Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (1) (1985), S. 85 – 96

Asymptotische Eigenwertverteilung des Laplace-Operators in bestimmten unbeschränkten Gebieten mit Neumannschen Randbedingungen und Restgliedabschätzungen

G. BERGER

In der Arbeit wird das Verhalten der Eigenwerte des Laplace-Operators in bestimmten unbeschränkten Gebieten des $\mathbf{R}^n$ mit Neumannschen Randbedingungen untersucht. Dabei gelingt es für spezielle Gebiete eine asymptotische Formel mit einer Restgliedabschätzung zu finden. Der Hauptteil der Asymptotik zeigt dabei das gleiche asymptotische Verhalten wie der Laplace-Operator in beschränkten Gebieten.

В данной работе исследуется распределение собственных значений для оператора Лапласа в некоторых неограниченных областях в $\mathbf{R}^n$ с граничными условиями Неймана. При этом удается выводить для областей специального вида асимптотические формулы с оценкой остатка. Главный член асимптотики имеет то же самое асимптотическое поведение как оператор Лапласа в ограниченных областях.

In the paper, the distribution of the eigenvalues of the Laplacian is investigated in some unbounded domains of $\mathbf{R}^n$ with Neumann boundary conditions. For certain domains asymptotic formulas with remainder estimates are established. The capital term of the asymptotic coincides in this case with the asymptotic formula of the Laplacian in bounded domains.

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten der Eigenwerte des Laplace-Operators in bestimmten unbeschränkten Gebieten mit Neumannschen Randbedingungen untersucht. Für die Untersuchung ist als Voraussetzung die Existenz eines reinen Punktspektrums zu sichern. Im Unterschied zum Eigenwertproblem mit Dirichletschen Randbedingungen müssen für die Existenz der isolierten Eigenwerte endlicher Vielfachheit, die sich im Endlichen nicht häufen können, zusätzliche und wesentliche Bedingungen an das Gebiet Ω hinsichtlich seines Verhaltens im Unendlichen gestellt werden. In [1] wurden dazu notwendige und hinreichende Bedingungen für Ω angegeben, die für die Untersuchungen verwendet werden. Dabei gelingt es für spezielle Gebiete eine asymptotische Formel mit einer Restgliedabschätzung zu finden, die das gleiche asymptotische Verhalten zeigt wie der Laplace-Operator in beschränkten Gebieten. Das Hauptglied der Asymptotik besitzt eine Abhängigkeit von mes (Ω) mit der Bedingung mes $(\Omega) < \infty$. Die letzte Bedingung braucht im allgemeinen für Eigenwertprobleme mit Dirichletschen Randbedingungen in unbeschränkten Gebieten nicht erfüllt zu sein, wie G. W. ROSENBLUM in [6] gezeigt und in diesem Fall asymptotische Formeln für bestimmte Gebiete Ω mit mes $(\Omega) = \infty$ angegeben hat. Eine asymptotische Formel für unbeschränkte Gebiete der Dimension zwei für den Laplace-Operator mit Dirichletschen Randbedingungen wurde in [5] bewiesen.

1. Vorbereitung

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet von der Gestalt

$$\Omega = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) : x_n > 0,\ \frac{x_i}{f(x_n)} \in G\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)\right\}, \tag{1}$$

wobei $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ ein beschränktes Gebiet und $f(s) = e^{-s^\alpha}$ $(s \in \mathbf{R}, \alpha > 1)$ sei. Für die Eigenwertuntersuchungen auf dem Gebiet Ω sind seine lokalen Eigenschaften von wesentlicher Bedeutung. In Analogie zu [1] definieren wir einen *Fluß* auf Ω. Darunter verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi: U \to \Omega$, wobei U eine offene Menge in $\Omega \times \mathbf{R}$ ist, die $\Omega \times \{0\}$ enthält, mit der Eigenschaft $\Phi(x, 0) = x$ für alle $x \in \Omega$. Für festes t bilde dann die Abbildung $\Phi_t: x \to \Phi(x, t)$ eine Untermenge von Ω in Ω ab. Die Jacobische Determinante dieser Abbildung sei

$$\det \Phi_t'(x) = \left.\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x,t)}.$$

Wir setzen

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, t) = \left(\frac{f(x_n - t)}{f(x_n)}\, x_1, \ldots, \frac{f(x_n - t)}{f(x_n)}\, x_{n-1}, x_n - t\right),$$

$0 < t < x_n$. Dann genügt $\Phi(x_1, \ldots, x_n, t)$ den oben genannten Bedingungen, und es gilt

$$\det \Phi_t'(x) = \left(\frac{f(x_n - t)}{f(x_n)}\right)^{n-1}. \tag{2}$$

Für $N > 0$ definieren wir weiter $\Omega_N = \{x \in \Omega : x_n > 0\}$ und setzen

$$d_N(t) = \sup_{x \in \Omega_N} |\det \Phi_t'(x)|^{-1}.$$

In der Arbeit sind alle Konstanten C_k durchweg echt positiv.

2. Untersuchung des Spektrums

Wir definieren auf Ω die Bilinearform

$$A[u, v] = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_i} + u\bar{v}\right) dx. \tag{3}$$

Die Vervollständigung von $C^\infty(\bar{\Omega})$ in der Norm $(A[u, u])^{1/2}$ bezeichnen wir mit $W_2^1(\Omega)$ und den Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_2^1(\Omega)$ mit $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Durch die Bilinearform (3) wird auf $W_2^1(\Omega)$ ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator $\mathcal{A}$ so erzeugt, daß

$$A[u, v] = (\mathcal{A}u, v)_{L_2} \tag{4}$$

für alle $u \in D(\mathcal{A})$ und $v \in W_2^1(\Omega)$ gilt, und Laplace-Operator mit Neumannschen Randbedingungen genannt. Analog wird der auf $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ entsprechend (4) erzeugte Operator als Laplace-Operator mit Dirichletschen Randbedingungen bezeichnet. Für die Eigenwertuntersuchung ist zunächst der durch Neumannsche Randbedingungen bestimmte Operator $\mathcal{A}$ von Bedeutung.

Lemma 1: *Ω und f genüge den Voraussetzungen von Abschnitt* 1. *Dann besitzt der durch* (4) *erzeugte selbstadjungierte Operator $\mathcal{A}$ ein reines Punktspektrum.*

Beweis: Durch $\Phi(x_1, \ldots, x_n, t)$ haben wir einen Fluß auf Ω definiert, der den folgenden Bedingungen genügt. Die Menge $U \subset \Omega \times \mathbf{R}$ sei so gewählt, daß $\Omega \times [0, a] \subset U$ gelte für alle $N \geqq N_0$ und festes $a > 0$. Die Funktion Φ_t ist eineindeutig für alle $t \in [0, a]$ und durch Rechnung folgt, daß es eine Konstante $M > 0$ gibt, so daß

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) \right| \leqq M \tag{5}$$

für alle $(x, t) \in U$ gilt. Außerdem gelten die Beziehungen

$$\lim_{N \to \infty} d_N(a) = 0 \tag{6}$$

und

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^a d_N(t)\, dt = 0. \tag{7}$$

Setzen wir $a = 1$ und benutzen die Eigenschaft von Ω, so sind die Voraussetzungen von Theorem 6.47 aus [1] erfüllt. Damit ist die Einbettung von $W_2^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ kompakt und nach dem Kriterium von Rellich besitzt $\mathcal{A}$ ein reines Punktspektrum ∎

Bemerkung 1: Die Bedingung $\alpha > 1$ für das Gebiet Ω ist wesentlich für die Behauptung des Lemmas, wie man aus

$$e^{-N^{\alpha-1}} \leqq d_N(a) \leqq e^{-C_1 N^{\alpha-1}}.$$

sieht.

Für die Aufstellung einer asymptotischen Formel benötigen wir jedoch eine Verschärfung von Theorem 6.47 aus [1] für das qualitative Verhalten des Flusses auf Ω. Diese wird durch das nächste Lemma gegeben.

Lemma 2: *Ω genüge den Voraussetzungen aus Abschnitt* 1 *und Φ_t sei ein Fluß auf Ω. Dann gilt für alle $u \in W_2^1(\Omega)$ und alle $a > 0$ die Ungleichung*

$$\int_{\Omega_N} |u(x)|^2\, dx \leqq 2\delta_N\, \|u\|^2_{W_2^1(\Phi_a(\Omega_N))}$$

mit

$$\delta_N = \max\left(d_N(a),\, M^2 a \int_0^a d_N(t)\, dt\right). \tag{8}$$

Beweis: Da $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $W_2^1(\Omega)$ liegt, beschränken wir uns auf C^∞-Funktionen bei den Untersuchungen. Für jedes $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und jedes $x \in \Omega_N$ gilt

$$u(x) = u\big(\Phi_a(x)\big) - \int_0^a \frac{\partial}{\partial t}\, u\big(\Phi_t(x)\big)\, dt.$$

Aus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_N} \big|u\big(\Phi_a(x)\big)\big|^2\, dx &\leqq d_N(a) \int_{\Omega_N} \big|u\big(\Phi_a(x)\big)\big|^2\, |\det \Phi_a'(x)|\, dx \\ &= d_N(a) \int_{\Phi_a(\Omega_N)} |u(y)|^2\, dy \end{aligned} \tag{9}$$

und unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{\Omega_N} \left| \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} u(\Phi_t(x))\, dt \right|^2 dx$$

$$\leqq a \int_{\Omega_N} \int_0^a |\text{grad}\, u(\Phi_t(x))|^2 \left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) \right|^2 dt\, dx$$

$$\leqq aM^2 \int_{\Omega_N} \int_0^a d_N(t)\, |\text{grad}\, u(\Phi_t(x))|^2\, |\det \Phi_t'(x)|\, dt\, dx$$

$$\leqq aM^2 \int_0^a d_N(t)\, dt \int_{\Phi_a(\Omega_N)} |\text{grad}\, u(y)|^2\, dy \tag{10}$$

folgt

$$\int_{\Omega_N} |u(x)|^2\, dx \leqq 2 \left(\int_{\Omega_N} |u(\Phi_a(x))|^2\, dx + \int_{\Omega_N} \left| \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} u(\Phi_t(x))\, dt \right|^2 dx \right)$$

$$\leqq 2\delta_N \left(\int_{\Phi_a(\Omega_N)} |u(y)|^2\, dy + \int_{\Phi_a(\Omega_N)} |\text{grad}\, u(y)|^2\, dy \right)$$

und daraus die Behauptung des Lemmas ∎

Neben Ω_N definieren wir $\Omega_N{}^M = \{x \in \Omega : N < x_n \leqq M\}$. Nach Lemma 1 besteht das Spektrum von $\mathcal{A}$ nur aus isolierten Eigenwerten $\{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots}$ endlicher Vielfachheit, die sich im Endlichen nicht häufen können. Werden die Eigenwerte durch

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_k \leqq \lambda_{k+1} \leqq \cdots \to \infty \quad \text{für} \quad k \to \infty\,,$$

einschließlich ihrer Vielfachheiten nach wachsender Größe geordnet, dann definieren wir

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} 1\,.$$

Wir geben zunächst eine Abschätzung für die Anzahl der Eigenwerte des Operators $\mathcal{A}$ auf dem Teilgebiet Ω_N an.

Lemma 3: *Das Gebiet Ω_N sei aus Abschnitt 1 gegeben. Für die Anzahl der Eigenwerte des Operators $\mathcal{A}$ aus (4) auf Ω_N mit Neumannschen Randbedingungen gilt*

$$N(\lambda, \Omega_N) \leqq C_2\, \lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln \lambda\,,$$

falls $N \geqq N_0 := \left(\dfrac{M}{\alpha(n-1)} (2\lambda \ln 2\lambda)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ *gewählt wurde.*

Beweis: Es sei $\lambda \geqq \lambda_0$ fest gewählt. Dann besitzt der Operator $\mathcal{A}$ nach Theorem 6.47 aus [1] sowohl auf dem Gebiet Ω_N als auch auf Ω_{N+a} $(a > 0)$ ein reines Punktspektrum. Das Gebiet $\Omega_N{}^{N+a}$ ist beschränkt, so daß $\mathcal{A}$ auf $\Omega_N{}^{N+a}$ ebenfalls ein reines Punktspektrum besitzt. Unter Verwendung von Lemma 2 gilt für alle Funktionen

$u \in C^\infty(\bar{\Omega}_N)$ und alle $a > 0$ die Beziehung

$$A_N[u, u] = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_{\Omega_N} |u|^2\, dx$$
$$\geqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_N^{N+a}} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_{\Omega_N^{N+a}} |u|^2\, dx + \frac{1}{2\delta_{N+a}} \int_{\Omega_{N+a}} |u|^2\, dx.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, da $\delta_{N+a} \to 0$ für $N + a \to \infty$, daß nach dem Variationsprinzip von Courant die Anzahl der Eigenwerte des Operators $\mathcal{A}$ auf Ω_N, die λ nicht überschreiten, nicht größer ist als die Anzahl der Eigenwerte des Operators $\mathcal{A}$ auf $\Omega_N{}^{N+a}$, falls

$$\frac{1}{2\delta_{N+a}} \geqq \lambda \tag{11}$$

gewählt wird. Dann gilt bei Verwendung der Eigenwertverteilung für den Laplace-Operator in beschränkten Gebieten [3]

$$N(\lambda, \Omega_N) \leqq N\left(\frac{\lambda}{2}, \Omega_N{}^{N+a}\right) + C_3 \leqq C_4 \operatorname{mes}(\Omega_N{}^{N+a})\, \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln \lambda\right). \tag{12}$$

Es gilt

$$d_N(t) = \sup_{x_n \in (N,\infty)} \left|\frac{f(x_n)}{f(x_n - t)}\right|^{n-1} = \left|\frac{f(N)}{f(N - t)}\right|^{n-1}$$

und somit

$$\delta_{N+a} = \max\left(\left|\frac{f(N + a)}{f(N)}\right|^{n-1},\ M^2 a \int_0^a \left|\frac{f(N + a)}{f(N + a - t)}\right|^{n-1} dt\right).$$

Wir wählen nun $N \geqq N_0 := \left[\frac{M}{\alpha(n - 1)} (2\lambda \ln 2\lambda)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$ und

$$a = \frac{\ln^{\frac{1}{2}} 2\lambda}{M(2\lambda)^{\frac{1}{2}}}. \tag{13}$$

Für $f(s) = e^{-s^\alpha}$ ($s \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$) folgt dann

$$\left|\frac{f(N + a)}{f(N)}\right|^{n-1} = e^{(N^\alpha-(N+a)^\alpha)(n-1)} \sim e^{-(n-1)N^{\alpha-1}\alpha a} < \frac{1}{2\lambda}$$

bzw.

$$M^2 a \int_0^a \left|\frac{f(N + a)}{f(N + a - t)}\right|^{n-1} dt \sim M^2 a \int_0^a e^{-\alpha(n-1)(N+a)^{\alpha-1} t}\, dt$$
$$\leqq \frac{M^2 a}{\alpha(n - 1)\, (N + a)^{\alpha-1}} \leqq \frac{M^2 a^2}{\ln 2\lambda} < \frac{1}{2\lambda}.$$

Daraus folgt für die Eigenwertverteilung auf Ω_{N+a} die Abschätzung $N(\lambda, \Omega_{N+a}) \leqq C_3$ sowie unter Verwendung von (13) in (12) die Ungleichung

$$N(\lambda, \Omega_N) \leqq C_4 \lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln \lambda \tag{14}$$

und damit die Behauptung des Lemmas ∎

Bemerkung 2: Aus dem Beweis von Lemma 3 folgt, daß das Gebiet Ω_N in jedem Teilgebiet wie $e^{-x_n^a}$ fallen muß, um die Existenz des reinen Punktspektrums zu sichern und die Abschätzung (14) zu erhalten.

3. Asymptotische Eigenwertverteilung

Bevor wir zur Behauptung des Hauptsatzes kommen, stellen wir einen Gitterpunktsatz voran, der eine Verallgemeinerung des folgenden Lemmas ist.

Lemma 4: *Die Anzahl $N_0(\lambda)$ der positiven ganzen Zahlen x, y, die der Ungleichung*

$$Ay^\alpha + Bx^\beta \leqq \lambda$$

bei vorgegebenen positiven Zahlen A, B, α, β, γ genügen, ist

$$N_0(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{A^{\frac{1}{\alpha}}B^{\frac{1}{\beta}}(\alpha+\beta)\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}\lambda^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} - \theta\left(\left(\frac{\lambda}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

mit $0 < \theta < 1$.

Den Beweis des Lemmas findet man in [2: S. 447–449] ∎

Satz 1: *Seien* $A, B, C > 0$, $0 < \beta < \dfrac{2}{n-1}$, $n \geqq 2$. *Dann gilt für die Anzahl $N(\lambda)$ der positiven ganzen Zahlen x, y, die der Ungleichung*

$$Ay^2 + Bx^{\frac{2}{n-1}} - Cx^\beta \leqq \lambda$$

genügen, die Formel

$$N(\lambda) = \frac{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}}}\lambda^{\frac{n}{2}}$$

$$+\,\theta\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{B^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{\lambda^{\frac{n-3+\beta(n-1)}{2}}}{B^{\frac{n-1}{2}(1+\beta)}} + \frac{\lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}(1+\beta)}}\right)$$

mit geeignet gewähltem $\theta > 0$ und $\lambda \geqq \lambda_0$.

Beweis: Sei $N_0(\lambda)$ die gesuchte Anzahl für den Fall $C = 0$. Unter Verwendung von Lemma 4 gilt

$$N_0(\lambda) = \frac{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}}}\lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{B^{\frac{n-1}{2}}}\right). \tag{15}$$

Sei $C > 0$. Für die entsprechende Anzahl $N(\lambda)$ gilt dann

$$N(\lambda) \leqq N_0(\lambda) + \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^{\left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}}}\left[\left(\lambda - Bx^{\frac{2}{n-1}} + Cx^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\lambda - Bx^{\frac{2}{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$+ \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\beta}{2}}\left(x_0 - \left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right) + C_5x_0 \tag{16}$$

mit $Bx_0^{\frac{2}{n-1}} - Cx_0^{\beta} = \lambda$. Weiter existiert eine Konstante C_6, so daß gilt

$$x_0 \leqq \left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{C_6}{B^{\frac{n-1}{2}(1+\beta)}}\lambda^{\frac{n-3+\beta(n-1)}{2}}. \tag{17}$$

Außerdem finden wir ein C_7, so daß gilt

$$A^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\sqrt{\lambda - Bx^{\frac{2}{n-1}} + Cx^{\beta}} - \sqrt{\lambda - Bx^{\frac{2}{n-1}}}\right)dx$$

$$\leqq C_7A^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}}} x^{\beta}\left(\lambda - Bx^{\frac{2}{n-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx. \tag{18}$$

Durch die Substitution $Bx^{\frac{2}{n-1}} = t$ erhalten wir auf der rechten Seite von (18)

$$\frac{C_7(n-1)}{2A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}(\beta+1)}}\int\limits_0^{\lambda} t^{\beta\left(\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n-3}{2}}(\lambda - t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{C_7(n-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1+\beta(n-1)}{2}\right)}{2A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}(\beta+1)}\,\Gamma\left(\frac{n+\beta(n-1)}{2}\right)}\lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}}. \tag{19}$$

Für den 3. Summanden I_3 auf der rechten Seite von (16) folgt unter Verwendung von (17)

$$I_3 \leqq C_8 \frac{\lambda^{\frac{2n-6+3\beta(n-1)}{4}}}{A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{n-1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\beta\right)}}. \tag{20}$$

Aus den Beziehungen (15), (16), (19) und (20) folgt dann die Behauptung des Satzes ∎

Satz 2: *Das Gebiet Ω genüge den Voraussetzungen von Abschnitt 1. Für die Anzahl der Eigenwerte des selbstadjungierten Operators $\mathcal{A}$, der durch die Bilinearform (4) erzeugt wird und die λ nicht überschreiten, gilt*

1. im Falle $\alpha > 1 + \dfrac{1}{n-1}$

$$N(\lambda) = \frac{\operatorname{mes}(\omega_n)}{(2\pi)^n} \operatorname{mes}(\Omega)\, \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\max\left\{\lambda^{\frac{n-1}{2}+\frac{\beta(n-1)}{4}},\ \lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\right\}\right)$$

und

2. im Falle $1 < \alpha \leqq 1 + \dfrac{1}{n-1}$

$$C_9 \lambda^{\frac{n}{2}} \leqq N(\lambda) \leqq C_{10} \lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} \lambda.$$

Dabei bezeichnen $\operatorname{mes}(\omega_n)$ *das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und β die Ordnung des Restgliedes der Eigenwerte des Laplace-Operators auf G,* $\dfrac{1}{n-1} \leqq \beta < \dfrac{2}{n-1}$, $n \geqq 2$.

Beweis: 1. *Schritt.* Wir zerlegen Ω in die disjunkten Gebiete $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_N$ und Ω_N. Nach dem Variationsprinzip von Courant gilt dann für die Anzahl der Eigenwerte des Operators $\mathcal{A}$

$$N(\lambda, \Omega_0, \mathcal{D}) + N(\lambda, \Omega_N, \mathcal{D}) \leqq N(\lambda) \leqq N(\lambda, \Omega_0, \mathcal{N}) + N(\lambda, \Omega_N, \mathcal{N}),$$

wobei wieder $N(\lambda, \Omega_i, \mathcal{D})$ und $N(\lambda, \Omega_i, \mathcal{N})$ $(i = 0, N)$ die Anzahlen der Eigenwerte des Eigenwertproblems (4) mit Dirichletschen beziehungsweise Neumannschen Randbedingungen bezeichnen. Wählen wir nach Lemma 3 $N = N_0$, so folgt

$$N(\lambda, \Omega_N, \mathcal{N}) \leqq C_2 \lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln \lambda. \tag{21}$$

2. *Schritt.* Das Gebiet Ω_0 zerlegen wir erneut in die Teilgebiete

$$\Omega_{0,k} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega : x_n \in (x_n^{k-1}, x_n^k)\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

so daß

$$P_k = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_n \in (x_n^{k-1}, x_n^k),\ \frac{x_i}{d_k} \in G \quad (i = 1, \ldots, n-1)\right\}$$

ein einbeschriebener und

$$S_k = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : x_n \in (x_n^{k-1}, x_n^k),\ \frac{x_i}{d_{k-1}} \in G\ (i = 1, \ldots, n-1) \right\}$$

ein umbeschriebener Zylinder von $\Omega_{0,k}$ mit $x_n^k = k_m^N$ und $d_k = f(x_n^k)$ wird. Nach dem Variationsprinzip von Courant gilt dann

$$\sum_{k=1}^{m} N(\lambda, P_k, \mathcal{D}) \leqq \sum_{k=1}^{m} N(\lambda, \Omega_{0,k}, \mathcal{D}) \leqq N(\lambda, \Omega_0, \mathcal{D})$$

$$\leqq N(\lambda, \Omega_0, \mathcal{N}) \leqq \sum_{k=1}^{m} N(\lambda, \Omega_{0,k}, \mathcal{N}) \leqq \sum_{k=1}^{m} N(\lambda, S_k, \mathcal{N}). \quad (22)$$

Wir bestimmen zunächst die Anzahlen $N(\lambda, S_k, \mathcal{N})$. Dazu betrachten wir zunächst die Eigenwertverteilung auf G. Es seien $\varphi_j \in C^\infty(\bar{G})$ und λ_j die entsprechenden Eigenfunktionen beziehungsweise Eigenwerte des eingeschränkten Operators $\mathcal{A}$ auf G mit Neumannschen Randbedingungen, d. h.

$$A'[\varphi_j, \varphi_j] = \sum_{i=1}^{n-1} \int_G \left| \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y_i} \right|^2 dy = (\lambda_j - 1) \int_G |\varphi_j(y)|^2\, dy. \quad (23)$$

Auf S_k werden dann die Eigenfunktionen gegeben durch

$$\varphi_{k,j,i}(x) = \varphi_j \left(\frac{x_1}{d_{k-1}}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{d_{k-1}} \right) \cos \frac{\pi i (x_n - x_n^{k-1})}{x_n^k - x_n^{k-1}}$$

und die Eigenwerte durch

$$\tilde{\mu}_{k,j,i} = \mu_{k,j,i} - 1 = \frac{\lambda_j - 1}{d_{k-1}^2} + \frac{i^2 \pi^2 m^2}{N^2}$$

$(j = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, \ldots)$. Unter Verwendung der bekannten Verteilung $N(\lambda)$ für die Anzahl der Eigenwerte auf G nach [3] gilt für die Eigenwerte des Laplace-Operators auf G

$$\left| \lambda_j - a j^{\frac{2}{n-1}} \right| \leqq C_{11} j^\beta \quad (24)$$

mit $a = (2\pi)^2 [\text{mes}\,(G)\ \text{mes}\,(\omega_{n-1})]^{-\frac{2}{n-1}}$, wobei ω_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Einheitskugel bezeichnet und die Konstante β den Ungleichungen $\frac{1}{n-1} \leqq \beta < \frac{2}{n-1}$ genügt. Aus der Bedingung $\tilde{\mu}_{k,j,i} \leqq \lambda$ folgt, daß die Anzahl der Gitterpunkte gesucht wird, die den Beziehungen

$$y \geqq 0,\ x \geqq 1,\ \frac{y^2 \pi^2 m^2}{N^2} + \frac{a x^{\frac{2}{n-1}} - C_{11} x^\beta}{d_{k-1}^2} \leqq \lambda,$$

$$x = 1, 2, \ldots, b \text{ mit } b^{\frac{2}{n-1}} - \frac{C_{11}}{a} b^\beta = \frac{d_{k-1}^2 \lambda}{a},$$

genügen. Verwenden wir Satz 1 mit $A = \frac{\pi^2 m^2}{N^2}$ und $B = \frac{a}{d_{k-1}}$, so ist

$$N(\lambda, S_k, \mathcal{N})$$

$$\leq \frac{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) d_{k-1}^{n-1} N}{2n\pi a^{\frac{n-1}{2}} m} \lambda^{\frac{n}{2}} + C_{12}\left(\frac{N}{\pi m}\lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{d_{k-1}^{n-1}}{a^{\frac{n-1}{2}}}\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right.$$

$$\left. + \frac{d_{k-1}^{(n-1)(1-\beta)}}{a^{\frac{n-1}{2}(1+\beta)}}\lambda^{\frac{n-3+\beta(n-1)}{2}} + \frac{N d_{k-1}^{(n-1)(1-\beta)}}{\pi m a^{\frac{n-1}{2}(1+\beta)}}\lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}}\right)$$

$$\leq \frac{N \operatorname{mes}(\omega_n) \operatorname{mes}(G)\, d_{k-1}^{n-1}}{m(2\pi)^n}\lambda^{\frac{n}{2}}$$

$$+ C_{13}\left(\frac{N}{m}\lambda^{\frac{1}{2}} + d_{k-1}^{n-1}\operatorname{mes}(G)\,\lambda^{\frac{n-1}{2}} + \left(d_{k-1}^{n-1}\operatorname{mes}(G)\right)^{1+\beta}\lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}}\right).$$

Nach Lemma 3 finden wir eine Konstante C_{14} mit $N = C_{14}\lambda^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} \ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\lambda$. Wählen wir nun $m = C_{14}\,\lambda^{\frac{1}{2(\alpha-1)}+\delta} \ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\lambda$ mit $\delta > 0$ und $\delta = \frac{2-\beta(n-1)}{4}$, so gilt $\frac{N}{m} \to 0$ für $\lambda \to \infty$ und für die Summation folgt

$$\sum_{k=1}^{m} N(\lambda, S_k, \mathcal{N})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{N}{m} \operatorname{mes}(G)\, d_{k-1}^{n-1} \frac{\operatorname{mes}(\omega_n)}{(2\pi)^n}\lambda^{\frac{n}{2}} + C_{14}\left(\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(\alpha-1)}}\ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\lambda\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\frac{N}{m}\operatorname{mes}(G)\, d_{k-1}^{n-1}\frac{m}{N}\lambda^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=1}^{m}\frac{N}{m}\left(d_{k-1}^{n-1}\operatorname{mes}(G)\right)^{1+\beta}\frac{m}{N}\lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}}\right).$$

Verwenden wir eine Abschätzung für die Ober- und Untersummen des Integrals über Ω_0, dann erhalten wir die Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} N(\lambda, S_k, \mathcal{N})$$

$$\leq \left(\frac{\operatorname{mes}(\omega_n)\operatorname{mes}(\Omega_0)}{(2\pi)^n} + C_{15}\frac{N}{m}\right)\lambda^{\frac{n}{2}}$$

$$+ C_{16}\left(\lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\lambda + \lambda^{\frac{n-1}{2}+\delta} + \lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}+\delta}\right)$$

$$\leq \frac{\operatorname{mes}(\omega_n)\operatorname{mes}(\Omega_0)}{(2\pi)^n}\lambda^{\frac{n}{2}} + C_{17}\left(\lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\lambda + \lambda^{\frac{n-1}{2}+\frac{\beta(n-1)}{4}}\right)$$

$$\leq \frac{\operatorname{mes}(\omega_n)\operatorname{mes}(\Omega)}{(2\pi)^n}\lambda^{\frac{n}{2}} + C_{18}\left(\lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\ln^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}\lambda + \lambda^{\frac{n-1}{2}+\frac{\beta(n-1)}{4}}\right), \tag{25}$$

wobei die letzte Ungleichung bei Verwendung der Abschätzung für mes (Ω_N) gilt.

3. *Schritt.* Für die Abschätzung nach unten verwenden wir auf P_k die Eigenfunktionen

$$\psi_{k,j,i}(x) = \psi_j\left(\frac{x_1}{d_k}, \dots, \frac{x_{n-1}}{d_k}\right) \sin \frac{\pi i(x_n - x_n^{k-1})}{x_n^k - x_n^{k-1}},$$

wobei ψ_j die Eigenfunktionen auf G von $A'[\psi_j, \psi_j]$ mit Dirichletschen Randbedingungen bezeichnen. Analog werden die Eigenwerte auf P_k gegeben durch

$$\nu_{k,j,i} - 1 = \frac{\nu_j - 1}{d_k^2} + \frac{i^2\pi^2 m^2}{N^2}$$

$(i, j = 1, 2, \dots)$, wobei ν_j die Eigenwerte auf G von $A'[\varphi_j, \psi_j]$ mit Dirichletschen Randbedingungen bezeichnet. Verwenden wir wieder die asymptotische Eigenwertverteilung aus [3] für Dirichletsche Randbedingungen, so folgt nach einer analogen Rechnung

$$N(\lambda, P_k, \mathcal{D}) \geqq \frac{N \operatorname{mes}(\omega_n) \operatorname{mes}(G)\, d_k^{n-1}}{m(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}} - C_{19}\left(\frac{N}{m} \lambda^{\frac{1}{2}} + d_k^{n-1} \operatorname{mes}(G)\, \lambda^{\frac{n-1}{2}} + \left(d_k^{n-1} \operatorname{mes}(G)\right)^{1+\beta} \lambda^{\frac{n-2+\beta(n-1)}{2}}\right).$$

Es sei ν_1 der kleinste Eigenwert von $\mathcal{A}'$ aus (23). Wählen wir nun

$$N = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\lambda}{\nu_1 - 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{und} \quad m = \lambda^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\lambda}{\nu_1 - 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \nu_1 - 1 > 0, \tag{26}$$

so folgt für $x_n > N$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\Omega(x_n)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx > \lambda \int\limits_{\Omega(x_n)} |u|^2\, dx,$$

wobei $\Omega(x_n)$ den Schnitt von Ω mit der Hyperebene $y = x_n$ bezeichnet. Nach Integration der letzten Ungleichung von N bis Unendlich folgt für die Eigenwertverteilung $N(\lambda, \Omega_N, \mathcal{D}) = 0$. Außerdem gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{m} N(\lambda, P_k, \mathcal{D}) \geqq \frac{\operatorname{mes}(\omega_n) \operatorname{mes}(\Omega_0)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}} - C_{20} \lambda^{\frac{n-1}{2} + \frac{\beta(n-1)}{4}}. \tag{27}$$

Unter Verwendung von (26) folgt $\operatorname{mes}(\Omega_N) \leqq C_{21} \left(\frac{\lambda}{\nu_1}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$, so daß für (27) gilt

$$\sum_{k=1}^{m} N(\lambda, P_k, \mathcal{D}) \geqq \frac{\operatorname{mes}(\omega_n) \operatorname{mes}(\Omega)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}} - C_{22} \lambda^{\frac{n-1}{2} + \frac{\beta(n-1)}{4}}. \tag{28}$$

Aus den Ungleichungen (21) und (22) folgt dann bei Verwendung der Ungleichungen (25) und (28) die Behauptung des Satzes ∎

Bemerkung 3: Aus dem 3. Schritt des Beweises folgt die Größe der Konstanten C_9.

LITERATUR

[1] ADAMS, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press: New York—San Francisco—London 1975.
[2] BACHMANN, P.: Zahlentheorie, 2. Teil. Teubner Verlag: Leipzig 1921.
[3] BRÜNING, J.: Zur Abschätzung der Spektralfunktion elliptischer Operatoren. Math. Z. **137** (1974), 75—85.
[4] CLARK, C.: An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacian operator in an unbounded domain. Arch. Rat. Mech. Anal. **31** (1968), 352—356.
[5] HEWGILL, D.: On the eigenvalues of the Laplacian in an unbounded domain. Arch. Rat. Mech. Anal. **27** (1967), 153—164.
[6] РОЗЕНБЛЮМ, Г. В.: О вычислении спектральной асимптотики для оператора Лапласа в областях бесконечной меры. Проблемы мат. анализа (Ленингр. унив.) 4 (1973), 95—106.
[7] МИХАЙЛЕЦ, В. А.: Спектральная асимптотика граничных задач для операторного уравнения Штурма-Лиувилля. Докл. Акад. Наук СССР **228** (1976), 1037—1040.
[8] REED, M., and B. SIMON: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press: New York—San Francisco—London 1978.

Manuskripteingang: 26. 08. 1983

VERFASSER:

Dr. GÜNTER BERGER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10