die im Anschluß an Satz 2 charakterisierte Gleichgewichtsladung μ auf E mit der Gesamtmasse 1 besteht die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{k} c_n \mu(E_n) = \int \operatorname{Re}\left(i\, e^{-i\theta} \mathfrak{j}_\theta(z)\right) d\mu(z). \tag{38}$$

Bemerkung 3: Die in den Sätzen 1 bis 4 angegebenen Verzerrungsaussagen und Abschätzungen lassen sich auf Grund der Ungleichungen (2), (3), (6), (23) und (24) weiter durch Ausdrücke abschätzen, in denen nur noch evidente Gebietsgrößen bzw. von vornherein gegebene Größen auftreten.

Bemerkung 4: Die Sätze 1 bis 4 und die in § 4 folgenden Sätze und Folgerungen (ausgenommen die Aussage über das Gleichheitszeichen in Satz 5 und 6) gelten natürlich auch für beliebige k-fach zusammenhängende Gebiete G. Dies folgt daraus, daß man G von innen durch analytisch berandete Gebiete ausschöpfen kann und nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge auf die Folge der quasikonformen Normalabbildungen bezüglich der ausschöpfenden Gebietsfolge die in Rede stehenden Sätze in Verbindung mit dem Limessatz aus [7: Lemma 2] anwendet, die Stetigkeit von $\mathfrak{r}$ und schließlich noch die Tatsache berücksichtigt, daß die starke Konvergenz einer Folge von positiven Ladungen die schwache Konvergenz nach sich zieht.

§ 4. Extremalprinzipien zur Charakterisierung quasikonformer Normalabbildungen

Wir definieren zunächst folgende Ladungsräume:

> $\mathfrak{M}_1(E)$ sei die Menge aller auf E eingeschränkten Ladungen ν endlicher Energie mit $\nu(E_1) = 1$ und $\nu(E_n) = 0$ für $n = 2, \ldots, k$

und

> $\mathfrak{M}_0(E)$ sei die Menge aller auf E eingeschränkten Ladungen ν endlicher Energie mit $\nu(E_n) = 0$ für $n = 1, \ldots, k$.

Offenbar gilt $\nu_1 \in \mathfrak{M}_1(E)$, $\nu_0 \in \mathfrak{M}_0(E)$.

Satz 5: *Für alle $\nu \in \mathfrak{M}_1(E)$ gilt stets*

$$\log(1/R_1) \leqq (\nu, \nu), \tag{39}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $\nu = \nu_1$ angenommen wird.

Beweis: Die Anwendung von (18), (19) und des Energieprinzips liefert

$$(\nu, \nu) = (\nu - \nu_1, \nu - \nu_1) + 2(\nu_1, \nu) - (\nu_1, \nu_1) = (\nu - \nu_1, \nu - \nu_1) + \log(1/R_1)$$
$$\geqq \log(1/R_1),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur stehen kann, wenn $(\nu - \nu_1, \nu - \nu_1) = 0$, also $\nu \equiv \nu_1$ ist ∎

Folgerung 1: *$R_1(G)$ ist ein monoton fallendes Gebietsfunktional, d. h. aus $G' \subset G$ mit $E_1 \subset E_1'$ folgt $R_1(G') > R_1(G)$.*

Satz 6: *Für alle $\nu \in \mathfrak{M}_0(E)$ gilt stets*

$$\operatorname{Re}\left[e^{-2i\theta}(\mathfrak{a}_{1,\theta} - a_{1,\theta})\right] \leqq F(\nu) \tag{40}$$

mit

$$F(\nu) := (\nu, \nu) - 2 \int \operatorname{Re}\left(i\, e^{-i\theta}\, \mathfrak{j}_\theta(z)\right) d\nu(z),$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $\nu \equiv \nu_0$ angenommen wird.

Beweis: Die Anwendung von (21), (22) und des Energieprinzips liefert

$$\begin{aligned} F(\nu) &= (\nu, \nu) - 2(\nu, \nu_0) = (\nu - \nu_0, \nu - \nu_0) - (\nu_0, \nu_0) \\ &\geqq -(\nu_0, \nu_0) = \operatorname{Re}\left[e^{-2i\theta}(\mathfrak{a}_{1,\theta} - a_{1,\theta})\right], \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur stehen kann, wenn $(\nu - \nu_0, \nu - \nu_0) = 0$, also $\nu \equiv \nu_0$ ist ∎

Folgerung 2: $\operatorname{Re}(e^{-2i\theta} a_{1,\theta})$ *ist ein monoton fallendes Gebietsfunktional, d. h. aus $G' \subset G$ mit $E_1 \subset E_1'$ folgt*

$$\operatorname{Re}(e^{-2i\theta} a_{1,\theta})(G') > \operatorname{Re}(e^{-2i\theta} a_{1,\theta})(G).$$

Mit ν ist auch $t\nu \in \mathfrak{M}_0(E)$, wobei t ein endlicher reeller Faktor sei. Minimiert man den in t quadratischen Ausdruck $F(t\nu)$, so erhält man aus (40) für $\nu \not\equiv 0$

$$\frac{1}{(\nu, \nu)}\left(\int \operatorname{Re}\left(i\, e^{-i\theta}\, \mathfrak{j}_\theta(z)\right) d\nu(z)\right)^2 \leqq \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})\right), \tag{41}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $\nu \equiv (\text{const}) \cdot \nu_0$ steht. Addiert man die scharfen Ungleichungen (41) für $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$, so erhält man eine scharfe Abschätzung für die positive reelle quasikonforme Spanne $a_{1,0} - a_{1,\pi/2}$ von G in der

Folgerung 3: *Für alle Paare von zulässigen Ladungen $\nu, \nu' \in \mathfrak{M}_0(E)$, $\nu, \nu' \not\equiv 0$, gilt stets*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\nu, \nu)}\left(\int \operatorname{Im} \mathfrak{j}_0(z)\, d\nu(z)\right)^2 + \frac{1}{(\nu', \nu')}\left(\int \operatorname{Re} \mathfrak{j}_{\pi/2}(z)\, d\nu'(z)\right)^2 \\ &\leqq (a_{1,0} - a_{1,\pi/2}) - (\mathfrak{a}_{1,0} - \mathfrak{a}_{1,\pi/2}), \end{aligned} \tag{42}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $\nu \equiv \nu_{0,(\theta=0)}$ und $\nu \equiv \nu_{0,(\theta=\pi/2)}$ steht bis auf eine multiplikative Konstante.

Sei nun $\tilde{G}$ ein zum inneren Punkt $z = 0$ zentrisch symmetrisches $2k$-fach zusammenhängendes Gebiet mit dem Rand $\tilde{C} = \sum_{n=1}^{k} (\tilde{C}_n + \tilde{C}_{k+n})$, wobei $\tilde{C}_n$ und $\tilde{C}_{k+n}$ zentrisch zu $z = 0$ liegen mögen. Des weiteren sei $\tilde{E} = \mathbb{C} \setminus \tilde{G} = \sum_{n=1}^{2k} \tilde{E}_n$ und $\tilde{E}' = \sum_{n=1}^{k} \tilde{E}_n$ und die Funktion $\tilde{q}$ erfülle noch $\tilde{q}(-z) = \tilde{q}(z)$. Dies zieht auf Grund der zugehörigen Unitätssätze $\tilde{\jmath}_\theta(-z) = -\tilde{\jmath}_\theta(z)$, $\tilde{\mathfrak{j}}_\theta(-z) = \tilde{\mathfrak{j}}_\theta(z)$ und $\tilde{\mathfrak{r}}(-z, \zeta) = -\tilde{\mathfrak{r}}(z, \zeta)$ nach sich. Daher ist

$$\tilde{\nu}_0 \in \mathfrak{M}_0'(\tilde{E}) := \{\mu \in \mathfrak{M}_0(\tilde{E}) \text{ mit } \mu(e) = \mu(-e) \text{ für alle Borelmengen } e \subset \tilde{E}\}.$$

Mit

$$\mu' \in \mathfrak{M}_0'(\tilde{E}') = \{\mu_{|\tilde{E}'} \text{ mit } \mu \in \mathfrak{M}_0'(\tilde{E})\}$$

gilt dann nach (40)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F(\mu) &= \iint \log\left[|\tilde{\mathfrak{r}}(z, -\zeta)| / |\tilde{\mathfrak{r}}(z, \zeta)|\right] d\mu'(z)\, d\mu'(\zeta) - 2 \int \operatorname{Re}\left(i\, e^{-i\theta}\, \tilde{\mathfrak{j}}_\theta(z)\right) d\mu'(z) \\ &\geqq \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(\tilde{\mathfrak{a}}_{1,\theta} - \tilde{a}_{1,\theta})\right), \end{aligned} \tag{42}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $\mu' \equiv \tilde{\nu}_{0|\tilde{E}'}$ gilt.

Durch die Substitution $\mathfrak{z} = (z - z_1)^{1/2}$, $z_1 \in G \setminus T(q)$, erhält man aus (42) eine a priori-Abschätzung eines weiteren Funktionals. Infolge des bekannten Prozesses der Bildung der zweiblättrigen Überlagerungsfläche ist als Verallgemeinerung eines Wertannahmeproblems von H. Grötzsch der Wertebereich von $w(z_1)$ bezüglich aller $w \in \mathfrak{A}(G)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt m' und dem Radius R', wobei der Punkt $m' - R'\, e^{2i\theta}$ von einer gewissen Parabelschlitzabbildung angenommen wird, die mit der quasikonformen Parallelschlitzabbildung $\tilde{\jmath}_\theta(\mathfrak{z})$ von $\tilde{G} = (G - z_1)^{1/2}$ bezüglich $\tilde{q}(\mathfrak{z}) := q(z) = q(\mathfrak{z}^2 + z_1)$ zusammenhängt. Sei

$$\mathfrak{M}_0'(E) := \{\nu \mid \nu(e) = \mu'\big((e - z_1)^{1/2}\big),\ e \subset E,\ \mu' \in \mathfrak{M}_0'(\tilde{E}')\}.$$

Aus (42) fließt dann die

Folgerung 4: *Für alle* $\nu \in \mathfrak{M}_0'(E)$ *gilt*

$$\begin{aligned} &\iint \log\left[\left|\mathfrak{r}\left(\sqrt{z - z_1}, -\sqrt{\zeta - z_1}\right)\right| / \left|\mathfrak{r}\left(\sqrt{z - z_1}, \sqrt{\zeta - z_1}\right)\right|\right] d\nu(z)\, d\nu(\zeta) \\ &\quad - 2 \int \operatorname{Re}\left(i\, e^{-i\theta}\, \bar{\mathfrak{j}}_\theta\left(\sqrt{z - z_1}\right) d\nu(z)\right. \\ &\geqq \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(\tilde{\mathfrak{a}}_{1,\theta} - \tilde{a}_{1,\theta})\right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}\tilde{\mathfrak{a}}_{1,\theta}\right) - \frac{1}{4}\left(R' + \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(z_1 - m')\right)\right), \end{aligned} \tag{43}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $\nu \equiv \tilde{\nu}_{0|\tilde{E}'}\left(\sqrt{e - z_1}\right)$, $e \subset C$, *gilt.*

Satz 7: *Sei C_θ eine der Randkomponenten von G, die in der $\mathfrak{j}_\theta(z)$-Ebene maximale θ-Breite $L_\theta' = L_\theta(\mathfrak{j}_\theta(C_\theta))$ aufweist. Dann gilt*

$$\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})\right) \geqq h\left(L_\theta', D(C_\theta), D(T(q)), Q\right) =: h \tag{44}$$

mit

$$h = L_\theta'^2 \,/\, \left(12Q^2 + 8 \log\left[2^{Q^2} A^{1+Q^2} \cdot B^{-1} \cdot D^{1/Q} \cdot L_\theta'^{-Q^2}\right]\right)$$

und den Konstanten $A = A(D(C_\theta))$, $B = B(D(C_\theta))$, $D = D(C_\theta)$, *vgl.* (6).

Beweis: Ausgehend von der Ungleichung (41) schätzen wir die linke Seite von (41) für eine spezielle zulässige Ladung nach unten ab. Zur Bestimmung jener Ladung gehen wir in die $f(z) = u(z) + iv(z) = i\, e^{-i\theta}\, \mathfrak{j}_\theta(z)$-Ebene über. Die Projektion von $C_\theta' = f(C_\theta)$ auf die u-Achse ist ein abgeschlossenes Intervall I der Länge L_θ', das in zwei gleich lange disjunkte Intervalle I^+ und I^- zerlegt werde. Durch jeden Punkt u des Intervalles I zeichnen wir eine Parallele zur v-Achse. Dabei sei $\mathfrak{f}$ der Punkt des Durchschnittes dieser Parallelen und des Randes C_θ' mit kleinstem Imaginärteil. Wir identifizieren diesen Punkt $\mathfrak{f}$ mit u. Nach dieser Identifikation entsprechen den Intervallen I^+, I^- gewisse Punktmengen C_θ^+, C_θ^- auf $C_\theta = f^{-1}(C_\theta')$.

Nun definieren wir eine Ladung ν mit $\operatorname{supp} \nu \subset C_\theta$ folgendermaßen:

$$d\nu(z) = d\big(\nu^+(z) - \nu^-(z)\big) = \begin{cases} (2/L_\theta')\, du(z), & \text{falls } z \in C_\theta^+ \\ -(2/L_\theta')\, du(z), & \text{falls } z \in C_\theta^- \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist die Ladung ν eine auf C_θ definierte Mengenfunktion mit $\nu(C_\theta) = 0$. Daß ν von endlicher Energie ist, wird sich aus der anschließenden Abschätzung ergeben. Somit gilt $\nu \in \mathfrak{M}_0(E)$.

Aus der Doppelungleichung (6) gewinnt man die Ungleichung

$$-\log\,[z, \zeta] \leqq -Q^2 \log|f(z) - f(\zeta)| + Q^2 \log\left(AB^{-1/Q^2}\right). \tag{45}$$

In Verbindung mit (45) erhalten wir

$$(\nu^\pm, \nu^\pm) \leqq Q^2 \log (B^{-1/Q^2} A) - (4Q^2/L_\theta'^2) \int_{I^\pm} \int_{I^\pm} \log |u(z) - u(\zeta)| \, du(z) \, du(\zeta)$$

$$= \frac{3}{2} Q^2 + \log (2^{Q^2} A^{Q^2} B^{-1} L_\theta'^{-Q^2}) \tag{46}$$

und

$$(\nu^+, \nu^-) \geqq -\log \left(A(D(C_\theta))^{1/Q}\right) \tag{46'}$$

mit $A = A(D(C_\theta))$ und $B = B(D(C_\theta))$; vgl. (6). Schließlich berechnet man noch

$$\left(\int \operatorname{Re} (i\, e^{-i}\, \mathfrak{j}_\theta(z))\, d\nu(z)\right)^2 = (4/L_\theta'^2) \left(\int_{I^+} u\, du - \int_{I^-} u\, du\right)^2 = L_\theta'^2/4, \tag{47}$$

so daß aus (46), (46′) und (47) die Abschätzung (44) folgt ∎

Bemerkung 5: In (44) steht das Gleichheitszeichen für Gebiete G, die Urbild eines Parallelschlitzgebietes mit Strecken der Neigung θ zur positiven reellen Achse bezüglich $\mathfrak{j}_\theta(z)$ sind.

Aus (41), (42) und (10) fließt noch die

Folgerung 5: *Seien C_0 und $C_{\pi/2}$ zwei Randkomponenten von G mit maximaler 0-Breite $L_0' = L_0(\mathfrak{j}_0(C_0))$ bzw. $\pi/2$-Breite $L'_{\pi/2} = L_{\pi/2}(\mathfrak{j}_{\pi/2}(C_{\pi/2}))$ in der $\mathfrak{j}_0$-Ebene bzw. $\mathfrak{j}_{\pi/2}$-Ebene. Dann gilt für die positive reelle quasikonforme Spanne des Gebietes G*

$$a_{1,0} - a_{1,\pi/2} \geqq \frac{Q-1}{\pi Q} |T(q)| + h\left(L_0', D(C_0), D(T(q)), Q\right)$$
$$+ h\left(L'_{\pi/2}, D(C_{\pi/2}), D(T(q)), Q\right)$$

mit der Funktion h wie in Satz 7.

Des weiteren ergibt sich aus (42) und (43) in Verbindung mit (44) und anschließender Addition von (43) für $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$ noch die

Folgerung 6: *Sei $\tilde{C}_\theta$ eine Randkomponente von $\tilde{G} = \sqrt{G - z_1}$ mit $z_1 \in G \setminus T(q)$ mit maximaler θ-Breite $L_\theta' = L(\tilde{\mathfrak{j}}_\theta(\tilde{C}_\theta))$ in der $\tilde{\mathfrak{j}}_\theta$-Ebene. Für den Radius R' und den Mittelpunkt m' der Verschiebungskreisscheibe (= Wertebereich von $w(z_1)$, $w \in \mathfrak{A}(G)$) gilt dann*

$$R' + \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(z_1 - m')\right) \geqq 2h\left(L_\theta', D(\tilde{C}_\theta), D(\sqrt{T(q) - z_1}), Q\right)$$
$$+ \frac{Q-1}{\pi Q} \left|\sqrt{T(q) - z_1}\right|. \tag{48}$$

und

$$R' \geqq h\left(L_0', D(\tilde{C}_0), D(\sqrt{T(q) - z_1}), Q\right) + h\left(L'_{\pi/2}, D(\tilde{C}_{\pi/2}), D(\sqrt{T(q) - z_1}), Q\right)$$
$$+ \frac{Q-1}{\pi Q} \left|\sqrt{T(q) - z_1}\right| \tag{49}$$

mit der Funktion h wie in Satz 7.

Bemerkung 6: Im allgemeinen Fall ist eine explizite Darstellung der Abbildungsfunktion $\mathfrak{j}_\theta$ nicht bekannt außer in gewissen Spezialfällen, z. B. in dem Fall, wo q eine nur von $|z|$ abhängige Funktion ist, vgl. hierzu [14: S. 162] und die dort zitierte Literatur. Dieser Umstand macht eine Abschätzung von L_θ' durch L_θ wünschenswert. Das gelingt sicher für den Fall, daß

$$L_\theta > 2(Q-1)\left(|T(q)|/\pi\right)^{1/2}$$

ist. Nach einer Drehung der z-Ebene wird die $\zeta = \xi + i\eta = i\,e^{-i\theta}z$-Ebene vermittels der hydrodynamisch normierten Abbildung

$$w(\zeta) = i\,e^{-i\theta}\,\mathfrak{j}_\theta(-i\,e^{i\theta}\,\zeta) = \zeta + b_1\zeta^{-1} + \cdots$$

Q-quasikonform auf die volle w-Ebene bezogen. Diese Abbildungsfunktion $w(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ genügt nach (2) der Ungleichung

$$|u(\zeta) - \xi| \leqq |w(\zeta) - \zeta| \leqq (Q-1)\left(T(q)/\pi\right)^{1/2},$$

woraus unschwer

$$L_\theta' \geqq L_\theta - 2(Q-1)\left(T(q)/\pi\right)^{1/2} \tag{50}$$

ablesbar ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ANGER, G.: Funktionalanalytische Betrachtungen bei Differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie I. Berlin: Akademie-Verlag 1967.

[1] FABER, G.: Über Potentialtheorie und konforme Abbildung. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. (München), math.-nat. Kl. (1920), 49—64.

[3] GOLUSIN, G. N.: Geometrische Funktionstheorie einer komplexen Veränderlichen. Berlin: Akademie-Verlag 1957.

[4] GRUNSKY, H.: Die Energie einer Ladungsverteilung beim logarithmischen Potential. Deutsche Math. **3** (1938), 501—504.

[5] JENKINS, J. A.: Univalent functions and conformal mapping (Ergeb. d. Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 18). Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1958.

[6] KIRSCH, S.: Ein verallgemeinerter transfiniter Durchmesser im Zusammenhang mit einer quasikonformen Normalabbildung. In: Complex Analysis. Banach Center Publications **11** (1982), 121—129.

[7] KIRSCH, S.: Lageabschätzung für einen Kondensator minimaler Kapazität. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 119—131.

[8] KUBO, T.: Kelvin principle and some inequalities in the theory of functions (I). Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto (Ser. A) **28**, Math. 3 (1954), 299—311.

[9] KUBO, T.: Kelvin principle and some inequalities in the theory of functions (II). Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto (Ser. A) **29**, Math. 1 (1955), 17—26.

[10] KUBO, T.: Kelvin principle and some inequalities in the theory of functions (III). Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto (Ser.A) **29**, Math. 2 (1955), 119—129.

[11] KÜHNAU, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. Math. Nachr. **40** (1969), 1—11.

[12] KÜHNAU, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. Ann. Polon. Math. **31** (1975), 269—289.

[13] KÜHNAU, R.: Identitäten bei quasikonformen Normalabbildungen und eine hiermit zusammenhängende Kernfunktion. Math. Nachr. **73** (1976), 73—106.

[14] KÜHNAU, R.: Gauß-Thomsonsches Prinzip minimaler Energie, verallgemeinerte transfinite Durchmesser und quasikonforme Abbildungen. Proc. Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis. Lecture Notes Math. **743** (1979), 140—164.

[15] KÜHNAU, R.: Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien. Comm. Math. Helvetici **53** (1978), 408—428.

[16] Ландкоф, Н. С.: Основы современной теории потенциала. Москва: Изд-во Наука 1966.
[17] Lehto, O., und K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1965.
[18] Ninomiya, N.: Etude sur la théorie du potentiel pris par raport aù noyau symmétrique. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ. (Ser. A) 8 (1957), 147—179.
[19] Parter, S. V.: On mappings of multiply connected domains by solutions of partial differential equations. Comm. pure appl. Math. 13 (1960), 167—182.
[20] Tsuij, M.: Potential Theory in modern function theory. Tokyo: Maruzen 1959.

Manuskripteingang: 03. 11. 1983

VERFASSER:

Dr. Siegfried Kirsch
Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „N. K. Krupskaja“
DDR-4020 Halle, Kröllwitzer Str. 44