Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (1) (1985), S. 55–64

Zur Lösbarkeit der Anfangs-Randwertaufgabe $\frac{\partial}{\partial t} u - D(x, t, u) \Delta u = f$ im Sobolew-Raum

J. Heinrich

Gegenstand der Arbeit ist eine quasilineare parabolische Anfangs-Randwertaufgabe, wobei die Werte der betrachteten Funktionen in einem (beliebigen) Hilbert-Raum liegen. Die Ergebnisse einer vorangegangenen Arbeit ermöglichen einen einfachen Zugang. Wir überführen die Aufgabe in ein Fixpunktproblem, das sich mit Hilfe eines bekannten Fixpunktsatzes lösen läßt.

В работе исследуется квазилинейная краевая задача параболического типа для функций, принимающих значения в пространстве Гильберта. С помощью результатов более ранней работы получается простое доказательство существования решения. Для этого проблема переводится в известную задачу о неподвижной точке.

The subject of this paper is a quasilinear parabolic initial-boundary-value problem for functions with values in an arbitrary Hilbert-space. The results of a previous paper permit a simple approach. We transfer the problem into a fixed point problem, which we can solve with the help of a well-known fixed point theorem.

Wir betrachten eine Anfangs-Randwertaufgabe für die quasilineare parabolische Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t} u - D(x, t, u) \Delta u = f$, wobei die Werte der vorkommenden Funktionen in einem (gegebenen) Hilbert-Raum H liegen. Ladyschenskaja, Solonnikow und Uralzewa [8: Kap. VI] untersuchten diese Aufgabe (für $H = \mathbf{R}$) in einem Raum Hölder-stetiger Funktionen. Unter wesentlicher Benutzung verschiedener Aussagen über die lineare Aufgabe $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t) \Delta u = f$ wird die Lösbarkeit dort nach langwierigen Betrachtungen mit Hilfe des Leray-Schauder-Prinzips nachgewiesen. Wir werden die Aufgabe unter entsprechend schwächeren Voraussetzungen in einem Sobolew-Raum behandeln. Die in unserer Arbeit [4] gewonnenen Aussagen über die lineare Aufgabe ermöglichen einen unkomplizierten Zugang, insbesondere können wir auf oft sehr aufwendige a-priori Abschätzungen verzichten. Wir überführen die Aufgabe in eine Fixpunktgleichung, deren Lösbarkeit sich für $H = \mathbf{R}^r$ aus dem Schauderschen Satz ergibt. Der dabei benutzte Einbettungssatz steht im Fall eines unendlichdimensionalen Raumes H nicht zur Verfügung. Es zeigt sich jedoch, daß die Aufgabe auch in diesem Fall, mit Hilfe einiger zusätzlicher Überlegungen und eines allgemeineren Fixpunktsatzes, gelöst werden kann.

Die im ersten Abschnitt formulierte Aufgabenstellung besitzt Modellcharakter. Mögliche Verallgemeinerungen der verwendeten Beweistechnik auf allgemeinere Aufgaben (in divergenzfreier Form) werden am Ende der Arbeit diskutiert. Die in der Arbeit erhaltenen Ergebnisse lassen sich nicht unmittelbar auf Gleichungen in

Divergenzform (wie z. B. $\frac{\partial}{\partial t} u - \triangle(D(x, t, u) \triangle u) = f$) übertragen. Ungeachtet dessen lassen sich solche Gleichungen auf eine prinzipiell ähnliche Weise behandeln. Dies muß jedoch einer späteren Betrachtung vorbehalten bleiben.

1. Bezeichnungen und Aufgabenstellung

Sei G die Abschließung eines beschränkten Gebietes im $\mathbf{R}^n$, wobei wir, sofern nichts anderes gesagt wird, $\partial G \in O^2$ voraussetzen. Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

$$Q_T := G \times [0, T],$$

$$S_T := (\partial G) \times [0, T].$$

Sei H ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ und der Norm $\|\cdot\|_H$. Wir arbeiten mit den Sobolew-Räumen $W^{1,2}(G; H)$, $W_0^{1,2}(G; H)$ und $W_2^{2,1}(Q_T; H)$, die wie in [4: Abschnitte 1 und 5] erklärt sind. Es sei $\|\cdot\|_G^{1,2}$ die Norm in $W^{1,2}(G; H)$, $\|\cdot\|_{2,Q_T}^{2,1}$ die Norm in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ und $\|\cdot\|_{2,Q_T}$ die Norm in $L_2(Q_T; H)$. Mit $\xrightarrow[\text{f.s.}]{}$ bezeichnen wir die Konvergenz fast sicher (für Funktionen, die auf Q_T erklärt sind) und mit $\underset{X}{\rightharpoonup}$ die schwache Konvergenz in einem Banach-Raum X.

Wir formulieren die in dieser Arbeit betrachtete Aufgabenstellung:
(DH) Gesucht ist eine Funktion $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$, für die gilt:

(DH 1) $\frac{\partial}{\partial t} u - D(x, t, u) \Delta u = f,$

(DH 2) $u|_G = g,$

(DH 3) $u|_{S_T} = 0.$

Dabei sind $g \in W_0^{1,2}(G; H)$ und $f \in L_2(G; H)$ gegebene Funktionen. Die Abbildung $D: Q_T \times H \to [k, K]$ mit $0 < k \leq K$ ist gegeben und genüge folgenden Voraussetzungen: Für fast alle $(x, t) \in Q_T$ ist $D(x, t, \cdot)$ verstärkt stetig; für alle $y \in H$ ist $D(\cdot, \cdot, y)$ meßbar. Die Beziehung (DH 1) ist als Gleichung im Sinne des $L_2(Q_T; H)$ aufzufassen. Ist $u \in L_2(Q_T; H)$ fixiert, so bezeichnen wir die durch $(x, t) \mapsto D(x, t, u(x, t))$ gegebene Funktion $Q_T \to [k, K]$ einfach mit $D(u)$.

2. Einige vorbereitende Aussagen

Wir beginnen mit einigen Aussagen, die sich leicht aus den in [4] enthaltenen Ergebnissen gewinnen lassen.

Definition 1: Sei $a := \frac{1}{2}(k + K)$. Ist $g \in W_0^{1,2}(G; H)$, so bezeichnen wir mit $u_{0,g}$ die Lösung der in [4] behandelten Aufgabe (AH) für $h(x, t) := a$ und $f(x, t) \equiv 0$. Für $f \in L_2(Q_T; H)$ sei $u_{1,f}$ die Lösung von (AH) für $h(x, t) := a$ und $g = 0$.

Definition 2: Sei $h: Q_T \to [k, K]$ eine meßbare Funktion. Wir definieren $S_h: W_2^{2,1}(Q_T; H) \to W_2^{2,1}(Q_T; H)$ gemäß $S_h u := u_{1,(h-a)\Delta u}$.

Bemerkung 1: Wir wollen zunächst vermerken, daß jedes $u \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ mit $u = u_{0,g} + u_{1,f} + S_{D(u)} u$ die Aufgabe (DH) löst. Aus der Gültigkeit der angegebenen Beziehung folgt zunächst $u|_G = g$ und $u|_{S_T} = 0$. Weiter ist $\frac{\partial}{\partial t} u - a\Delta u = f$

$+ (D(u) - a) \Delta u$, d. h. $\frac{\partial}{\partial t} u - D(u) \Delta u = f$. Dabei beachten wir, daß $D(u)$ nach einem bekannten Sachverhalt (vgl. z. B. [7: S. 195]) eine meßbare Funktion ist.

Lemma 1: *Sei $u_0 \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$, dann gibt es genau ein $v \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ mit $v = u_0 + S_h v$. Dabei ist*

$$\|v\|_{2.Q_T}^{2.1} \leqq \gamma \|u_0\|_{2.Q_T}^{2.1}$$

mit einer nur von k und K, nicht aber von h abhängigen Konstanten.

Beweis: a) Sei $v_0 \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ die nach [4: Satz 5][1]) existierende Lösung der Aufgabe (AH) für $g = 0$ und $f = (h - a) \Delta u_0$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial t} v_0 - a\Delta v_0 = (h - a) \times \Delta(u_0 + v_0)$, d. h. $v_0 = S_h(v_0 + u_0)$. Somit ist $v := v_0 + u_0$ die gesuchte Funktion. Die angegebene Ungleichung folgt aus [4: Lemma 10].

b) Sei $v_1 = u_0 + S_h v_1$ und $v_2 = u_0 + S_h v_2$. Dann ist $v_1 - v_2 = S_h(v_1 - v_2)$, d. h. $v_1 - v_2$ ist Lösung von (AH) mit $g = 0$ und $f = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung von (AH) folgt $v_1 = v_2$ ∎

Lemma 2. *Sei $h_m: Q_T \to [k, K]$ und gelte $h_m \xrightarrow[\text{f.s.}]{} h$. Ist $v_m = u_0 + S_{h_m} v_m$ und $v = u_0 + S_h v$, so gilt $\|v_m - v\|_{2.Q_T}^{2.1} \to 0$.*

Beweis: Nach dem Beweis von Lemma 1 ist $v_m = v_{0,m} + u_0$ und $v = v_0 + u_0$, wobei $v_{0,m}$ bzw. v_0 die Lösungen von (AH) für die Koeffizientenfunktionen h_m bzw. h und $g = 0$ sowie $f_m = (h_m - a) \Delta u_0$ bzw. $f = (h - a) \Delta u_0$ sind. Wegen $\|f_m - f\|_{2.Q_T} \to 0$ (großer Lebesguescher Satz) folgt die Behauptung aus [4: Lemmata 10 und 11] ∎

Im Fall $H = \mathbf{R}$ oder auch $H = \mathbf{R}^r$ ($r \in \mathbf{N}$) erhalten wir die Lösbarkeit der in Bemerkung 1 angegebenen Beziehung leicht aus dem Schauderschen Fixpunktsatz. Wir betrachten dazu die weiter unten auch benutzte Abbildung $P: L_2(Q_T; H) \to W_{2,1}^2(Q_T; H) \subseteq L_2(Q_T; H)$ gemäß $Pu := (Id - S_{D(u)})^{-1} (u_{0,g} + u_{1,f})$, wobei Id die identische Abbildung $W_2^{2,1}(Q_T; H) \to W_2^{2,1}(Q_T; H)$ ist. Aus den Lemmata 1 und 2 ergibt sich, daß P stetig ist und eine hinreichend große Kugel in sich abbildet. (Die zugehörigen Überlegungen sind im Beweis von Satz 2 enthalten; wir wollen an dieser Stelle nicht extra darauf eingehen.) Die Kompaktheit von P erhält man aus dem bekannten Einbettungssatz von Rellich-Kondraschow (vgl. z. B. [1: Abschnitt VI.1] oder [9: Abschnitt 1.3.6]). Da der genannte Einbettungssatz im Fall eines beliebigen Hilbert-Raumes H nicht zur Verfügung steht, beweisen wir zunächst die folgende, vorbereitende Aussage. Im dritten Abschnitt zeigen wir dann die Existenz eines Fixpunktes von P mit Hilfe einer von Daneš [2] stammenden Verallgemeinerung des Schauderschen Fixpunktsatzes.

Satz 1: *Sei $\Omega \subseteq \mathbf{R}^r$ ein beschränktes Gebiet, das die Konuseigenschaft besitzt und sei $(f_m) \subseteq W^{1,2}(\Omega; H)$ beschränkt. Dann gibt es ein $f \in L_2(\Omega; H)$ und eine (wieder mit (f_m) bezeichnete) Teilfolge von (f_m), so daß folgende Aussagen gelten:*

1. *Für alle $u \in H'$ ist $\|uf_m - uf\|_{2,\Omega} \to 0$.*
2. *Für fast alle $x \in \Omega$ gilt $f_m(x) \xrightarrow[H]{} f(x)$.*

Beweis: a) mit $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ bezeichnen wir (in diesem Beweis) die Norm im Raum $L_2(\Omega; \mathbf{R}) = L_2(\Omega)$, mit $\|\cdot\|_{2,\Omega,H}$ die Norm in $L_2(\Omega; H)$. Wir werden die Elemente von

---

[1]) Wir verweisen stets auf die entsprechenden Aussagen für reellwertige Lösungen, die, wie in [4: Bem. 7] angegeben, auch für Hilbert-Raum-wertige Lösungen gültig sind.

H und die des Dualraumes H' wie üblich identifizieren. Sei (u_k) ein vollständiges Orthonormalsystem in H. (Da die Elemente der Folge (f_m) als meßbare Funktionen ein separables Bild besitzen, können wir annehmen, daß H separabel ist.)

b) Da der Raum $L_2(\Omega; H)$ reflexiv ist, gibt es ein $f \in L_2(\Omega; H)$ und eine (wieder mit (f_m) bezeichnete) Teilfolge von (f_m), so daß $f_m \xrightarrow[L_2(\Omega;H)]{} f$ gilt.

c) Sei $H_k := \{\lambda u_k \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ und $P_k\colon L_2(\Omega; H) \to L_2(\Omega; H_k)$ gemäß $(P_k q)(x) := (q(x), u_k)_H u_k$. Dann ist P_k die Orthogonalprojektion von $L_2(\Omega; H)$ auf $L_2(\Omega; H_k)$. Tatsächlich, sei etwa $q \in L_2(\Omega; H)$ und $g \in L_2(\Omega; H_k)$, dann ist

$$(P_k q - q, g)_{L_2(\Omega;H)} = \int_\Omega \big((P_k q)(x) - q(x), g(x)\big)_H \, dx = 0.$$

d) Sei $k \in \mathbf{N}$ fixiert. Dann ist die Folge $(P_k f_m)$ im Raum $W^{1,2}(\Omega; H_k)$ beschränkt. (Man beachte dazu die Gültigkeit der Beziehung $\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f(x), u_k\big)_H u_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x), u_k\right)_H u_k$.) Aus dem bereits zitierten Satz von RELLICH-KONDRASCHOW folgt die Existenz eines $\alpha_1 \in L_2(\Omega; H_1)$ und einer Teilfolge, so daß $\|P_1 f_m - \alpha_1\|_{2,\Omega,H_1} \to 0$ gilt. Wiederum nach dem Satz von RELLICH-KONDRASCHOW existiert ein $\alpha_2 \in L_2(\Omega; H_2)$ und eine Teilfolge der eben betrachteten Folge, so daß $\|P_2 f_m - \alpha_2\|_{2,\Omega,H_2} \to 0$ gilt usw. Mit Hilfe des Diagonalverfahrens konstruiert man daraus eine (abermals mit (f_m) bezeichnete) Teilfolge von (f_m), so daß $\|P_k f_m - \alpha_k\|_{2,\Omega,H_k} \to 0$ für jedes $k \in \mathbf{N}$ gilt.

e) Laut Beweisschritt b) ist $f_m \xrightarrow[L_2(\Omega;H)]{} f$. Da jeder lineare, stetige Operator eines Banach-Raumes in sich bezüglich der schwachen Topologie stetig ist, folgt $P_k f_m \xrightarrow[L_2(\Omega;H)]{} P_k f$ $(k \in \mathbf{N})$. Insbesondere ist $P_k f_m \xrightarrow[L_2(\Omega;H_k)]{} P_k f$ $(k \in \mathbf{N})$. Zusammen mit dem Beweisschritt d) folgt daraus die Gültigkeit von $P_k f = \alpha_k$ für jedes $k \in \mathbf{N}$. Insbesondere ist $\|u_k f_m - u_k f\|_{2,\Omega} \to 0$.

f) Nach einem bekannten Sachverhalt gibt es eine (erneut mit (f_m) bezeichnete) Teilfolge, so daß $u_1 f_m(x) \to u_1 f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt, analog für u_2, u_3 usw. Wiederum durch Anwendung des Diagonalverfahrens konstruiert man daraus eine Teilfolge, so daß für fast alle $x \in \Omega$ und alle $k \in \mathbf{N}$ gilt $u_k f_m(x) \to u_k f(x)$.

g) Für alle $u \in H'$ mit der Darstellung $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ gilt die Aussage 1 und die Aussage

2'. Für fast alle $x \in \Omega$ ist $u f_m(x) \to u f(x)$. Dies ergibt sich unmittelbar aus den Beweisschritten e) und f). Sei nun $(u^j) \subseteq H'$ mit $u^j \to u$ und für jedes u^j seien die Aussagen 1 und 2' erfüllt. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} &\|u f_m - u f\|_{2,\Omega} \\ &\leqq \|u f_m - u^j f_m\|_{2,\Omega} + \|u^j f_m - u^j f\|_{2,\Omega} + \|u^j f - u f\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\|u f_m - u^j f_m\|_{2,\Omega} \leqq \|u - u^j\|_H \, \|f_m\|_{2,\Omega,H},$$

$$\|u^j f_m - u^j f\|_{2,\Omega} \to 0 \quad \text{für } m \to \infty \quad \text{und}$$

$$\|u^j f - u f\|_{2,\Omega} \leqq \|u - u^j\|_H \, \|f\|_{2,\Omega,H},$$

also $\|u f_m - u f\|_{2,\Omega} \to 0$.

Analog erhalten wir:

$$\begin{aligned} &|u f_m(x) - u f(x)| \\ &\leqq |u f_m(x) - u^j f_m(x)| + |u^j f_m(x) - u^j f(x)| + |u^j f(x) - u f(x)|. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$|uf_m(x) - u^j f_m(x)| \leqq \|u - u^j\|_H \, \|f_m(x)\|_H,$$

$$|u^j f_m(x) - u^j f(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad m \to \infty \quad \text{und}$$

$$|u^j f(x) - uf(x)| \leqq \|u - u^j\|_H \, \|f(x)\|_H.$$

Hierzu beachten wir, daß $\|f_m(x)\|_H$ für fast alle $x \in \Omega$ beschränkt ist — wegen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|f_m\|_H = \|f_m\|_H^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_m, f_m\right)_H$$

ist

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \|f_m\|_H \right\|_{2,\Omega} \leqq \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} f_m \right\|_{2,\Omega,H}.$$

Damit ist $\|f_m\|_H$ im Raum $W^{1,2}(\Omega)$ beschränkt. Nach dem bereits mehrfach benutzten Einbettungssatz existiert ein $g \in L_2(\Omega)$, so daß (wiederum nach Übergang zu einer Teilfolge) $\|\|f_m\|_H - g\|_{2,\Omega} \to 0$ und $\|f_m(x)\|_H \xrightarrow[\text{f.s.}]{} g(x)$ gilt. Es folgt $uf_m(x) \xrightarrow[\text{f.s.}]{} uf(x)$ ∎

3. Die Lösbarkeitsaussage für (DH)

Wir beweisen nun einen Existenzsatz für die Aufgabe (DH).

Satz 2: *Die Aufgabe* (DH) *besitzt eine Lösung in* $W_2^{2,1}(Q_T; H)$.

Beweis: 1. Wir zeigen, daß die Gleichung $u = u_0 + S_{D(u)}u$ für jedes $u_0 \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ eine Lösung in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ besitzt.

a) Ist $A \subseteq L_2(Q_T; H)$, so bezeichnen wir mit $\overline{\text{Conv}}\, A$ die Abschließung der konvexen Hülle im Raum $L_2(Q_T; H)$. Wir betrachten die Abbildung $P: L_2(Q_T; H) \to W_2^{2,1} \times (Q_T; H) \subseteq L_2(Q_T; H)$ gemäß $Pu := (Id - S_{D(u)})^{-1} u_0$. Nach Lemma 1 ist $P(L_2(Q_T; H))$ beschränkt in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$, also auch in $L_2(Q_T; H)$. Insbesondere gibt es eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge $M \subseteq L_2(Q_T; H)$ mit $P(M) \subseteq M$.

b) $P: L_2(Q_T; H) \to L_2(Q_T; H)$ ist stetig. Ist nämlich $\|u_m - u\|_{2,Q_T} \to 0$, so ist zunächst $u_m \xrightarrow[\text{f.s.}]{} u$ für eine Teilfolge von (u_m). Auf Grund der Voraussetzungen bezüglich D ist dann $D(u_m) \xrightarrow[\text{f.s.}]{} D(u)$. Aus Lemma 2 folgt $\|Pu_m - Pu\|_{2,Q_T}^{2,1} \to 0$, insbesondere $\|Pu_m - Pu\|_{2,Q_T} \to 0$.

c) P^2 ist kompakt. Zum Beweis wählen wir eine Folge $(u_m) \subseteq L_2(Q_T; H)$. Nach Lemma 1 ist (Pu_m) in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ beschränkt. Nach Satz 1 gibt es eine (mit (Pu_m) bezeichnete) Teilfolge von (Pu_m) und ein $v \in L_2(Q_T; H)$, so daß $(Pu_m)(x, t) \xrightarrow[H]{} v(x, t)$ für fast alle $(x, t) \in Q_T$ gilt. Laut Voraussetzung ist dann $D(Pu_m) \xrightarrow[\text{f.s.}]{} D(v)$ und aus Lemma 2 folgt $\|P^2 u_m - Pv\|_{2,Q_T} \to 0$.

d) Es gibt eine nichtleere Menge $K_0 \subseteq M$ mit $K_0 \subseteq \overline{\text{Conv}}\, P(K_0)$. Tatsächlich, wir wählen $K_0 := \{u \in M \mid P^2 u = u\}$. Nach dem Satz von Schauder ist $K_0 \neq \emptyset$. Ist $u \in K_0$, d. h. $u = P^2 u$, so ist $Pu = PP^2 u = P^2 Pu$, also $Pu \in K_0$. Somit ist $u \in P(K_0)$, also $K_0 \subseteq P(K_0)$.

e) Sei nun $A \subseteq M$ mit $A = \overline{\text{Conv}}\, P(A)$. Dann ist A kompakt. Zum Beweis dieser Aussage führen wir folgende Überlegung durch: Nach Lemma 1 ist $P(A)$ und damit auch $\text{Conv}\, P(A)$ in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ beschränkt. Sei nun (v_m) eine Folge aus A. Zunächst gibt es eine Folge $(w_m) \subseteq \text{Conv}\, P(A)$ mit $\|v_m - w_m\|_{2,Q_T} \leqq \frac{1}{m}$. Ferner gibt es nach Satz 1 ein $u \in L_2(Q_T; H)$ und eine Teilfolge von (w_m), so daß $w_m(x, t) \xrightarrow[H]{} u(x, t)$ für fast alle $(x, t) \in Q_T$ gilt. Wegen $\|v_m(x, t) - w_m(x, t)\|_H \to 0$ ist deshalb $v_m(x, t) \xrightarrow[H]{} u(x, t)$ für fast alle $(x,t) \in Q_T$. Laut Voraussetzung ist dann $D(v_m) \xrightarrow[\text{f.s.}]{} D(u)$ und aus Lemma 2 folgt $\|Pv_m - Pu\|_{2,Q_T} \to 0$. Damit ist $P(A)$ und deshalb auch A kompakt.

f) Mit a), b), d) und e) sind die Voraussetzungen eines bekannten Fixpunktsatzes von DANEŠ [2] (vgl. auch HAHN [3: Folg. 1.4 und Theorem 1.5]) erfüllt. Dieser Satz liefert die Existenz eines $u \in L_2(Q_T; H)$ mit $u = Pu$ (wegen $P(L_2(Q_T; H)) \subseteq W_2^{2,1}(Q_T; H)$ ist sogar $u \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$, d. h. $u = (Id - S_{D(u)})^{-1} u_0$, also $u = u_0 + S_{D(u)}u$.

2. Auf Grund des ersten Abschnittes dieses Beweises gibt es ein $u \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ mit $u = u_{0,g} + u_{1,f} + S_{D(u)}u$. Nach Bemerkung 1 ist u Lösung der Aufgabe (DH) ∎

4. Zur Eindeutigkeit der Lösung

In [8] wird eine Aufgabe der hier betrachteten Art für $H = \mathbf{R}$ und unter stärkeren Voraussetzungen an g, f und D in einem Raum Hölder-stetiger Funktionen untersucht. Dort wird neben der Existenz der Lösung auch deren Eindeutigkeit in dem betrachteten Raum nachgewiesen. Die zum Nachweis der Eindeutigkeit durchgeführte Standardüberlegung (vgl. [8: Kap. V/Bew. von Theorem 6.1 und Kap. VI/Theorem 4.1]) ist an „günstige" Eigenschaften der Funktion Δv (für v aus dem betrachteten Funktionenraum) gebunden und führt im hier interessierenden Fall nicht zum Ziel.

Hängt die Funktion D Lipschitz-stetig von u ab und ist $H = \mathbf{R}$ sowie $n = 1$ (d. h. $G \subseteq \mathbf{R}^1$), so ist die Lösung von (DH) in $W_2^{2,1}(Q_T)$ eindeutig. Dies ergibt sich aus den von HENTZSCHEL [5] durchgeführten Überlegungen. (Der Beweis wird dort für stetig differenzierbares D geführt, benutzt aber nur deren Lipschitz-Stetigkeit; vgl. [5: Teil a) des Beweises von Satz 8] — Teil b) des Beweises, in dem lediglich die Stetigkeit von D vorausgesetzt wird, ist fehlerhaft.) Der Beweis stützt sich wesentlich auf die Tatsache, daß die Elemente des Raumes $W_2^{2,1}(Q_T)$ (mit dem in [5] allerdings nur „indirekt" gearbeitet wird) für $n = 1$ stetige Funktionen sind und daß sich die $C(Q_T)$-Norm der Lösung für $g = 0$ in geeigneter Weise gegen die $L_2(Q_T)$-Norm der rechten Seite f abschätzen läßt. Eine Zusammenfassung der in [5] erhaltenen Ergebnisse findet man auch in [6]. Für den hier betrachteten allgemeineren Fall erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 3: *Es gebe eine Konstante $L > 0$, so daß für fast alle $(x, t) \in Q_T$ und alle $y_1, y_2 \in H$ die Ungleichung*

$$|D(x, t, y_1) - D(x, t, y_2)| \leqq L \|y_1 - y_2\|_H$$

erfüllt ist. Besitzt die Aufgabe (DH) *eine Lösung $v \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$, so daß für ein $c > 0$ und fast alle $x \in G$*

$$\left(\int_0^T \|\Delta v(x, t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2} \leqq c$$

gilt, so besitzt (DH) *in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ keine weitere Lösung.*

Beweis: a) Sei $u \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ eine weitere Lösung von (DH). Dann ist $\frac{\partial}{\partial t}(u - v) - D(u)\,\Delta(u - v) = (D(u) - D(v))\,\Delta v$ mit $(u - v)|_G = 0$ und $(u - v)|_{S_T} = 0$. Nach [4: Lemma 9] gibt es Konstanten α, $T_0 > 0$, so daß für jedes $T_1 \in (0, \min\{T, T_0\}]$ die Beziehung

$$\|u - v\|_{2,Q_{T_1}}^{2,1} \leqq \alpha \, \|(D(u) - D(v))\,\Delta v\|_{2,Q_{T_1}}$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u-v)\right\|_{2,Q_{T_1}} \leqq \alpha \left\|(D(u)-D(v))\,\Delta v\right\|_{2,Q_{T_1}}.$$

b) Sei $T_2 := \min\left\{T, T_0, \frac{1}{2}(\alpha Lc)^{-2}\right\}$. Seien weiter $M_1, M_2 \subseteq G$ gemäß

$$M_1 := \left\{x \in G \,\middle|\, \left(\int_0^{T_2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-v(x,t))\right\|_H^2 dt\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\leqq \alpha\left(\int_0^{T_2}\|(D(x,t,u)-D(x,t,v))\,\Delta v(x,t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}\right\}$$

und $M_2 := G \setminus M_1$.

c) Für $x \in M_1$ können wir abschätzen:

$$\sup_{t\in[0,T_2]}\|u(x,t)-v(x,t)\|_H \leqq \int_0^{T_2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-v(x,t))\right\|_H dt$$

$$\leqq \left(\int_0^{T_2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-v(x,t))\right\|_H^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{T_2}dt\right)^{1/2}$$

$$\leqq \alpha T_2^{1/2}L\sup_{t\in[0,T_2]}\|u(x,t)-v(x,t)\|_H\left(\int_0^{T_2}\|\Delta v(x,t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leqq Lc\alpha T_2^{1/2}\sup_{t\in[0,T_2]}\|u(x,t)-v(x,t)\|_H.$$

Es folgt $u(x,t) = v(x,t)$ für $t \in [0, T_2]$.

d) Aus c) folgt unter der Annahme, daß M_2 ein positives Maß besitzt:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u-v)\right\|_{2,Q_{T_2}}^2 = \int_{M_2}\int_0^{T_2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u-v)\right\|_H^2 dt\,dx$$

$$> \alpha^2\int_{M_2}\int_0^{T_2}\|(D(u)-D(v))\,\Delta v\|_H^2\,dt\,dx = \alpha^2\,\|(D(u)-D(v))\,\Delta v\|_{2,Q_{T_2}}^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zu a), somit ist M_2 eine Nullmenge. Wegen c) ist dann $u = v$ für fast alle $x \in G$ und $t \in [0, T_2]$.

e) Die Fortsetzung dieser Überlegung ergibt die Behauptung ∎

5. Einige Verallgemeinerungen

Wir wollen uns nun noch einer Aufgabe (D'H) zuwenden, die aus (DH) dadurch entsteht, daß an Stelle von (DH 1) die Gültigkeit der Differentialgleichung (D'H 1)

$$\frac{\partial}{\partial t}u - D(x,t,u)\,\Delta u + \sum_{i=1}^{n} D_i(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x_i}u + D_0(x,t,u)\,u = f$$

gefordert wird. Dabei seien die Abbildungen $D_i: Q_T \times H \to \mathbf{R}$ beschränkt, d. h., es gelte $|D_i(x, t, y)| \leqq c$ $(0 \leqq i \leqq n)$. Analog zu den Voraussetzungen an D seien die Abbildungen $D_i(x, t, \cdot)$ verstärkt stetig für fast alle $(x, t) \in Q_T$ und $D_i(\cdot, \cdot, y)$ meßbar für alle $y \in H$. D erfülle die bisherigen Voraussetzungen.

Unter Ausnutzung der in [4] und in dieser Arbeit vorgestellten Technik können wir leicht eine Lösbarkeitsaussage für diese Aufgabe gewinnen. Wir beschäftigen uns zunächst mit einigen Eigenschaften der Lösung der in [4: Bem. 8] betrachteten Aufgabe. Die Funktion $\bar{h}$ aus [4] bezeichnen wir hier mit h_0.

Lemma 3: *Es gibt ein $T_1 > 0$, so daß für $T \leqq T_1$ die Lösung u der in* [4: *Bem.* 8] *betrachteten Aufgabe (für $g = 0$) die Ungleichung $\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \alpha \|f\|_{2,Q_T}$ erfüllt. Dabei ist α von f, h, h_i $(0 \leqq i \leqq n)$ und T unabhängig.*

Beweis: Seien $A: {}^0W_2^{2,1}(Q_T; H) \to L_2(Q_T; H)$ und $R: L_2(Q_T; H) \to {}^0W_2^{2,1}(Q_T; H)$ die in [4: Bem. 8] definierten Operatoren, nach der es auch ein $T_1 > 0$ gibt, so daß $\|AR - Id\| < 1$ und $\|RA - Id\| < 1$ für $T \leqq T_1$ gilt. Damit ist $A^{-1}f = R(AR)^{-1} f$ $= R\left(\sum_{i=0}^{\infty} (Id - AR)^i f\right)$ (vgl. auch [4: Teil a) des Beweises von Satz 4]). Es folgt

$$\|A^{-1}f\|_{2,Q_{T_1}}^{2,1} \leqq \|R\| \, (1 - \|Id - AR\|)^{-1} \, \|f\|_{2,Q_{T_1}}.$$

Dabei beachten wir, daß sich $\|R\|$ durch eine Zahl abschätzen läßt, die nur von k und K abhängig ist. $\|Id - AR\|$ läßt sich durch eine Zahl abschätzen, die nur von k, K und c abhängt. Insbesondere gelten diese Abschätzungen gleichmäßig für alle $T \in (0, T_1]$ ∎

Bemerkung 2: Analog zu [4: Lemma 10] überträgt man die Aussage von Lemma 3 auf beliebiges $T_1 \in (0, \infty)$.

Folgerung 1: *Sei $h^m \xrightarrow[\text{f.s.}]{} h$ und $h_i^m \xrightarrow[\text{f.s.}]{} h_i$. Sind u^m bzw. u die zu den Koeffizienten h^m, h_i^m bzw. h, h_i gehörenden Lösungen (wobei wir voraussetzen, daß für h^m und h_i^m dieselben Abschätzungen gelten wie für h und h_i), so ist $\|u^m - u\|_{2,Q_T}^{2,1} \to 0$.*

Dies ergibt sich durch praktisch wörtliche Wiederholung der in [4: Lemma 11] angegebenen Überlegung aus der eben betrachteten Abschätzung ∎

Satz 4: *Aufgabe* (D'H) *besitzt eine Lösung in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$.*

Beweis: a) Wir definieren $S_{h,h_i}: W_2^{2,1}(Q_T; H) \to W_2^{2,1}(Q_T; H)$ gemäß

$$S_{h,h_i}u := u_{1,(h-a)\Delta u - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} u - h_0 u}$$

Mit Hilfe von Bemerkung 2 und Folgerung 1 erhalten wir wie in den Beweisen der Lemmata 1 und 2 die folgenden Aussagen:

a1) Für alle $u_0 \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ gibt es genau ein $v \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ mit $v = u_0 + S_{h,h_i}v$. Dabei ist $\|v\|_{2,Q_T}^{2,1} \leqq \gamma \|u_0\|_{2,Q_T}^{2,1}$ mit einer von u_0, h und h_i unabhängigen Konstanten γ.

a2) Sei $h^m \xrightarrow[\text{f.s.}]{} h$ und $h_i^m \xrightarrow[\text{f.s.}]{} h_i$. Ist $v_m = u_0 + S_{h^m,h_i^m}v_m$ und $v = u_0 + S_{h,h_i}v$, so gilt

$$\|v_m - v\|_{2,Q_T}^{2,1} \to 0.$$

b) Wir betrachten nun die Abbildung $P: L_2(Q_T; H) \to L_2(Q_T; H)$ gemäß

$$Pu := (Id - S_{D(u),D_i(u)})^{-1} (u_{0,g} + u_{1,f}).$$

Mit Hilfe der Aussagen a 1) und a 2) erhalten wir die Existenz eines Fixpunktes von P durch praktisch wörtliche Wiederholung der Überlegungen aus dem Beweis von Satz 2 ∎

Bemerkung 3: Seien $D(x, t, \cdot)$ und $D_i(x, t, \cdot)$ Lipschitz-stetig (in dem in Satz 3 angegebenen Sinn). Besitzt (D'H) eine Lösung $v \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$, so daß für ein $c > 0$ und fast alle $x \in G$ die Ungleichungen

$$\left(\int_0^T \|\Delta v(x,t)\|_H^2\, dt\right)^{1/2} \leqq c, \quad \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t)\right\|_H^2 dt\right) \leqq c,$$

und

$$\left(\int_0^T \|v(x,t)\|_H^2\, dt\right)^{1/2} \leqq c$$

gelten, so besitzt (D'H) in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ keine weitere Lösung. Diese Aussage erhält man, mit Hilfe der Aussage a 1) aus dem Beweis von Satz 4, wie im Beweis von Satz 3.

Bemerkung 4: Liegt in (DH) (oder (D'H)) an Stelle von (DH 2) und (DH 3) die Anfangs-Randbedingung $u|_{G \cup S_T} = \varphi$ vor, so ist die Aufgabe in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ genau dann lösbar, wenn φ eine Fortsetzung $u_\varphi \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ besitzt. Die Notwendigkeit der Bedingung ist zunächst offensichtlich. Sei nun $u_{2,\varphi} \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$ die nach [4: Bem. 9] existierende Funktion mit $\frac{\partial}{\partial t} u_{2,\varphi} - a\Delta u_{2,\varphi} = 0$ und $u_{2,\varphi}|_{G \cup S_T} = \varphi$. Die Lösung der Aufgabe erhalten wir als Lösung der Fixpunktgleichung $u = (Id - S_{D(u)})^{-1} \times (u_{2,\varphi} + u_{1,f})$, die nach der im Teil 1 des Beweises von Satz 2 bewiesenen Aussage existiert.

Bemerkung 5: Die in dieser Arbeit benutzte Beweistechnik läßt sich für $H = \mathbf{R}^r$ ($r \in \mathbf{N}$) ohne Schwierigkeiten auf den allgemeineren Fall übertragen, daß die Koeffizienten D und D_i in (D'H) zusätzlich stetig von den ersten Ortsableitungen der gesuchten Funktion abhängen. Der dazu analog zu Teil b) des Beweises von Satz 4 zu definierende Operator P ist für

$$u \in W_2^{1,0}(Q_T; H) := \left\{u: Q_T \to H \mid \|u\|_{2,Q_T}^{1,0} := \|u\|_{2,Q_T} + \max_{1 \leq i \leq n} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u\right\|_{2,Q_T} < \infty\right\}$$

erklärt. Wir betrachten das Fixpunktproblem $Pu = u$ in diesem Raum. Für $H = \mathbf{R}^r$ ist die Einbettung $W_2^{2,1}(Q_T; H) \subseteq W_2^{1,0}(Q_T; H)$ kompakt. Dies ergibt sich aus bekannten Sätzen über anisotrope Räume (s. z. B. [10: Abschnitte 6.2, 7.7 sowie Punkt 4.3.6 des Anhangs]). Hingegen bleibt die Frage offen, ob eine zu Satz 1 analoge Aussage für die Einbettung $W_2^{2,1}(Q_T; H) \subseteq W_2^{1,0}(Q_T; H)$ ($\dim H = \infty$) gilt. Der Beweis von Satz 1 läßt sich nicht unmittelbar auf diese Situation übertragen.

Mit Hilfe der zweiten Ungleichung aus [4: Lemma 9] erhält man durch Wiederholung der in Satz 3 verwendeten Beweisidee folgende Aussage: sind D und D_i Lipschitz-stetig von u und ∇u abhängig, d. h.

$$|D(x, t, y_1, z_1^1, \ldots, z_1^n) - D(x, t, y_2, z_2^1, \ldots, z_2^n)|$$
$$\leqq L(\|y_1 - y_2\|_H + \max_{1 \leq i \leq n} \|z_1^i - z_2^i\|_H)$$

(analog für D_i), und besitzt die Aufgabe eine Lösung $v \in W_2^{2,1}(Q_T; H)$, für die $v, \frac{\partial}{\partial x_i} v, \Delta v \in L_\infty(Q_T; H)$ gilt, so besitzt die Aufgabe in $W_2^{2,1}(Q_T; H)$ keine weitere Lösung.

Bemerkung 6: Alle in dieser Arbeit angegebenen Aussagen bleiben gültig, wenn G ein (nicht notwendig achsenparalleler) Würfel ist. Die benötigten Aussagen für die lineare Aufgabe können wir dabei direkt den Abschnitten 2 und 3 unserer Arbeit [4] entnehmen, deren Aussagen sich, wie in [4: Bem. 7] angegeben, auf den Fall Hilbert-Raum-wertiger Funktionen übertragen lassen. Dabei ist lediglich zu beachten, daß die Aussagen aus [8], auf die wir uns in [4: Bem. 6] gestützt haben, in diesem Fall nicht zur Verfügung stehen. Wir erhalten die in [4: Bem. 6] angegebene Ungleichung in diesem Fall, indem wir speziell $u_g = u_{0,g}$ wählen; eine Abschätzung $\|u_{0,g}\|_{2,Q_T}^{1} \leqq \delta_1 \|g\|_G^{1,2}$ erhalten wir leicht aus dem Beweis von [4: Lemma 7].

LITERATUR

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. New York—San Francisco—London: Academic Press 1975.

[2] Daneš, J.: Some fixed point theorems. Comment. Math. Univ. Carolinae 9 (1968), 223—235.

[3] Hahn, S.: Zur Bedeutung des Fixpunktsatzes von Schauder für die Fixpunkttheorie nicht notwendig kompakter Abbildungen. Preprint 07-11/12-78. Dresden: Techn. Univ. 1978.

[4] Heinrich, J.: Einige Bemerkungen zur Anfangs-Randwertaufgabe $\frac{\partial}{\partial t} u - h(x, t)\, \Delta u = f$ mit meßbarem Koeffizienten. Z. Anal. Anw. 3 (1984), 457—479.

[5] Hentzschel, J.: Existenzsätze und Berechnungsverfahren für die Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_t - D(u)\, u_{xx} = 0$. Dissertation. Dresden: Techn. Univ. 1974.

[6] Hentzschel, J., und H. Wenzel: Eine Modifikation des Schauderschen Fixpunktsatzes und deren Anwendung auf Existenzprobleme partieller Differentialgleichungen. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 21 (1972), 759—760.

[7] Kamke, E.: Das Lebesgue-Stieltjes Integral. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1960.

[8] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Изд-во Наука 1967.

[9] Mazja, W.: Einbettungssätze für Sobolewsche Räume, Teil 1 (Teubner-Texte Math.: Bd. 21). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1979.

[10] Никольский, С. М.: Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва: Изд-во Наука 1977.

Manuskripteingang: 25. 07. 1983

VERFASSER:

Dipl.-Math. Jörg Heinrich
Sektion Mathematik der Technischen Universität
DDR-8027 Dresden, Zellescher Weg 12—14