Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (1) (1985), S. 39–53

Lorentz-Folgenräume mit logarithmischem Gewicht

G. BAUMBACH

Es werden mit einem „logarithmischen" Gewicht versehene Lorentz-Folgenräume betrachtet, die sich zum Beispiel zur Behandlung von Folgen mit einem asymptotischen Verhalten wie

$$n^\alpha(\log n)^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ reell}, \alpha < 0)$$

eignen. Das Hauptresultat ist ein Theorem über reelle Interpolation. Daneben werden wichtige Eigenschaften, die denen der üblichen Lorentz-Folgenräume entsprechen, zusammengestellt. Am Schluß wird ein Ausblick auf den möglichen Übertrag auf Funktionenräume gegeben.

В работе рассматриваются пространства последовательностей типа Лоренца с „логарифмическим" весом. Они используются при исследовании последовательностей с асимптотическим поведением типа

$$n^\alpha(\log n)^\beta \quad (\alpha, \beta, \text{ вещественные}, \alpha < 0).$$

Главным результатом является теорема об интерполяции. Кроме того составляются важные свойства этих пространств, которые соответствуют тем обычных пространств последовательностей типа Лоренца. В конце работы обсуждается подход к пространствам функций с аналогичными свойствами.

The paper deals with sequence spaces of Lorentz type equipped with a "logarithmic" weight. They may be used for the investigation of sequences behaving asymptotically like

$$n^\alpha(\log n)^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ real}, \alpha < 0).$$

The main result is one about real interpolation. Besides, important properties of these spaces corresponding to those of Lorentz sequence spaces are summarised. A prospect of similar function spaces is given.

0. Einführung und Bezeichnungen

Bezeichnen wir mit f_n die Menge der Folgen mit höchstens n von 0 verschiedenen Koordinaten, so werden durch

$$\alpha_n(x) := \inf \{\|x - y \mid l_\infty\| : y \in f_{n-1}\} \tag{1}$$

die *Approximationszahlen* einer Folge $x \in l_\infty$ definiert. Für Nullfolgen ist $(\alpha_n(x))$ genau die monoton fallende Umordnung der Koordinatenbeträge (siehe [16]).

Die klassischen *Lorentz-Folgenräume* $l_{p,q}$, $(0 < p < \infty, 0 < q \leqq \infty)$ bestehen aus allen Folgen $x \in l_\infty$, für die gilt

$$\|x \mid l_{p,q}\| := \left\| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \alpha_n(x) \,\middle|\, l_q \right\| < \infty.$$

Seit den 70er Jahren werden verstärkt Folgenräume untersucht, bei denen in obiger Definition die Potenz $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ durch eine beliebige positive (in der Regel jedoch monoton fallende) Gewichtsfolge $\pi_n^{1/q}$ ersetzt wurde. Grundlegende Ergebnisse dazu finden sich bereits in der Monografie [11], in den Arbeiten [1] und [18] wurden Dualitätsbetrachtungen durchgeführt, in [19] untersuchte man Interpolationseigenschaften und in [2] sind Bedingungen für die gleichmäßige Konvexität solcher Räume angegeben. Besonders für den Fall der in [4] erstmalig eingeführten regulären Folgen π_n mit

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_k \sim n\pi_n \tag{2}$$

liegen umfangreiche Resultate vor.

Die lexikografisch geordnete Skala der klassischen Lorentz-Folgenräume eignet sich unter anderem sehr gut für die Klassifizierung von Eigenwertverteilungen kompakter Operatoren (siehe z. B. [17]) oder der s-Zahlen von Einbettungsoperatoren (siehe z. B. [8, 16]). In einigen Grenzfällen (siehe [8, 9, 12, 14, 20]) erscheinen dort nun Folgen mit einem asymptotischen Verhalten wie

$$n^\alpha(\log n)^\beta, \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ reell}, \quad \alpha < 0.$$

Dies macht die Behandlung solcher Lorentz-Folgenräume, deren Struktur den logarithmischen Termen angepaßt ist, notwendig. Im Mittelpunkt des Interesses standen dabei die Lagebeziehungen solcher Räume untereinander und die Charakterisierung ihrer Interpolationsräume. Insbesondere für die Interpolation erwies es sich als wichtig, die Darstellung der Gewichtsfolge als Produkt einer Potenz und eines logarithmischen Anteils vorauszusetzen, da sich diese Faktoren in unterschiedlicher Weise interpolieren. Naturgemäß konnte man sich bei allen Untersuchungen auf Standardmethoden etwa aus [3, 10, 16, 21] stützen.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{R}$ die Mengen der natürlichen, ganzen bzw. reellen Zahlen. Erfüllen zwei positive reellwertige Funktionen F und G von Parametern $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ mit einer Konstanten $C = C(x_{m+1}, \ldots, x_n) > 0$ die Ungleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n) \leqq CG(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{für alle} \quad x_1 \in M_1, \ldots, x_m \in M_m,$$

so werden wir dafür kurz schreiben: *unabhängig von* $x_1 \in M_1, \ldots, x_m \in M_m$ *gilt*

$$F(x_1, \ldots, x_n) \prec G(x_1, \ldots, x_n).$$

Falls ebenfalls eine analoge Ungleichung mit vertauschten F und G richtig ist, schreiben wir: *unabhängig von* $x_1 \in M_1, \ldots, x_m \in M_m$ *gilt*

$$F(x_1, \ldots, x_n) \sim G(x_1, \ldots, x_n).$$

Schließlich werden wir immer dann die Mengen M_i weglassen, wenn offensichtlich ist, wo x_i variiert. Für zwei vollständige quasinormierte Räume E_1 und E_2 bringt die Schreibweise „$E_1 \hookrightarrow E_2$" zum Ausdruck, daß neben der Inklusion $E_1 \subset E_2$ (und in den von uns betrachteten Fällen als Folgerung daraus) für die dazugehörigen Quasinormen $\|\cdot \mid E_1\|$ und $\|\cdot \mid E_2\|$ unabhängig von $x \in E_1$ stets $\|x \mid E_2\| \prec \|x \mid E_1\|$ gilt; $E_1 \underset{\neq}{\hookrightarrow} E_2$ gibt die zusätzliche Information, daß die Inklusion echt ist. Entsprechend bedeutet $E_1 = E_2$ stets die Übereinstimmung der Räume bei Äquivalenz ihrer Quasinormen.

1. Quasilogarithmische Funktionen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit solchen modifizierten Lorentz-Folgenräumen, deren Gewichtsfolge $\pi_n^{1/q}$ die Eigenschaft besitzt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \pi_k}{n\pi_n}$$

existiert und von 0 verschieden ist.

Dies sind also spezielle reguläre (vgl. (2)) Folgen, die hier jedoch nicht monoton fallend zu sein brauchen. Wie in [6] bewiesen wurde, lassen sich alle derartigen Folgen charakterisieren durch eine Darstellung als

$$\pi_n = Cn^\alpha w(n),$$

wobei C eine positive Konstante, $\alpha > -1$ und w eine Funktion ist, die wir quasilogarithmisch nennen wollen.

Definition 1.1: Eine Funktion $w: [1, \infty) \to (0, \infty)$ mit $w(1) = 1$ heißt *quasilogarithmisch*, wenn für sie gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(at)}{w(t)} = 1 \quad \text{für alle } a > 0. \tag{3}$$

Diese Funktionenklasse wurde bereits in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts im Zusammenhang mit Tauberschen Sätzen bei der Laplace-Transformation eingeführt und dort „schwach steigende, fallende oder oszillierende Funktionen“ genannt (siehe [6, 7]). Für jedes $\varepsilon \neq 0$ gilt nämlich (siehe [6])

$$\lim_{t\to\infty} t^\varepsilon w(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \varepsilon < 0 \\ \infty & \text{für } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Weiterhin erkennt man sofort, daß Produkte und Quotienten quasilogarithmischer Funktionen sowie beliebige Potenzen von ihnen ebenfalls quasilogarithmisch sind.

Für die später verwendeten diskreten Methoden benötigen wir das folgende Kriterium.

Satz 1.2: *Eine Funktion $w: [1, \infty) \to (0, \infty)$ mit $w(1) = 1$ ist genau dann quasilogarithmisch, wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:*

(i) *mit einem $a_0 > 1$ (im folgenden stets $a_0 = 2$) ist*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{w(a_0^{k+1})}{w(a_0^k)} = 1; \tag{4}$$

(ii) *unabhängig von $k = 0, 1, 2, \dots$ und t mit $a_0^k \leq t < a_0^{k+1}$ gilt*

$$w(t) \sim w(a_0^k). \tag{5}$$

Beweis: Zum Beweis der Hinlänglichkeit überlegt man sich zunächst, daß in beiden Bedingungen das spezielle $a_0 > 1$ durch ein beliebiges $a > 1$ ersetzt werden kann, wobei die Konstanten in (5) natürlich von a abhängen. Für vorgegebenes $a > 1$ sei nun $t_n \to \infty$ (man kann $t_n > 1$ annehmen) und $k_n \in \mathbf{N}$ derart gewählt, daß gilt $a^{k_n} \leqq t_n < a^{k_n+1}$. Dann ergibt sich sofort unabhängig von $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{w(at_n)}{w(t_n)} \sim \frac{w(a^{k_n+1})}{w(a^{k_n})} \to 1.$$

Bei $0 < a < 1$ substituiert man at.

Die Notwendigkeit von (4) ist klar, zum Nachweis der von (5) benötigt man jedoch die in [6] bewiesene Tatsache, daß die Konvergenz (3) bezüglich $0 < a_1 \leqq a \leqq a_2 < \infty$ gleichmäßig ist ∎

Eine Folge (a_k) positiver reeller Zahlen, beginnend mit $a_0 = 1$, heißt *quasigeometrisch*, wenn es Konstanten a und b gibt, so daß

$$1 < a \leqq \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqq b < \infty \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \text{ gilt.}$$

Für jede quasigeometrische Folge (a_k) ist die Folge $\big(a_k w(2^k)\big)$ quasigeometrisch mit Ausnahme einer endlichen Indexmenge. Dieser Sachverhalt führt unmittelbar zum wichtigen

Satz 1.3: *Für jedes $\alpha < 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k} w(2^k)$ und es gilt unabhängig von $m \in \mathbf{N}$*

$$2^{\alpha m} w(2^m) \sim \sum_{k=m}^{\infty} 2^{\alpha k} w(2^k) \tag{6}$$

und

$$2^{-\alpha m} w(2^m) \sim \sum_{k=0}^{m} 2^{-\alpha k} w(2^k). \tag{7}$$

Ergänzend bemerken wir, daß die Folge $2^{\alpha k} w(2^k)$, $\alpha \neq 0$, stets für $k \geqq k_\alpha$ monoton ist (vgl. (4)). Die angegebenen Eigenschaften zeigen, daß quasilogarithmische Funktionen viele charakteristische Eigenschaften von

$$w(t) = [\log_2 (t + 1)]^\beta, \quad \beta \in \mathbf{R},$$

besitzen, sie müssen jedoch im allgemeinen keineswegs monoton sein, wie das folgende Beispiel demonstriert:

Zu jedem $m \in \mathbf{N}$ wählen wir $h_m \in \mathbf{N}$, $h_1 = 0$, derart, daß für alle $k \geqq h_m$ die Ungleichung $\left(\frac{m}{m+1}\right)^k \leqq m^{-2}$ besteht. Setzen wir nun $k_m := \sum_{j=1}^{m} 2h_j$ für $m = 1, 2, \ldots$ und

$$a_k := \begin{cases} m\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{k-k_m} & \text{für} \quad k_m \leqq k < k_m + h_m \\[2ex] m\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{k_{m+1}-k} & \text{für} \quad k_m + h_m \leqq k < k_{m+1}, \end{cases}$$

so erhalten wir durch den Ansatz $w(2^k) := a_k$ und geeignete Definition von w auf den Intervallen $[2^k, 2^{k+1})$ (vgl. (5)) eine quasilogarithmische Funktion, für die $w(2^{k_m}) = m$, aber $w(2^{k_m+h_m}) \leqq m^{-1}$ ist.

2. Definition der Räume und technische Hilfsmittel

Es seien im folgenden stets $0 < p < \infty$, $0 < q \leqq \infty$ und w irgendeine quasilogarithmische Funktion, die von p, q abhängen kann, wenn dies nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß diese Abhängigkeit mit von p, q unabhängigem w die Gestalt

$$w_{p,q} =: w^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{8}$$

besitzt. Die gleichen Vereinbarungen treffen wir, falls p, q oder w mit einem Index versehen sind. Unter Verwendung von (1) kommen wir nun zu folgender

Definition 2.1: Der Raum $l_{p,q}(w)$ besteht aus allen Folgen $x \in l_\infty$, für die gilt

$$\|x \mid l_{p,q}(w)\| := \left\| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w(n)\, \alpha_n(x) \mid l_q \right\| < \infty.$$

Auf diese Weise erhalten wir vollständige quasinormierte Räume. Man bemerkt sofort, daß für $\underline{\lim}\, w(n) > 0$, $\overline{\lim}\, w(n) < \infty$ die wohlbekannten Lorentz-Folgenräume mit äquivalenten Quasinormen entstehen. Die nun folgenden Aussagen stellen neben den bereits angegebenen Eigenschaften quasilogarithmischer Funktionen die wichtigsten Hilfsmittel bei der Untersuchung von $l_{p,q}(w)$ dar.

Lemma 2.2: *Durch den Ansatz*

$$|||x \mid l_{p,q}(w)||| := \left\| 2^{\frac{k}{p}} w(2^k)\, \alpha_{2^k}(x) \mid l_q \right\|,$$

wobei $k = 0, 1, 2, \ldots$ zu setzen ist, wird eine äquivalente Quasinorm auf $l_{p,q}(w)$ definiert.

Beweis: Wir setzen $\Delta_k := [2^k, 2^{k+1})$ und erhalten sofort unabhängig von $x \in l_{p,q}(w)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $n \in \Delta_k$ (vgl. (5))

$$2^{(k+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} w(2^{k+1})\, \alpha_{2^{k+1}}(x) \prec n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w(n)\, \alpha_n(x) \prec 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} w(2^k)\, \alpha_{2^k}(x).$$

Daraus ergibt sich für $q < \infty$, unabhängig von x und k, daß

$$\left[2^{\frac{k+1}{p}} w(2^{k+1})\, \alpha_{2^{k+1}}(x)\right]^q \prec \sum_{n \in \Delta_k} \left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w(n)\, \alpha_n(x)\right]^q \prec \left[2^{\frac{k}{p}} w(2^k)\, \alpha_{2^k}(x)\right]^q,$$

ist, und durch Summieren über k folgt die Behauptung. Der Fall $q = \infty$ wird analog behandelt ∎

Später erweist es sich als günstig, statt der Folge $(\alpha_n(x))$ selbst die gemittelten Folgen

$$\alpha_n^{(r)} := \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)^r\right)^{\frac{1}{r}}, \quad 0 < r < \infty,$$

zu verwenden.

Lemma 2.3: *Für jedes r, $0 < r < \min(p, q)$, liefert der Ausdruck*

$$\|x \mid l_{p,q}(w)\|_r := \left\| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w(n)\, \alpha_n^{(r)}(x) \mid l_q \right\|$$

eine äquivalente Quasinorm auf $l_{p,q}(w)$.

Beweis: Eine Abschätzung folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $\alpha_n(x) \leqq \alpha_n^{(r)}(x)$ ist. Setzen wir andererseits $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{q}$ und fixieren ein t mit $r < t < p$, so folgt für $q < \infty$

$$\alpha_n^{(r)}(x) \leqq n^{-\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{t}\right)s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[j^{\frac{1}{t}-\frac{1}{q}} \alpha_j(x)\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq n^{-\frac{1}{t}} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{\frac{q}{t}-1} \alpha_j(x)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

und Vertauschen der Summationsreihenfolge führt unabhängig von $x \in l_{p,q}(w)$ zu (vgl. (6))

$$\left\| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w(n)\, \alpha_n^{(r)} \,\middle|\, l_q \right\|$$
$$\leqq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-\frac{q}{t}-1} w(n)^q \right) j^{\frac{q}{t}-1} \alpha_j(x)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \prec \|x \mid l_{p,q}(w)\|.$$

Damit haben wir das gewünschte Resultat. Der Fall $q = \infty$ wird analog behandelt ∎

Schließlich beweist man mit den Methoden der Lemmata 2.2 und 2.3 leicht das

Lemma 2.4: *Für jedes r, $0 < r < \min(p, q)$, wird durch den Ansatz*

$$|||x \mid l_{p,q}(w)|||_r := \left\| 2^{\frac{k}{p}} w(2^k)\, \alpha_{2^k}^{(r)}(x) \,\middle|\, l_q \right\|,$$

wobei $k = 0, 1, 2, \ldots$ zu setzen ist, eine äquivalente Quasinorm auf $l_{p,q}(w)$ definiert.

3. Inklusionen

Betrachten wir die Lage der Räume $l_{p,q}(w)$ für verschiedene Parameter p, q und quasilogarithmische Funktionen w zueinander, so stellen wir zunächst fest, daß diese unabhängig von Veränderungen bei q und w wachsen, sobald der Parameter p wächst.

Satz 3.1: *Es sei $p_0 < p_1$. Dann gilt mit beliebigen q_0, q_1, w_0, w_1*

$$l_{p_0,q_0}(w_0) \underset{\neq}{\hookrightarrow} l_{p_1,q_1}(w_1).$$

Beweis: Die elementare, von $x \in l_{p_0,q_0}(w_0)$ und $m \in \mathbf{N}$ unabhängige Abschätzung (vgl. (7))

$$\|x \mid l_{p_0,q_0}(w_0)\| \geqq \left\{ \sum_{n=1}^{m} \left[n^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}} w_0(n)\, \alpha_n(x) \right]^{q_0} \right\}^{\frac{1}{q_0}} \succ m^{\frac{1}{p_0}} w_0(m)\, \alpha_m(x)$$

liefert sofort

$$l_{p_0,q_0}(w_0) \hookrightarrow l_{p_0,\infty}(w_0). \tag{9}$$

Nun ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Tatsache, daß $\frac{w_1}{w_0}$ ebenfalls quasilogarithmisch ist; es gilt unabhängig von $x \in l_{p_0,q_0}(w_0)$

$$\|x \mid l_{p_1,q_1}(w_1)\| \leqq \|x \mid l_{p_0,\infty}(w_0)\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_1}} \frac{w_1(n)}{w_0(n)} \right]^{q_1} \right\}^{\frac{1}{q_1}}$$
$$\prec \|x \mid l_{p_0,q_0}(w_0)\| \;∎$$

Als einfaches Beispiel einer Folge aus $l_{p_1,q_1}(w_1)$, die nicht zu $l_{p_0,q_0}(w_0)$ gehört, geben wir $\left(n^{-\frac{1}{2p_1}-\frac{1}{2p_0}}\right)$ an.

Bevor wir uns der Situation mit fixiertem Parameter p und gleichzeitigem Wechsel von q und w zuwenden, konstruieren wir zwei Gegenbeispiele.

Beispiel 3.2: *Gegeben seien w_0 und w_1 mit $\overline{\lim}\, \frac{w_1(n)}{w_0(n)} = \infty$. Dann gibt es eine Folge x, die für alle q_0 zu $l_{p,q_0}(w_0)$, aber für kein q_1 zu $l_{p,q_1}(w_1)$ gehört.*

Beweis: Es existieren nach Voraussetzung $n_k \in \mathrm{N}$ mit $n_0 = 0$ und

$$\frac{w_1(2^{n_k})}{w_0(2^{n_k})} \geqq 2^k \frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Setzen wir

$$\eta_k := 2^{-\frac{n_k}{2p}} w_1(2^{n_k})^{-1} \frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)},$$

so kann (n_k) derart gewählt werden, daß (η_k) monoton fällt. Daher ist die Folge $x = (\xi_n)$, definiert durch

$$\xi_n := \eta_k n^{-\frac{1}{2p}} \quad \text{für} \quad n \in \Delta_k := [2^{n_{k-1}}, 2^{n_k}),$$

ebenfalls monoton und es gilt für $q_0 < \infty$, unabhängig von $k \in \mathrm{N}$, daß

$$\sum_{n \in \Delta_k} \left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w_0(n)\, \alpha_n(x)\right]^{q_0} \sim \sum_{j=n_{k-1}}^{n_k-1} \left[2^{\frac{j}{p}} w_0(2^j)\ \xi_{2^j}\right]^{q_0}$$

$$\leqq \eta_k^{q_0} \sum_{j=0}^{n_k} \left[2^{\frac{j}{2p}} w_0(2^j)\right]^{q_0} \sim \left[\eta_k^{\frac{n_k}{2p}} w_0(2^{n_k})\right]^{q_0} \leqq 2^{-kq_0}$$

ist. Daraus ergibt sich sofort

$$\|x \mid l_{p,q_0}(w_0)\|^{q_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in \Delta_k} \left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}} w_0(n)\, \alpha_n(x)\right]^{q_0}\right) < \infty .$$

Für $q_0 = \infty$ folgt dies aus (9). Andererseits erhalten wir für $q_1 < \infty$, unabhängig von $k \in \mathrm{N}$, daß

$$\sum_{n \in \Delta_k} \left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}} w_1(n)\, \alpha_n(x)\right]^{q_1} \sim \sum_{j=n_{k-1}}^{n_k-1} \left[2^{\frac{j}{p}} w_1(2^j)\ \xi_{2^j}\right]^{q_1}$$

$$= \eta_k^{q_1} \sum_{j=n_{k-1}}^{n_k-1} \left[2^{\frac{j}{2p}} w_1(2^j)\right]^{q_1} \succ \left[\eta_k 2^{\frac{n_k}{2p}} w_1(2^{n_k})\right]^{q_1} = \left[\frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}\right]^{q_1}$$

bzw. für $q_1 = \infty$, daß

$$2^{\frac{n_k}{p}} w_1(2^{n_k})\, \alpha_{2^{n_k}}(x) = \frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}$$

ist. Nach Voraussetzung ist $\dfrac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}$ aber unbeschränkt. ∎

Beispiel 3.3: *Gegeben seien w_0 und w_1 mit $\underline{\lim} \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} < \infty$. Dann gibt es zu jedem $q_0 < \infty$ eine Folge x_{q_0}, die nicht zu $l_{p_0,q_0}(w_0)$, aber für alle $q_1 > q_0$ zu $l_{p_1,q_1}(w_1)$ gehört.*

Beweis: Es existieren eine Konstante $C > 0$ und $n_k \in \mathrm{N}$ mit $n_0 = 0$ und $w_1(2^{n_k})/w_0(2^{n_k}) \leqq C$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ Setzen wir $\eta_k := 2^{-\frac{n_k}{2p}} w_1(2^{n_k})\, k^{-\frac{1}{q_0}}$, so kann wieder (n_k) derart gewählt werden, daß (η_k) monoton fällt. Daher ist die Folge $x_{q_0} = (\xi_n^{(q_0)})$, definiert durch

$$\xi_n^{(q_0)} := \eta_k n^{-\frac{1}{2p}} \quad \text{für} \quad n \in \Delta_k := [2^{n_{k-1}}, 2^{n_k}),$$

ebenfalls monoton, und es gilt unabhängig von $k \in \mathbf{N}$

$$\sum_{n\in\Delta_k}\left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}w_0(n)\,\alpha_n(x_{q_0})\right]^{q_0} \succ k^{-1}$$

sowie für $q_1 < \infty$

$$\sum_{n\in\Delta_k}\left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}w_1(n)\,\alpha_n(x_{q_0})\right]^{q_1} \prec k^{-\frac{q_1}{q_0}}.$$

Wir schließen nun weiter wie im Beispiel 3.2. Der Fall $q_1 = \infty$ ergibt sich aus (9) ∎

Satz 3.4: *Die Inklusion $l_{p,q_0}(w_0) \hookrightarrow l_{p,q_1}(w_1)$ gilt genau dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $q_0 \leqq q_1$ *und* $\overline{\lim}\,\frac{w_1(n)}{w_0(n)} < \infty$,

(ii) $q_1 < q_0$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{w_1(n)}{w_0(n)}\right]^t < \infty$,

wobei $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{t}$ *gesetzt wurde. Sie ist außer im Falle* $q_0 = q_1$, $\underline{\lim}\,\frac{w_1(n)}{w_0(n)} > 0$ *stets echt.*

Beweis: Wie man leicht sieht, liegt im trivialen Fall $\overline{\lim}\,\frac{w_1(n)}{w_0(n)} < \infty$, $\underline{\lim}\,\frac{w_1(n)}{w_0(n)} > 0$ für beliebige q die Identität $l_{p,q}(w_0) = l_{p,q}(w_1)$ vor. Mit Hilfe von (9) und der Hölderschen Ungleichung erhalten wir ebenso einfach aus den Bedingungen (i) bzw. (ii) die von $x \in l_{p,q_0}(w_0)$ unabhängigen Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|x \mid l_{p,q_1}(w_1)\|^{q_1} &\leqq \|x \mid l_{p,\infty}(w_1)\|^{q_1-q_0}\,\|x \mid l_{p,q_0}(w_1)\|^{q_0}\\ &\prec \|x \mid l_{p,q_0}(w_1)\|^{q_1} \prec \|x \mid l_{p,q_0}(w_0)\|^{q_1}\end{aligned}$$

bzw.

$$\|x \mid l_{p,q_1}(w_1)\| \leqq \|x \mid l_{p,q_0}(w_0)\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{w_1(n)}{w_0(n)}\right]^t\right\}^{\frac{1}{t}} \prec \|x \mid l_{p,q_0}(w_0)\|.$$

Also sind beide Bedingungen hinreichend, wobei Beispiel 3.3 für $q_0 < q_1$ und die aus Beispiel 3.2 durch Vertauschen von w_0 und w_1 hervorgehende Folge in den Fällen $q_0 = q_1$, $\underline{\lim}\,\frac{w_1(n)}{w_0(n)} = 0$ und $q_1 < q_0$ zeigen, daß die Inklusion echt ist.

Nehmen wir andererseits an, daß die Inklusion $l_{p,q_0}(w_0) \hookrightarrow l_{p,q_1}(w_1)$ besteht, so ergibt sich aus Beispiel 3.2 sofort die Bedingung $\overline{\lim}\,\frac{w_1(n)}{w_0(n)} < \infty$. Für $q_1 < q_0$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{t}$ setzen wir

$$\eta_k := \begin{cases} 2^{-\frac{k}{2p}}w_1(2^k)^{-1}\left[\frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}\right]^{\frac{t}{q_1}} & \text{für } k \geqq k_0\\ \eta_{k_0} & \text{für } k \leqq k_0,\end{cases}$$

wobei k_0 derart gewählt sein soll, daß (η_k) monoton fällt. Dann ist die Folge $x = (\xi_n)$, definiert durch

$$\xi_n := \eta_k n^{-\frac{1}{2p}}, \text{ für } n \in \Delta_k := [2^k, 2^{k+1}),$$

ebenfalls monoton und es gilt für $q_0 < \infty$, unabhängig von $k \geqq k_0$

$$\sum_{n\in\Delta_k}\left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}w_0(n)\ \alpha_n(x)\right]^{q_0} \sim \left[\eta_k 2^{\frac{k}{2p}}w_0(2^k)\right]^{q_0} = \left[\frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}\right]^t$$

sowie

$$\sum_{n\in\Delta_k}\left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}w_1(n)\ \alpha_n(x)\right]^{q_1} \sim \left[\eta_k 2^{\frac{k}{2p}}w_1(2^k)\right]^{q_1} = \left[\frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}\right]^t.$$

Deshalb ergibt sich für $x^{(m)} := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2m}, 0, 0, \ldots)$ unabhängig von $m \in \mathbf{N}$

$$\left\{\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{n}\left[\frac{w_1(n)}{w_0(n)}\right]^t\right\}^{\frac{1}{t}} \sim \left\{\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{w_1(2^k)}{w_0(2^k)}\right]^t\right\}^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_0}} \prec \frac{\|x^{(m)} \mid l_{p,q_1}(w_1)\|}{\|x^{(m)} \mid l_{p,q_0}(w_0)\|} \prec 1$$

und wir erhalten die schärfere Bedingung aus (ii). Im Falle $q_0 = \infty$ schließt man analog ∎

Als unmittelbare Konsequenz formulieren wir den

Satz 3.5: *Für jede von p,q unabhängige quasilogarithmische Funktion w sind die Räume $l_{p,q}(w)$ bezüglich der Parameter p und q lexikografisch geordnet. Gleiches gilt für die Räume $l_{p,q}(w_{p,q})$, wenn wir $\varlimsup w(n) < \infty$ voraussetzen.*

Wir bemerken, daß für $l_{p,q}(w_{p,q})$ (vgl. (8)) im verbleibenden Fall $\varlimsup w(n) = \infty$ eine andere Situation vorliegt. Setzen wir nämlich zusätzlich voraus, daß $\sum_{n=1}^{\infty}[nw(n)]^{-1}$ endlich ist, so gilt $l_{p,q_0}(w_{p,q_0}) \underset{\neq}{\hookrightarrow} l_{p,q_1}(w_{p,q_1})$ für $q_1 < q_0$, während bei $\sum_{n=1}^{\infty}[nw(n)]^{-1} = \infty$ die Räume $l_{p,q_0}(w_{p,q_0})$ und $l_{p,q_1}(w_{p,q_1})$ für $q_0 \neq q_1$ unvergleichbar sind.

Vergleicht man zwei Skalen $\{l_{p,q}(w_0)\}$ und $\{l_{p,q}(w_1)\}$, wobei w_0 und w_1 nicht von p,q abhängen sollen, so kann man bis auf eventuelles Vertauschen von w_0 und w_1 die folgenden Fälle unterscheiden:

(i) $\varliminf \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} > 0$ und $\varlimsup \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} < \infty$.

Dann ist $l_{p,q}(w_0) = l_{p,q}(w_1)$ für alle p,q.

(ii) $\varliminf \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} = 0$ und $\varlimsup \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} < \infty$.

Dann ist $l_{p,q}(w_0) \underset{\neq}{\hookrightarrow} l_{p,q}(w_1)$ für alle p,q. Es existieren jedoch in Abhängigkeit von $0 < q_1 \leqq q < q_0 \leqq \infty$ Folgen aus $l_{p,q_1}(w_1)$, die nicht zu $l_{p,q}(w_0)$ bzw. Folgen aus $l_{p,q}(w_1)$, die nicht zu $l_{p,q_0}(w_0)$ gehören.

(iii) $\varliminf \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} = 0$ und $\varlimsup \dfrac{w_1(n)}{w_0(n)} = \infty$.

Dann sind $l_{p,q_0}(w_0)$ und $l_{p,q_1}(w_1)$ für beliebige Parameter q_0, q_1 unvergleichbar.

Vergleicht man dagegen zwei Skalen $\{l_{p,q}(w_{0,p,q})\}$ und $\{l_{p,q}(w_{1,p,q})\}$, so hängt die Situation sowohl von der Lage der Parameter p,q zueinander als auch dem asymptotischen Verhalten von w_0 und w_1 im einzelnen ab. Mit Hilfe von Satz 3.4 und den Beispielen 3.2 und 3.3 läßt sich dies jedoch im Einzelfall schnell ermitteln.

4. Reelle Interpolation

Abschließend sollen die durch reelle Interpolation aus $l_{p_0,q_0}(w_0)$ und $l_{p_1,q_1}(w_1)$ entstehenden Räume bestimmt werden. Dabei wird sich herausstellen, daß der Index q keinen Einfluß auf das Interpolationsergebnis hat, während sich die quasilogarithmischen Gewichtsfunktionen in kanonischer Weise interpolieren. Wichtige Grundlage ist die folgende Abschätzung des *K-Funktionals* eines Elementes $x \in E_0 + E_1$

$$K(t, x) = K(t, x, E_0, E_1) := \inf_{x=x_0+x_1} \{\|x_0 \mid E_0\| + t \|x_1 \mid E_1\|\},$$

deren Beweis sich am Vorbild von [5] orientiert.

Lemma 4.1: *Es seien $p_0 \leqq p_1$, $0 < r < \min(p_0, q_0, q_1)$ und*

$$a_k := 2^{k\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)} \frac{w_0(2^k)}{w_1(2^k)} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dann ist unabhängig von $x \in l_{p_1,q_1}(w_1)$ und $0 \leqq t < 1$

$$K(t, x, l_{p_0,q_0}(w_0), l_{p_1,q_1}(w_1)) \sim t \|x \mid l_{p_1,q_1}(w_1)\|$$

bzw. unabhängig von x, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $a_k \leqq t < a_{k+1}$

$$K(t, x, l_{p_0,q_0}(w_0), l_{p_1,q_1}(w_1)) \sim \left\{\sum_{n=1}^{2^k} \left[n^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}} w_0(n)\, \alpha_n^{(r)}(x)\right]^{q_0}\right\}^{\frac{1}{q_0}}$$
$$+ a_k \left\{\sum_{n=2^k+1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} w_1(n)\, \alpha_n^{(r)}(x)\right]^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}}.$$

Beweis: Der Fall $0 \leqq t < 1$ ist klar. Wegen Satz 1.3 gilt unabhängig von $x \in l_{p_1,q_1}(w_1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $a_k \leqq t < a_{k+1}$ die Beziehung $K(a_k, x) \sim K(t, x)$, so daß es genügt, $K(a_k, x)$ abzuschätzen. Wählen wir zu gegebenem $x \in l_{p_1,q_1}(w_1)$ die Folge $x_0 \in f_{2^k}$ derart, daß

$$\alpha_n(x_0) = \begin{cases} \alpha_n(x) & \text{für } n = 1, 2, \ldots, 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist und setzen $x_1 = x - x_0$, so hat dies $\alpha_n(x_1) = \alpha_{n+2^k}(x)$ für $n = 1, 2, \ldots$ zur Folge und wir erhalten mit dieser speziellen Zerlegung unabhängig von $x \in l_{p_1,q_1}(w_1)$, $t \geqq 1$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ (vgl. Lemma 2.3)

$$K(t, x) \leqq \|x_0 \mid l_{p_0,q_0}(w_0)\| + t \|x_1 \mid l_{p_1,q_1}(w_1)\|$$
$$\sim \|x_0 \mid l_{p_0,q_0}(w_0)\|_r + t \|x_1 \mid l_{p_1,q_1}(w_1)\|_r \prec \left\{\sum_{n=1}^{2^k} \left[n^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}} w_0(n)\, \alpha_n^{(r)}(x)\right]^{q_0}\right\}^{\frac{1}{q_0}}$$
$$+ \left\{\sum_{n=2^k+1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}} w_0(n)\, \alpha_n^{(r)}(x)\right]^{q_0}\right\}^{\frac{1}{q_0}}$$
$$+ t \left\{\sum_{n=1}^{2^k} \left[n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}-\frac{1}{r}} w_1(n) \left(\sum_{j=2^k+1}^{2^k+n} \alpha_j(x)^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}}$$
$$+ t \left\{\sum_{n=2^k+1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} w_1(n)\, \alpha_n^{(r)}(x)\right]^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}} =: S_1 + S_2 + tS_3 + tS_4.$$

Beachten wir nun, daß unabhängig von x und k (vgl. (6) und (7))

$$S_2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{2^k} \alpha_j(x)^r \right)^{\frac{1}{r}} \left\{ \sum_{n=2^k}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} - \frac{1}{r}} w_0(n) \right]^{q_0} \right\}^{\frac{1}{q_0}} \prec \alpha_{2^k}^{(r)}(x)\, 2^{\frac{k}{p_0}} w_0(2^k) \prec S_1$$

sowie

$$S_3 \leqq \alpha_{2^k+1}(x) \left\{ \sum_{n=1}^{2^k} \left[n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} w_1(n) \right]^{q_1} \right\}^{\frac{1}{q_1}} \prec \alpha_{2^k+1}^{(r)}(x)\, (2^k + 1)^{\frac{1}{p_1}} w_1(2^k + 1) \prec S_4$$

gilt, so erhalten wir die gewünschte Abschätzung nach oben durch $S_1 + tS_4$. Dabei können t und k vorerst unabhängig voneinander gewählt sein.

Gehen wir von einer beliebigen Zerlegung $x = x_0 + x_1$, $x_i \in l_{p_i,q_i}(w_i)$ $(i = 0, 1)$ aus, so ergibt sich zunächst unabhängig von $k = 0, 1, 2, \ldots$, x und seiner Darstellung

$$\begin{aligned} & S_1 + a_k S_4 \\ & \prec \|x_0 \mid l_{p_0,q_0}(w_0)\|_r + \left\{ \sum_{n=1}^{2^k} \left[n^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}} w_0(n)\, \alpha_n^{(r)}(x_1) \right]^{q_0} \right\}^{\frac{1}{q_0}} \\ & \quad + a_k \left\{ \sum_{n=2^k+1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} w_1(n)\, \alpha_n^{(r)}(x_0) \right]^{q_1} \right\}^{\frac{1}{q_1}} + a_k \|x_1 \mid l_{p_1,q_1}(w_1)\|_r \\ & =: T_1 + T_2 + a_k T_3 + a_k T_4 . \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir nun, daß unabhängig von x_i und k

$$T_2 \prec T_4 \left\{ \sum_{n=1}^{2^k} \left[n^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_1}} \frac{w_0(n)}{w_1(n)} \right]^{q_0} \right\}^{\frac{1}{q_0}} \prec a_k T_4$$

sowie

$$T_3 \prec T_1 \left\{ \sum_{n=2^k}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_0}} \frac{w_1(n)}{w_0(n)} \right]^{q_1} \right\}^{\frac{1}{q_1}} \prec a_k^{-1} T_1$$

gilt, so ergibt sich die zweite Abschätzung, indem man im entstehenden Ausdruck $T_1 + a_k T_4$ zum Infimum über alle möglichen Darstellungen übergeht ∎

Theorem 4.2: *Es seien* $p_0 < p_1$, $0 < \theta < 1$ *und* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$. *Dann ist*

$$\left(l_{p_0,q_0}(w_0), l_{p_1,q_1}(w_1)\right)_{\theta,q} = l_{p,q}(w_0^{(1-\theta)} w_1^{\theta}).$$

Beweis: Der Einfachheit halber setzen wir $w_0(y) = w_1(y) = 1$ und $\alpha_h(x) = \alpha_h^{(r)}(x) = 0$ für Werte $y, h < 1$. Darüber hinaus sei

$$a_k = 2^{k\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} \frac{w_0(2^k)}{w_1(2^k)} \quad \text{für } k \in \mathbf{Z}.$$

Fixieren wir ein r, $0 < r < \min(p_0, q_0, q_1, q)$, so erhalten wir unter Verwendung von Lemma 4.1 unabhängig von $x \in \left(l_{p_0,q_0}(w_0), l_{p_1,q_1}(w_1)\right)_{\theta,q}$

$$\begin{aligned} & \|x \mid (l_{p_0,q_0}(w_0), l_{p_1,q_1}(w_1))_{\theta,q}\|^q \sim \sum_{k \in \mathbf{Z}} [a_k^{-\theta} K(a_k, x)]^q \\ & \sim \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^{-\theta q} \left[\left\{ \sum_{h=-\infty}^{k} \left[2^{\frac{h}{p_0}} w_0(2^h)\, \alpha_{2^h}^{(r)}(x) \right]^{q_0} \right\}^{\frac{1}{q_0}} \right. \\ & \quad \left. + a_k \left\{ \sum_{h=k}^{\infty} \left[2^{\frac{h}{p_1}} w_1(2^h)\, \alpha_{2^h}^{(r)}(x) \right]^{q_1} \right\}^{\frac{1}{q_1}} \right]^q =: M. \end{aligned}$$

Zusammenfassend konstatieren wir bereits jetzt, daß auch alle weiteren Abschätzungen unabhängig von x sein werden. So ergibt sich zunächst (vgl. Lemma 2.2)

$$\begin{aligned}
M &\geqq \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k^{-\theta q}\left[\alpha_{2^k}(x)\left\{\sum_{h=0}^{k}\left[2^{\frac{h}{p_0}}w_0(2^h)\right]^{q_0}\right\}^{\frac{1}{q_0}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\sum_{j=0}^{2^k}\alpha_j(x)^r\right)^{\frac{1}{r}}\left\{\sum_{h=k}^{\infty}\left[2^{h\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r}\right)}w_1(2^h)\right]^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}}\right]^q\\
&\sim \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k^{-\theta q}\left[\alpha_{2^k}(x)\,2^{\frac{k}{p_0}}w_0(2^k)+a_k\alpha_{2^k}^{(r)}(x)\,2^{\frac{k}{p_1}}w_1(2^k)\right]^q\\
&\geqq \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k^{-\theta q}\left[2^{\frac{k}{p_0}}w_0(2^k)+a_k2^{\frac{k}{p_1}}w_1(2^k)\right]^q\alpha_{2^k}(x)^q\\
&= 2^q\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left[2^{k\left(\frac{1}{p_0}-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)\right)}\left(\frac{w_0(2^k)}{w_1(2^k)}\right)^{-\theta}w_0(2^k)\alpha_{2^k}(x)\right]^q\\
&= 2^q\,\|\|x\mid l_{p,q}(w_0{}^{(1-\theta)}w_1{}^{\theta})\|\|^q\sim\|x\mid l_{p,q}(w_0{}^{(1-\theta)}w_1{}^{\theta})\|^q.
\end{aligned}$$

Um eine Abschätzung nach oben zu gewinnen, spalten wir M zunächst in zwei Terme auf:

$$\begin{aligned}
M^{\frac{1}{q}} &\prec \left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k^{-\theta q}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k}\left[2^{\frac{h}{p_0}}w_0(2^h)\,\alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^{q_0}\right\}^{\frac{q}{q_0}}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k^{(1-\theta)q}\left\{\sum_{h=k}^{\infty}\left[2^{\frac{h}{p_1}}w_1(2^h)\,\alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^{q_1}\right\}^{\frac{q}{q_1}}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&=: M_0^{\frac{1}{q}}+M_1^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Indem wir

$$b_{ik} := \begin{cases} a_k^{-\theta} & \text{für } i=0\\ a_k^{(1-\theta)} & \text{für } i=1\end{cases}$$

und

$$\Delta_{ik} := \begin{cases} \{h\in\mathbf{Z}: h\leqq k\} & \text{für } i=0\\ \{h\in\mathbf{Z}: h\geqq k\} & \text{für } i=1\end{cases}$$

setzen, erreichen wir die Möglichkeit, beide Terme gleichzeitig zu behandeln. Dazu benutzen wir unter anderem die Identität

$$2^{\frac{h}{p_i}}w_i(2^h)\,b_{ih} = 2^{\frac{h}{p}}w_0{}^{(1-\theta)}(2^h)\,w_1{}^{\theta}(2^h). \quad (i=0,1).$$

Im einfacheren Fall $\dfrac{q}{q_i}\leqq 1$ liefert die Jensensche Ungleichung (vgl. Lemma 2.4)

$$\begin{aligned}
M_i &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_{ik}^q\left\{\sum_{h\in\Delta_{ik}}\left[2^{\frac{h}{p_i}}w_i(2^h)\,\alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^{q_i}\right\}^{\frac{q}{q_i}}\\
&\leqq \sum_{k\in\mathbf{Z},h\in\Delta_{ik}}\left[b_{ik}2^{\frac{h}{p_i}}w_i(2^h)\,\alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^q\\
&= \sum_{h\in\mathbf{Z}}\left[2^{\frac{h}{p_i}}w_i(2^h)\,\alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^q\left(\sum_{k\in\Delta_{(1-i)h}} b_{ik}^q\right)\sim\|x\mid l_{p,q}(w_0{}^{(1-\theta)}w_1{}^{\theta})\|_r^q.
\end{aligned}$$

Für $t_i := \frac{q}{q_i} > 1$ fixieren wir s_0, s_1 mit $p_0 < s_0 < p < s_1 < p_1$ und benutzen die Höldersche Ungleichung:

$$M_i \leqq \sum_{k\in \mathbf{Z}} b_{ik}^q \left\{\sum_{h\in \Delta_{ik}} 2^{h\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{s_i}\right)q_i t_i'} w_i(2^h)^{q_i t_i'}\right\}^{\frac{t_i}{t_i'}} \left\{\sum_{h\in \Delta_{ik}} 2^{h\frac{q}{s_i}} \alpha_{2^h}^{(r)}(x)^q\right\}$$

$$\sim \sum_{k\in \mathbf{Z}, h\in \Delta_{ik}} \left[b_{ik} 2^{k\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{s_i}\right)} w_i(2^k)\, 2^{\frac{h}{s_i}} \alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^q$$

$$= \sum_{h\in \mathbf{Z}} \left[2^{\frac{h}{s_i}} \alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^q \left\{\sum_{k\in \Delta_{(1-i)h}} \left[b_{ik} 2^{k\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{s_i}\right)} w_i(2^k)\right]^q\right\}$$

$$\sim \sum_{h\in \mathbf{Z}} \left[2^{\frac{h}{p_i}} w_i(2^h)\, b_{ih} \alpha_{2^h}^{(r)}(x)\right]^q \sim \|{}^{r}x \mid l_{p,q}(w_0{}^{(1-\theta)} w_1{}^{\theta})\|_r^q .$$

Insgesamt ergibt sich

$$M \prec \|x \mid l_{p,q}(w_0{}^{(1-\theta)} w_1{}^{\theta})\|_r^q \sim \|x \mid l_{p,q}(w_0{}^{(1-\theta)} w_1{}^{\theta})\|^q .$$

Damit ist das Theorem bewiesen ∎

Als wichtige Spezialfälle formulieren wir die

Folgerung 4.3: *Es seien* $p_0 < p_1$, $0 < \theta < 1$ *und* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. *Dann ist*

$$(l_{p_0,q_0}(w), l_{p_1,q_1}(w))_{\theta,q} = l_{p,q}(w),$$

jedoch nur für $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ *gilt* (vgl. (8))

$$(l_{p_0,q_0}(w_{p_0,q_0}), l_{p_1,q_1}(w_{p_1,q_1}))_{\theta,q} = l_{p,q}(w_{p,q}).$$

5. Ergänzende Bemerkungen

Der Vollständigkeit halber stellen wir noch einige Eigenschaften zusammen, die sich durch geringfügige Modifikation von in anderen Arbeiten verwendeten Methoden ergeben. Wir verzichten daher auf die Beweise und verweisen auf die Vorbilder in [1, 13, 15, 16, 18, 19].

Die Räume $l_{p,q}(w)$ bilden vollständige quasinormierte Folgenideale im Sinne von [16]. Für $p,q > 1$ liefert $\|\cdot \mid l_{p,q}(w)\|_1$ eine äquivalente Norm. Für zwei quasinormierte Folgenräume E_1 und E_2 besteht deren Produkt $E_1 \circ E_2$ aus allen möglichen koordinatenweise gebildeten Produkten $x = x_1 \cdot x_2$ von Folgen $x_1 \in E_1$ und $x_2 \in E_2$. Dabei setzt man

$$\|x \mid E_1 \circ E_2\| := \inf_{x = x_1 \cdot x_2} \|x_1 \mid E_1\| \cdot \|x_2 \mid E_2\|.$$

Für $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}$ erhält man

$$l_{p_0,q_0}(w_0) \circ l_{p_1,q_1}(w_1) \hookrightarrow l_{p,q}(w_0 \cdot w_1)$$

und als Spezialfall (vgl. (8))

$$l_{p_0,q_0}(w_{p_0,q_0}) \circ l_{p_1,q_1}(w_{p_1,q_1}) \hookrightarrow l_{p,q}(w_{p,q}).$$

Der Beweis verwendet Lemma 2.2 und Standardabschätzungen aus [16].

Wir bezeichnen mit E' den Dual eines Banachraumes E. Setzen wir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $1 < p,q < \infty$, und versehen $l_{p,q}(w)$ mit der entsprechenden Norm, so gilt

$$l_{p,q}(w)' = l_{p',q'}(w^{-1})$$

und als Spezialfall

$$l_{p,q}(w_{p,q})' = l_{p',q'}(w_{p',q'}).$$

Zum Beweis siehe [1], [18] oder [19].

Schließlich weisen wir noch auf die Möglichkeit hin, die gesamte Theorie der Approximationsräume (siehe [15]) auf den Fall mit quasilogarithmischem Gewicht zu übertragen. Setzt man w derart auf $[0, 1]$ fort, daß $w\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \in [1, \infty)$, ebenfalls quasilogarithmisch ist, so entstehen in diesem Bereich analoge Eigenschaften. Fordern wir zusätzlich noch, daß für $\alpha > 0$, und abhängig von $k \in \mathbf{Z}$

$$w(2^{\alpha k}) \sim w(2^k) \tag{10}$$

gilt, so wird für Quasi-Banachräume A_0 und A_1 und $x \in A_0 + A_1$ durch den Ansatz:

$x \in [A_0, A_1]^w_{\theta,q}$ genau dann, wenn gilt

$$\|x \mid [A_0, A_1]^w_{\theta,q}\| := \left\{\sum_{k \in \mathbf{Z}} [2^{-k\theta} w(2^k)\, K(2^k, x)]^q\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty$$

ein Interpolationsfunktor definiert, für den sich mit $0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ gerade

$$[l_{p_0}, l_{p_1}]^w_{\theta,q} = l_{p,q}(w) \tag{11}$$

ergibt. Wir verweisen auf [13] für die ausführliche Betrachtung von Interpolationsfunktoren dieses Types. Auf direktem Wege wie unser Theorem 4.2 oder als Folgerung aus ihm und Ergebnissen von [13] erhält man

Theorem 5.1 (*Reiteration*): *Es seien* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $0 < \lambda < 1$ *und* w_0, w_1, w_2 *derart auf* $[0, \infty)$ *definiert, daß sie* (10) *erfüllen und als Funktionen von* t *und* $\frac{1}{t}$, $t \in [1, \infty)$, *quasilogarithmisch sind. Setzen wir außerdem* $\theta := (1-\lambda)\,\theta_0 + \lambda\theta_1$,

$$w := w_0^{(1-\lambda)} w_1^{\lambda} w_2 \quad \text{und} \quad E_i := [A_0, A_1]^{w_i}_{\theta_i, q_i},$$

so gilt $[E_0, E_1]^{w_2}_{\lambda,q} = [A_0, A_1]^w_{\theta,q}$.

Geht man durch einen (11) entsprechenden Interpolationsansatz zu Funktionenräumen über, so führt dies zu folgenden Klassen meßbarer Funktionen:

$f \in L_{p,q}(w)$ genau dann, wenn gilt

$$\|f \mid L_{p,q}(w)\| := \left\{\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} w(t)\, f^*(t)\right]^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

wobei f^* die rechtsseitig stetige, monoton fallende, maßtreue Umordnung von f bezeichnet. Räume dieses Types werden in [11, 18, 19] untersucht, sie stellen das modifizierte Gegenstück zu den klassischen Lorentz-Funktionsräumen dar. Unter den angegebenen Einschränkungen für w ergibt sich sofort ein zu Theorem 4.2 analoger Interpolationssatz auch für $L_{p,q}(w)$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Allen, G. D.: Duals of Lorentz spaces. Pacific J. Math. 77 (1978), 287–291.
[2] Altshuler, Z.: Uniform convexity in Lorentz sequence spaces. Israel J. Math. 20 (1975), 260–274.
[3] Bergh, J., and J. Löfström: Interpolation spaces. Berlin—Heidelberg—New York: Springer Verlag 1976.
[4] Гохберг, И. Ц., и М. Г. Крейн: Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Москва: Изд-во Наука 1965.
[5] Holmstedt, T.: Interpolation of quasinormed spaces. Math. Scand. 26 (1970), 177–199.
[6] Karamata, J.: Sur un mode croissance régulière des fonctions. Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38–53.
[7] Karamata, J.: Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze. Math. Z. 33 (1931), 294–299.
[8] König, H.: s-numbers of Besov-Lorentz imbeddings. Math. Nachr. 91 (1979), 389–400.
[9] König, H.: Some remarks on weakly singular integral operators. Integral Equations Operator Theory 3 (1980), 397–407.
[10] Крейн, С. Г., Петунин, Ю. И., и Е. М. Семенов: Интерполяция линейных операторов. Москва: Изд-во Наука 1978.
[11] Lindenstrauss, J., and L. Tzafriri: Classical Banach spaces, Vol. I and II (Erg. d. Math.: Bd. 92 and 97). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1977 and 1979.
[12] Mohamed, A., et Pham the Lai: Remarques sur les N-iemes diameters d'une classe d'espace de Sobolev a piods. Seminaire de Rennes (1977).
[13] Nilsson, P.: Reiteration theorems for real interpolation and approximation spaces. Preprint: University of Lund and Lund Institute of Technology 1981.
[14] Nordin, C.: The asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator. Arkiv Mat. 10 (1972), 9–21.
[15] Pietsch, A.: Approximation spaces. J. Approx. Theory 32 (1981), 115–134.
[16] Pietsch, A.: Operator ideals. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1978 and Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland Publ. Comp. 1980.
[17] Pietsch, A.: Eigenvalues of Integral Operators. Part I: Math. Ann. 247 (1980), 169–178; Part II: Math. Ann. 262 (1983), 343–376.
[18] Reisner, Sh.: On the duals of Lorentz function and sequence spaces. Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 65–72.
[19] Sharpley, R.: Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation. J. Func. Anal. 11 (1972), 479–513.
[20] Соломещ, И. А.: О собственных числах некоторых вырождающихся эллиптических уравнений. Мат. Сборник 54 (1961), 295–310.
[21] Triebel, H.: Interpolation theory, function spaces, differential operators. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1978 and Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland Publ. Comp. 1978.

Manuskripteingang: 12. 04. 1983; in revidierter Fassung: 09. 02. 1984

VERFASSER:

Dr. Georg Baumbach
Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität
DDR-6900 Jena, Universitäts-Hochhaus