Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (1) (1985), S. 13–23

Eine Verallgemeinerung des Ritz-Prozesses

R. Hofmann

Es wird ein Näherungsprozeß zur Projektion eines Elementes eines Hilbertraumes auf einen endlichdimensionalen Unterraum, der lediglich implizit gegeben ist, vorgestellt. Es werden die Konvergenz untersucht und berechenbare Konvergenzmaße bereitgestellt, Bedingungen für die numerische Stabilität im Sinne von Michlin hergeleitet und eine Anwendung — die Minimierung der mittleren Spannung in einer ebenen Platte bei Variation der Randkräfte — angegeben.

Представляется метод приближения для проекции элемента гильбертова пространства на его конечномерное, лишь неявно заданное подпространство. Исследована сходимость, даны вычислимые оценки сходимости, выведены условия устойчивости в смысле Михлина и указано одно применение — минимизация среднего напряжения плоской пластины при вариации краевых сил.

An approximative process for the projection of an element of a Hilbert space on a finite-dimensional subspace is proposed where the subspace is given only in an implicit manner. Both the convergence and numerical measures of convergence are studied and any conditions are given for the process to be stable in the sens of Michlin. As an application we point out the problem to minimize the middle strain in a plate where are varied the boundary powers only.

1. Einleitung

Wir betrachten zunächst das folgende allgemeine

Problem (P): *Gegeben sei ein reeller Hilbertraum X. Ein abgeschlossener Unterraum M und ein festes Element $z \in X$ seien nicht explizit bekannt, sondern nur durch gewisse Daten eindeutig festgelegt. Gesucht ist die orthogonale Projektion $\overline{y} := Tz$ von z auf M.*

In Verallgemeinerung des Ritz-Prozesses (vgl. [8]) zur numerischen Lösung der Aufgabe

$$\|z - x\| \to \operatorname*{Min}_{x \in X},$$

die wegen der Voraussetzung der Unbestimmtheit von z nicht trivial ist, suchen wir $\overline{y}$ als Grenzelement einer Folge von Näherungen $\overline{y}^{(n)} \in X_n$, wobei die X_n eine aufsteigende Folge von n-dimensionalen Unterräumen von X bilden. Zu diesem Zwecke wird die Aufgabe zunächst präzisiert und unter Verwendung eines bekannten Approximationsschemas gelöst. Nach Aufstellung des (linearen) Gleichungssystems zur Berechnung der Näherungen und einer kurzen Diskussion der Lösbarkeit wenden wir uns Fragen der Konvergenz und Stabilität des Prozesses zu. Als Anwendung führen wir ein Problem der Minimierung der mittleren Spannung in einer ebenen Platte unter dem Einfluß von Randkräften, die entlang eines Randstückes in vorgegebener Weise variieren können, etwas näher aus.

Zunächst mögen drei Beispiele die Problemstellung (P) illustrieren.

Beispiel 1: *Berechnung der Lösung $\bar{x}$ kleinster euklidischer Norm eines unterbestimmten linearen Gleichungssystems*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad A: \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}^m, \qquad n > m, \qquad \operatorname{Rg} A = m.$$

Setzen wir hier $X := \mathrm{E}^n$, $z := -\mathbf{x}^0$, wo $\mathbf{x}^0$ eine beliebige spezielle Lösung ist, und wählen wir $M := \ker A$, dann wird das gesuchte $\bar{\mathbf{x}} \in X$ wegen

$$\|\bar{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{y}}\| = \|z - \bar{\mathbf{y}}\| \leqq \|z - \mathbf{y}\| \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in M$$

gerade durch $\bar{\mathbf{y}} = Tz$ gegeben und M ist nicht explizit gegeben.

Beispiel 2: *Das Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung in einem ebenen Gebiet.* Gesucht ist $z = z(x, y)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta z &= 0 \text{ in } \Omega \\ z &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \qquad (+)$$

Die Menge $H_\Delta(\Omega)$ von Funktionen u über Ω mit den Eigenschaften

$$1.\ \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad 2.\ \iint_\Omega \operatorname{grad}^2 u\, dx\, dy < \infty \quad \text{und} \quad 3.\ \int_{\partial\Omega} u\, ds = 0$$

bilden mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \iint_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v\, dx\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, v_n\, ds$$

einen Hilbertraum mit Kernfunktion, wenn $\partial\Omega$ stückweise glatt ist (vgl. [7]). Wählen wir $X := H_\Delta(\Omega)$ und $M := X$, dann ist $z \in X$ ein durch $(+)$ eindeutig bestimmtes, aber nicht bekanntes Element und $\bar{y} := Tz = z$. Der Ritz-Prozeß

$$\begin{aligned} &X = \overline{\operatorname{span}}\, \{x^k\}_1^\infty, \qquad X_n := \operatorname{span}\, \{x^k\}_1^n, \\ &\bar{y}^{(n)} \in X_n\colon \|z - \bar{y}^{(n)}\| = \min_{y^{(n)} \in X_n} \|z - y^{(n)}\| \end{aligned} \qquad (++)$$

ergibt hierbei gerade das Verfahren von Trefftz (vgl. [11, 6, 3], denn setzen wir $\bar{y}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} x^k$, dann genügen die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ nach $(++)$ dem Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} (x^k, x^j) = (z, x^j), \qquad j = 1(1)n,$$

und sind damit stets eindeutig bestimmt und auch berechenbar, weil wegen

$$(z, x^j) = \int_{\partial\Omega} z x_n^j\, ds = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot x_n^j\, ds$$

die rechte Seite aus den Daten der Aufgabe zu berechnen ist. Wegen der Vollständigkeit des Systems $\{x^k\}_1^\infty$ in X konvergiert $\bar{y}^{(n)}$ stark gegen z.

Das nächste Beispiel verallgemeinert die obige Aufgabe in Richtung auf (P) und leitet gleichzeitig zur präzisierten Aufgabe über.

Beispiel 3: *Potential minimaler Energie bei Variation der Randbelegung.* Sei Ω wieder ein ebenes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega = (\partial\Omega)_1 + (\partial\Omega)_2$. Unter allen Funktionen u, die Lösungen eines Dirichletproblems der Gestalt

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega,$$

$$u = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{m} d_j \varphi_j \text{ auf } \partial\Omega \; (d_j \in R \text{ beliebig})$$

$$(\varphi_j(s) = 0 \text{ auf } (\partial\Omega)_1, \text{ als stetige Funktionen auf } \partial\Omega \text{ gegeben})$$

sind, wird diejenige $\bar{u}$ gesucht, für welche

$$E(u) := \iint_{\Omega} \operatorname{grad}^2 u \, dx \, dy$$

minimal wird. Mit

$$X := H_{\Delta}(\Omega),$$

$$M := \left\{ y \in X \mid y = \sum_{j=1}^{m} d_j \varphi_j \text{ auf } \partial\Omega \right\},$$

$$z := -u_0 \qquad (\Delta u_0 = 0, \; u_0|_{\partial\Omega} = \varphi_0)$$

erhalten wir wegen

$$\|\bar{u}\| = \|u_0 + \bar{y}\| = \min_{y \in M} \|u_0 + y\| = \min_{y \in M} \|z - y\|$$

ein Problem (P).

2. Aufgabenstellung und Approximationsschema

Ein reeller Hilbertraum X sei als abgeschlossene Hülle eines linear unabhängigen „Koordinatensystems" $\{x^k\}_1^\infty$ gegeben. Für eine Basis $\{y^j\}_1^m$ eines m-dimensionalen Unterraums $M \subset X$ und ein weiteres festes Element $z \in X \setminus M$ werde lediglich die Berechenbarkeit der Skalarprodukte (x^k, y^j) und (x^k, z) vorausgesetzt. Gesucht ist die durch

$$\|z - \bar{y}\| = \min_{y \in M} \|z - y\| \tag{1}$$

oder

$$(z - \bar{y}, y) = 0 \quad \text{für alle} \quad y \in M \tag{2}$$

eindeutig bestimmte Projektion von z auf M. In dem mit (2) äquivalenten Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j (y^j, y^i) = (z, y^i), \qquad i = 1(1)m, \tag{3}$$

für $\bar{y} := \sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j y^j$ sind Koeffizientenmatrix und rechte Seite im allgemeinen nicht zu berechnen.

Es seien

$$X_n := \operatorname{span} \{x^k\}_1^n,$$

$$T: X \to M, \qquad P_n: X \to X_n, \qquad T_n: X_n \to P_n(M) =: M_n \tag{4}$$

die jeweiligen Orthoprojektoren,

$$Q_n : M_n \to M$$

eine geeignete lineare Transformation. Für das nach (3) nicht berechenbare $\bar{y} = Tz$ wollen wir sukzessive Näherungen

$$\bar{y}^{(n)} := Q_n T_n P_n z \in M \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

bestimmen. Approximationsschemata der damit vorliegenden Art

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P_n"] & M \\ X_n \arrow[r, "T_n"] & M_n \arrow[u, "Q_n"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} z \arrow[r, "T"] \arrow[dd, "P_n"] & \bar{y} \arrow[d, dash, dashed] \\ & \bar{y}^{(n)} \\ z_n \arrow[r, "T_n"] & T_n z_n \arrow[u, "Q_n"'] \end{tikzcd}$$

sind von DANIEL (1971) und AUBIN (1972) eingehend behandelt worden. Wir beziehen uns auf eine Arbeit von ANSELONE and DAVIS [1].

Satz 2.1: *Bei gegebenen $z \in X$ und $M \subset X$ gibt es immer eine natürliche Zahl n_0, so daß für alle $n > n_0$ gilt:*

a) *Es existiert genau ein $\bar{y}^{(n)} \in M$, so daß*

$$\|z_n - P_n \bar{y}^{(n)}\| \leqq \|z_n - y_n\| \quad \text{für alle} \quad y_n \in M_n,$$

d. h.

$$T_n z_n = P_n \bar{y}^{(n)} \tag{6}$$

ist.

b) *Das Element $\bar{y}^{(n)}$ wird durch das System*

$$(z - \bar{y}^{(n)}, y_n) = 0 \quad \textit{für alle} \quad y_n \in M_n \tag{7}$$

eindeutig charakterisiert.

Beweis: Für die Folge der Projektoren gilt stets $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n x\| = \|x\|$. Nach [1: Seite 66] gibt es dann zu jedem $z \in X$ ein n_0, so daß der Operator P_n auf span $\{M \cup \{z\}\}$ für $n > n_0$ eindeutig umkehrbar und P_n^{-1} beschränkt ist, wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n^{-1}\| = 1$ gilt. $T_n z_n \in M_n$ ist durch

$$\|z_n - T_n z_n\| \leqq \|z_n - y_n\| \quad \text{für alle} \quad y_n \in M_n$$

oder

$$(z_n - T_n z_n, y_n) = 0 \quad \text{für alle} \quad y_n \in M_n \tag{8}$$

eindeutig bestimmt. Demnach existiert genau ein $\bar{y}^{(n)} \in M$ der Eigenschaft (6). Mit (8) folgt dann (7), und aus (7) folgt umgekehrt

$$\left(P_n(z - \bar{y}^{(n)}), y_n\right) = (z - \bar{y}^{(n)}, P_n y_n) = 0 \quad \text{für alle} \quad y_n \in M_n,$$

also (8) ∎

Satz 2.2: *Für hinreichend große n gilt*

$$\|P_n\|^{-1} \|z - \bar{y}\| \leqq \|z_n - P_n \bar{y}^{(n)}\| \leqq \|P_n\| \|z - \bar{y}\| \leqq \|z - \bar{y}\|. \tag{9}$$

Beweis: Die rechte Ungleichung folgt unmittelbar aus (6). Auf der anderen Seite gilt nach Satz 2.1 für genügend große n

$$\|z - \bar{y}\| \leqq \|z - \bar{y}^{(n)}\| = \|P_n^{-1}(P_n z - P_n \bar{y}^{(n)})\| \leqq \|P_n^{-1}\| \, \|z_n - P_n \bar{y}^{(n)}\| \;\blacksquare$$

Satz 2.3: *Es gelten folgende zueinander äquivalente Konvergenzaussagen:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n - P_n\bar{y}^{(n)}\| = \|z - \bar{y}\|$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|z - P_n\bar{y}^{(n)}\| = \|z - \bar{y}\|$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\bar{y}^{(n)}\| = \|\bar{y}\|$.

Außerdem gelten die untereinander äquivalenten Aussagen

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \|z - \bar{y}^{(n)}\| = \|z - \bar{y}\|$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\bar{y}^{(n)} - \bar{y}\| = 0$.

Beweis: a) Das folgt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n^{-1}\| = 1$ durch Grenzübergang aus Satz 2.2. b) Es ist $(z - z_n)$ orthogonal zu $(z_n - P_n\bar{y}^{(n)})$, also gilt $\|z - z_n\|^2 + \|z_n - P_n\bar{y}^{(n)}\|^2 = \|z - P_n\bar{y}^{(n)}\|^2$ und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \|z - z_n\| = 0$ die Äquivalenz von b) und a). c) Wegen (6) ist $\|z_n\|^2 = \|P_n\bar{y}^{(n)}\|^2 + \|z_n - P_n\bar{y}^{(n)}\|^2$, woraus durch Grenzübergang mit $\|z\|^2 = \|z - \bar{y}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$ die Äquivalenz von c) und a) folgt.

d) Wir haben $\|z - \bar{y}\| \leqq \|z - \bar{y}^{(n)}\| \leqq \|P_n^{-1}\| \, \|z_n - P_n\bar{y}^{(n)}\|$, und d) folgt aus a). e) Aus der Orthogonalität von $z - \bar{y}$ und $\bar{y}^{(n)} - \bar{y}$ folgt $\|z - \bar{y}\|^2 + \|\bar{y} - \bar{y}^{(n)}\|^2 = \|z - \bar{y}^{(n)}\|^2$ und damit die Äquivalenz von d) und e) $\blacksquare$

Wir haben also gesehen, daß das Approximationsschema mit $Q_n := P_n^{-1}$ gegen $\bar{y}$ konvergiert. Zur a-posteriori-Konvergenzkontrolle steht uns nach c) die Größe

$$q_n(z) := \|P_n\bar{y}^{(n)}\|^2 = \|T_n z_n\|^2 = (z, P_n\bar{y}^{(n)}) = (z_n, \bar{y}^{(n)}) \tag{10}$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} q_n(z) = \|\bar{y}\|^2$$

zur Verfügung.

3. Berechnung von $\bar{y}^{(n)}$

Das gesuchte Element habe die Basisdarstellung $\bar{y}^{(n)} = \sum\limits_{i=1}^{m} d_i^{(n)} y^i$, woraus

$$P_n\bar{y}^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} d_i^{(n)} P_n y^i \tag{11}$$

folgt. Die Projektionen lassen sich sukzessive aus den Ritzschen Gleichungssystemen berechnen und wir haben

$$P_n z = \sum_{k=1}^{n} z_k^{(n)} x^k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^{(n)}(x^k, x^j) = (z, x^j), \qquad j = 1(1)n, \tag{12}$$

und für $i = 1(1)m$

$$P_n y^i = \sum_{k=1}^{n} y_{ik}^{(n)} x^k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{n} y_{ik}^{(n)} (x^k, x^j) = (y^i, x^j), \qquad j = 1(1)n. \tag{13}$$

Andererseits genügt $P_n \bar{y}^{(n)}$ nach Satz 2.1 dem System

$$(z_n - P_n \bar{y}^{(n)}, y^i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1(1)m,$$

was durch Einsetzen von (12) und (13) auf

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^{(n)} (x^k, y^i) = \sum_{l=1}^{m} d_l^{(n)} \sum_{k=1}^{m} y_{lk}^{(n)} (x^k, y^i), \qquad i = 1(1)m, \tag{14}$$

führt.

Nun verwenden wir folgende Bezeichnung:

$$\underline{z}^{(n)} := \big((z, x^1), \ldots, (z, x^n)\big)^T, \qquad S_{mn} := \big(((y^i, x^j))\big)_{i=1(1)m}^{j=1(1)n},$$

$$\underline{z}_n^{(n)} := (z_1^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)})^T, \qquad Y_{mn}^{(n)} := \big((y_{ij}^{(n)})\big)_{i=1(1)m}^{j=1(1)n},$$

$$\underline{d}^{(n)} := (d_1^{(n)}, \ldots, d_m^{(n)})^T, \qquad G_n := \big(((x^i, x^j))\big)_{i,j=1(1)n},$$

und schreiben die Gleichungssysteme in Matrixform

$$G_n \underline{z}_n^{(n)} = \underline{z}^{(n)}, \tag{12a}$$

$$Y_{mn}^{(n)} G_n = S_{mn}, \tag{13a}$$

$$S_{mn} \underline{z}_n^{(n)} = S_{mn} Y_{mn}^{(n)T} \underline{d}^{(n)}, \tag{14a}$$

aus denen wir $Y_{mn}^{(n)}$ und $\underline{z}_n^{(n)}$ zu eliminieren haben. G_n ist die positiv definite Gramsche Matrix des Koordinatensystems $\{x^k\}_1^n$ und wir erhalten

$$S_{mn} G_n^{-1} S_{mn}^T \, \underline{d}^{(n)} = S_{mn} G_n^{-1} \underline{z}^{(n)}, \tag{15}$$

oder abgekürzt

$$B_m^{(n)} \underline{d}^{(n)} = \underline{b}^{(n)}. \tag{15a}$$

Man kann sich leicht auch nochmals direkt davon überzeugen, daß dieses Gleichungssystem zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $d_j^{(n)}$ der Näherung $\bar{y}^{(n)}$ in Übereinstimmung mit Satz 2.1 für jedes feste z, M und n lösbar ist, indem man den Rang der Matrix $B_m^{(n)}$ mit dem der durch $\underline{b}^{(n)}$ erweiterten Matrix vergleicht. Die Lösung ist dabei sogar eindeutig bestimmt, wenn der Rang der Matrix S_{mn} gleich m und $n > m$ ist.

4. Konvergenz

Der durch (11) bis (15a) beschriebene Näherungsprozeß hat, wie wir schon ausgeführt haben, enge Verwandtschaft mit dem Ritz-Prozeß, und wir lehnen uns an die dazu von MICHLIN [8] durchgeführten Betrachtungen an, wenn wir jetzt das Konvergenz- und Stabilitätsverhalten analysieren.

Satz 4.1: *Ist das Koordinatensystem* $\{x^k\}_1^\infty \subset X$ *vollständig, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} d_j^{(n)} = \bar{d}_j, \qquad j = 1(1)m,$$

wenn $\bar{y} = \sum_{j=1}^{m} \bar{d}_j y^j$ *die Basisdarstellung von* $\bar{y}$ *ist.*

Beweis: Die Gramsche Matrix der Basis $\{y^j\}_1^m \subset M$ ist positiv definit. Es gibt also eine positive Zahl c, so daß

$$\|\bar{y}^{(n)} - \bar{y}\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} (d_i^{(n)} - \bar{d}_i)(d_j^{(n)} - \bar{d}_j)(y^i, y^j)$$

$$\geqq c \sum_{i=1}^{m} (d_i^{(n)} - \bar{d}_i)^2 \geqq 0$$

gilt. Nach Satz 2.3e) folgt die Behauptung ∎

Satz 4.2: a) *Für das mit* (10) *eingeführte Konvergenzmaß* $q_n(z) := \|P_n\bar{y}^{(n)}\|^2$ *gilt für hinreichend große* n

$$q_n(z) = \underline{d}^{(n)T} B_m^{(n)} \underline{d}^{(n)} = \underline{b}^{(n)T} B_m^{(n)-1} \underline{b}^{(n)} = \underline{d}^{(n)T} \underline{b}^{(n)}.$$

b) *Wenn die beiden Basen* $\{x^k\}_1^\infty$ *und* $\{y^j\}_1^m$ *so beschaffen sind, daß die Beziehung*

$$(x^{n+1}, x^{n+1}) - \underline{g}_{n+1}^T G_n^{-1} \underline{g}_{n+1} \geqq \underline{s}_{n+1}^T B_m^{(n)-1} \underline{s}_{n+1} \tag{16}$$

erfüllt ist, dann gilt $q_n(z) - q_{n+1}(z) \leqq 0$ *für alle* $z \in X \setminus M$. *(Dabei ist* $\underline{g}_{n+1} = \big((x^1, x^{n+1}), \ldots, (x^n, x^{n+1})\big)^T$ *und* $\underline{s}_{n+1} = \big((y^1, x^{n+1}), \ldots, (y^m, x^{n+1})\big)^T$.)

Beweis: a) folgt sofort aus der Definition in Verbindung mit (15) und (15a). Zu b) sei hier nur bemerkt, daß man nach dem Vorbild von [4] alle benötigten Größen rekursiv schreiben und daraus die Bedingung (16) für die Monotonie von $q_n(z)$ direkt ablesen kann ∎

5. Stabilität

Die in dem betrachteten Approximationsprozeß

$$S_{mn} G_n^{-1} S_{mn}^T \underline{d}^{(n)} = S_{mn} G_n^{-1} \underline{z}^{(n)} \tag{17}$$

vorkommenden Eingangsgrößen sind in der Regel durch Näherungsverfahren (z. B. Integration) aus den gegebenen Daten zu berechnen, so daß statt dessen das reale System

$$(S_{mn} + \sigma_{mn})(G_n + \Gamma_n)^{-1} (S_{mn} + \sigma_{mn})^T (\underline{d}^{(n)} + \underline{\delta}^{(n)})$$
$$= (S_{mn} + \sigma_{mn})(G_n + \Gamma_n)^{-1} (\underline{z}^{(n)} + \gamma^{(n)}) \tag{18}$$

zu lösen ist und man (exakte Rechnung angenommen) einen durch $\underline{\delta}^{(n)}$ gestörten Lösungsvektor erhält. Neben der Konvergenz interessiert deshalb vor allem die Stabilität des Prozesses gegen Störungen der Eingangsdaten.

Definition 5.1: Der Prozeß (17) heiße *stabil*, wenn es eine natürliche Zahl n_0 und positive reelle Konstanten p, q, r, s und t gibt, so daß für alle $n \geqq n_0$ unter den Voraussetzungen $\gamma^{(n)} \in \mathbf{R}^m$, $|\Gamma_n| \leqq s$ und $|\sigma_{mn}|_r \leqq t$

a) das System (18) stets eindeutig lösbar ist und

b) für den Fehlervektor eine Abschätzung

$$|\underline{\delta}^{(n)}| \leqq p\,|\Gamma_n| + q\,|\sigma_{mn}|_r + r\,|\underline{\gamma}^{(n)}| \tag{19}$$

gleichmäßig in n gilt. (Als Normen werden dabei für Vektoren die euklidische Vektornorm $|.|$, für quadratische Matrizen die zugeordnete Spektralnorm $|\cdot|$ und für die rechteckigen Matrizen S_{mn} und σ_{mn} die Norm $|A|_r := |AA^T|$ verwendet.)

Wie beim Ritz-Prozeß hängt die Stabilität von einer wichtigen zusätzlichen Eigenschaft des Koordinatensystems ab.

Definition 5.2: Das Koordinatensystem $\{x^k\}_1^\infty \subset X$ heißt *fast-orthonormiert*, wenn größter und kleinster Eigenwert seiner Gramschen Matrizen G_n gleichmäßig gemäß $0 < \lambda \leqq \lambda_{\min}^{(n)} \leqq \lambda_{\max}^{(n)} \leqq \Lambda < \infty$ beschränkt bleiben.

Als wichtigste Ergebnisse erhalten wir die folgenden Aussagen.

Satz 5.1: *Der Prozeß (17) ist stabil, wenn das Koordinatensystem fast-orthonormiert ist.*

Beweis: Der Beweis verlangt recht umfangreiche Rechnungen und Abschätzungen, verläuft aber im Grunde elementar. Aus Platzgründen werden wir deshalb nur die sich dabei aus den Eingangsdaten ergebenden Konstanten angeben:

a) Mit $0 < \alpha < 1$ sei $s' := \lambda\alpha$.

b) Mit $0 < \beta < 1$ seien s'' und t so gewählt, daß

$$(\lambda^{-1}\,|\Gamma_n|\,|S_{mn}|_r^2 + 2\,|S_{mn}|_r\,|\sigma_{mn}|_r + |\sigma_{mn}|_r^2) \leqq \beta\mu\lambda(1-\alpha)$$

für $|\Gamma_n| \leqq s''$ und $|\sigma_{mn}|_r \leqq t$ wird, wobei μ eine untere Grenze für den kleinsten Eigenwert der Matrizen $B_m^{(n)}$ ist.

c) Wir setzen dann $s := \min(s', s'')$.

d) Dann gilt die Stabilitätsabschätzung (19) mit

$$p := \frac{\Lambda\eta\,\|z\|}{\mu^{3/2}\lambda^2(1-\alpha)(1-\beta)}(\eta + \|z\|),$$

$$q := \frac{\Lambda^{1/2}}{\mu\lambda(1-\alpha)(1-\beta)}(\|z\| + 2\eta + t\Lambda^{-1/2}) \qquad \text{und}$$

$$r := \frac{\Lambda^{1/2}}{\mu\lambda(1-\alpha)(1-\beta)}(\eta + t\Lambda^{-1/2}),$$

wobei $\eta := \left(\sum_{i=1}^{m} \|y^i\|^2\right)^{1/2}$ gesetzt wurde ∎

Satz 5.2: *Die Konditionszahlen $K_n(B_m^{(n)}) := |B_m^{(n)}|\,|B_m^{(n)-1}|$ der exakten Systemmatrizen von (17) bleiben längs der Folge für $n > n_0$ gleichmäßig durch die Konstante $K := \varkappa^{-1}\lambda^{-1}\Lambda^2\eta^2$ beschränkt, wenn $\varkappa$ die untere Grenze der Eigenwerte von $\{S_{mn}S_{mn}^T\}$ ist.*

6. Zur Berechenbarkeit

Zunächst ist leicht zu sehen, daß sich unter den im Abschnitt 2 gemachten Voraussetzungen alle Daten der Systeme (17) (d. h. (15a)) berechnen lassen. Im Abschnitt 3 haben wir gesehen, daß sich dann der Koeffizientenvektor $\underline{d}^{(n)}$ von $\bar{y}^{(n)}$ (für hinreichend große n immer eindeutig) berechnen läßt. Für die Konvergenz und Stabilität wurde an einigen Stellen die Tatsache verwendet, daß es sich bei dem System $\{y^j\}$, das aber nur durch gewisse Daten gegeben ist, um eine Basis handelt. Wie man sich etwa am nachfolgenden Beispiel verdeutlichen kann, ist der Nachweis der linearen Unabhängigkeit a-priori meist nicht möglich (im Beispiel hängt sie in komplizierter Weise von der Geometrie des Gebietes und den gegebenen Daten über y^j längs $\partial\Omega$ ab) und wird erst mit den Berechnungen deutlich.

Als eine mögliche Realisierung der Voraussetzung für den Näherungsprozeß haben wir in Analogie zur Situation, bei welcher der Ritz-Prozeß auf ein Trefftz-Verfahren führt, folgendes im Auge:

Ω sei ein Gebiet des $\mathbf{R}^N$ mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$. X sei ein Funktionenraum über Ω, dessen Skalarprodukt als *Randintegral* über $\partial\Omega$ geschrieben werden kann. Sind dann die Funktionen $\{x^k\} \subset X$ explizit gegeben und für die Funktionen z bzw. y^j diejenigen Randwerte bekannt, die man zur Berechnung dieser Randintegrale noch benötigt, dann sind alle Voraussetzungen erfüllt. Bekannte Hilberträume dieses Typs sind Lösungsräume von elliptischen Differentialgleichungen oder etwa der Szegö-Raum von in Ω ($N = 2$) analytischen Funktionen (man vergleiche hierzu [7] und [2]).

7. Ein Anwendungsbeispiel

Eine dünne Platte mit dem konvexen polygonalen Grundgebiet Ω werde durch senkrecht zu den Polygonseiten in der Plattenebene wirkende Kräfte der linearen Dichte

$$\underline{k}^0(\sigma) = \left(k_1{}^0(\sigma), k_2{}^0(\sigma)\right)$$

belastet. Längs einer Polygonseite werde eine Linearkombination von $m \geqq 1$ technisch realisierbaren tangentiellen Kräften mit den Dichten $\underline{k}^j(\sigma) = \left(k_1{}^j(\sigma), k_2{}^j(\sigma)\right)$ überlagert, wobei die resultierende Gesamtkraft und das Gesamtdrehmoment auf die Platte Null seien. Gesucht sind reelle Parameter $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_m$, so daß

$$\bar{S}(\Omega) := \iint\limits_{\Omega} (\sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2)\, dx\, dy$$

als „mittlere Spannung" in der Platte unter allen durch Randkräfte mit der Dichte

$$\underline{k}(\sigma) := \underline{k}^0(\sigma) + \sum_{j=1}^{m} d_j \underline{k}^j(\sigma)$$

erzeugten den kleinsten Wert annimmt.

Der Spannungszustand wird bei unterkritischer Belastung $\underline{k}$ durch die Airysche Spannungsfunktion $F = F(x, y)$ vermöge

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad -\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

beschrieben, die im wesentlichen eindeutig als Lösung der folgenden Randwertaufgabe durch die Randkräfte bestimmt wird:

Mit einem festen Punkt $P_0 \in \partial\Omega$ seien

$$K_i(s) := \int\limits_{P_0}^{P(s)} k_i(\sigma)\, d\sigma, \qquad i = 1, 2,$$

die Komponenten der resultierenden Kraft auf $\widehat{P_0 P}(s)$. Setzt man dann

$$\varphi'(s) := K_1(s) \cdot dy/ds - K_2(s) \cdot dx/ds \qquad \text{und}$$
$$\psi(s) := K_1(s) \cdot dx/ds + K_2(s) \cdot dy/ds,$$

so gilt

$$\Delta^2 F = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

$$F = \varphi(s), \quad \partial F/\partial n = -\psi(s) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \tag{20}$$

(Zur Herleitung vergleiche man etwa [5] oder [9].)

In [2] wurde der folgende Raum X aller Funktionen $F = F(x, y)$ über Ω mit den Eigenschaften

1. $\Delta^2 F = 0$ in Ω,
2. $\|F\|^2 := \iint\limits_{\Omega} (F_{xx}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{yy}^2)\, dx\, dy < \infty$,
3. $\int\limits_{\partial\Omega} F\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} xF\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} yF\, ds = 0$

studiert und gezeigt, daß es sich unter der Voraussetzung eines stückweise glatten Randes $\partial\Omega$ um einen Hilbertraum mit Kernfunktion handelt, dessen Skalarprodukt *als Randintegral*

$$(F, G) := \int\limits_{\partial\Omega} \big(F_{xn} G_x + F_{yn} Gy - (\Delta F)_n\, G\big)\, ds \tag{21}$$

berechnet werden kann. Da die mittlere Spannung gerade durch $\bar{S}(\Omega) = \|F\|^2$ gegeben wird, können wir das gestellte Problem auf die für die Anwendung des Näherungsprozesses vorausgesetzte Form bringen: Wir wählen den eben beschriebenen Hilbertraum X. Die „Grundbelastung" $\underline{k}^0(\sigma)$ erzeugt mit (20) ein festes Element $-z := F_0(x, y) \in X$, die „Steuerbelastungen" $\underline{k}^j(\sigma)$ führen auf Funktionen $y^j \in X$, und wir betrachten $M := \operatorname{span} \{y^j\}_1{}^m$. Da die Zuordnung $\underline{k}(\sigma) \to (\varphi(s), \psi(s)) \to F \in X$ linear ist, lautet unsere Aufgabe nun

$$\|z - \bar{y}\|^2 = \min_{y \in M} \|z - y\|^2,$$

mit

$$y = \sum_{j=1}^{m} d_j y^j \quad \text{und} \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^{m} \bar{d}_j y^j. \tag{22}$$

Die für den Näherungsprozeß (15) benötigten Skalarprodukte (z, x^k) und (y^j, x^k) lassen sich mit (21) berechnen, wenn wir dort die Funktionen z bzw. y^j für G einsetzen und uns ein Koordinatensystem $\{x^k\}_1{}^\infty \subset X$ zur Verfügung steht, für dessen Elemente sich die Ableitungen x_{xn}^k, x_{yn}^k und $(\Delta x^k)_n$ längs $\partial\Omega$ berechnen lassen. (Der untere Index „n" bezeichnet in diesem Abschnitt stets die Ableitung nach der äußeren Normalen von $\partial\Omega$.) Eine solche Basis von X kann man aber aus der Familie

$$\{\operatorname{Re}(zz^k), \operatorname{Im}(zz^k), \operatorname{Re}(\bar{z}z^k), \operatorname{Im}(\bar{z}z^k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{1, x, y\}$$

(hier ist $z := x + iy$) gewinnen. In einer Diplomarbeit [10] wurde das Verfahren, das sich hinsichtlich der Berechnung der Matrizen und rechten Seiten rekursiv bezüglich n gestalten läßt, für die hier gestellte Aufgabe in allen Einzelheiten ausgearbeitet, programmiert und für eine rechteckige Platte durchgerechnet. Für praktische Zwecke ist bemerkenswert, daß wegen der Universalität des Koordinatensystems (Unabhängigkeit von Ω) ganz beliebige Platten mit konvex-polygonalem Grundgebiet mit demselben Programm gerechnet werden können und nur die Koordinaten der Eckpunkte und die Kräfteparameter von Fall zu Fall neu eingegeben werden müssen.

LITERATUR

[1] ANSELONE, P. M., and J. DAVIS: Perturbations of Best Approximation Problems. Numer. Math. 21 (1973), 63–69.
[2] BERGMAN, S., and M. SCHIFFER: Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. New York: Academic Press 1953.
[3] COLLATZ, L.: The Numerical Treatment of Differential Equations. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1960.
[4] HOFMANN, R.: Das Näherungsverfahren von Trefftz — Seine Anwendung auf das Parameterproblem der Schwarz-Christoffelschen Formel und die Torsion prismatischer Stäbe. Wiss. Z. Karl-Marx-Universität Leipzig, Math.-Naturwiss. Reihe 20 (1971), 329–347.
[5] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHITZ: Elastizitätstheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1970.
[6] MAURIN, K.: Bemerkungen über die Methoden von Trefftz und Ritz. Bull. Acad. Pol. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 3 (1955), 573–577.
[7] MESCHKOWSKI, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktionen. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1969.
[8] MICHLIN, S. G.: Numerische Realisierung von Variationsmethoden. Berlin: Akademie-Verlag 1969.
[9] NADAI, A.: Die elastische Platte. Berlin: Springer-Verlag 1925.
[10] RUPP, C.: Ein Verfahren zur Minimierung der mittleren Spannung in einer polygonalen Platte. Diplomarbeit. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1980.
[11] TREFFTZ, E.: Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren. Math. Ann. 100 (1928), 503–521.

Manuskripteingang: 20. 04. 1983; in revidierter Fassung: 08. 02. 1984

VERFASSER:

Doz. Dr. REINHARD HOFMANN
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10