Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (2) 1985, S. 97–106

О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для гиперболических уравнений

С. А. Алдашев

In der Arbeit werden in Verallgemeinerung des Darboux-, Goursat- bzw. Cauchyproblems lokale und nichtlokale Randwertaufgaben für hyperbolische Differentialgleichungen untersucht. Unter geeigneten Voraussetzungen über die Daten wird in gewissen Fällen ihre Korrektheit, in anderen ihre eindeutige Lösbarkeit nachgewiesen. Die Unitätssätze werden in hinreichend weiten Funktionenklassen formuliert. Anhand von Beispielen wird die Instabilität der Lösung belegt, falls die den Randdaten aufzuerlegenden Bedingungen verletzt werden.

В работе для гиперболических уравнений исследован ряд локальных и нелокальных краевых задач, которые являются обобщениями задач Дарбу, Гурса и Коши. При некоторых условиях на заданные функции в одних случаях доказана их корректность, а в других — однозначная разрешимость, а также установлены теоремы единственности решения в довольно широком классе функций. Приводятся примеры, показывающие неустойчивость искомого решения, когда нарушаются условия, накладываемые на граничные данные.

The paper deals with local and nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations, which generalize the Darboux, Goursat and Cauchy problems. Under certain conditions on the given functions the correctness of these problems is proved, in other cases the uniqueness of the solution is proved and theorems of uniqueness of the solution in a more wide class of functions are stated. In the paper examples are given, showing the non-stability of the solution if some of the conditions on the boundary data are violated.

1.

Рассмотрим взаимно-сопряженные уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} + a(r, t) \sum_{i=1}^{m} x_i u_{x_i} + b(r, t)\, u_t + c(r, t)\, u = 0, \tag{1}$$

$$\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i a v) - \frac{\partial}{\partial t} (bv) + cv = 0, \tag{1*}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$ $(m \geqq 2)$, $r = |x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, которые часто встречаются в задачах прикладного характера [5, 9, 13]. Через $\mathcal{D}$ обозначим конечную область евклидова пространства E_{m+1} точек (x, t), ограниченная поверхностями $|x| = t + \varepsilon$, $|x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $0 \leqq t \leqq (1 - \varepsilon)/2$, а $0 < \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$, обозначим через S_ε, S_1, S, соответственно. Дла дальнейшего нам удобно перейти от декартовых кооринат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$ $\left(r \geqq 0;\ 0 \leqq \theta_1 < 2\pi,\ 0 \leqq \theta_i \leqq \pi\ (i = 2, 3, \ldots, m-1)\right)$.

Задача 1: Найти регулярное в области $\mathcal{D}$ решение уравнения (1) из классе $C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D} \cup S)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$(\alpha(r)\, u + \beta(r)\, u_t)|_S = \varphi(r, \theta), \qquad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_1(r, \theta) \tag{2}$$

или

$$(\alpha(r)\, u + \beta(r)\, u_t)|_S = \varphi(r, \theta), \qquad u|_{S_1} = \sigma_2(r, \theta). \tag{3}$$

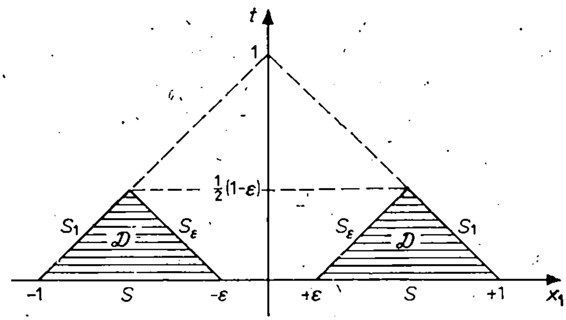

Рис. 1

Задача 2: Найти решение $v(x, t) \in C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D} \cup S) \cap C^2(\mathcal{D})$ уравнения (1*), удовлетворяющее краевым условиям

$$((\alpha - b\beta)\, v + \beta v_t)|_S = \varphi(r, \theta), \qquad v|_{S_1} = \sigma_2(r, \theta) \tag{2*}$$

или

$$((\alpha - b\beta)\, v + \beta v_t)|_S = \varphi(r, \theta), \qquad v|_{S_\varepsilon} = \sigma_1(r, \theta). \tag{3*}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что график функций $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\alpha(r) - b(r, 0)\, \beta(r)$ либо не пересекает ось Or, либо совпадает с ней, причем $\alpha^2(r) + \beta^2(r) \neq 0$ $(r \in [\varepsilon, 1])$, а $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Взаимно-сопряженные задачи 1 и 2 (задача $1/(j)$ сопряжена с задачей $1^*/(j^*)$, $j = 2, 3$) являются обобщениями известных задач Дарбу для уравнений (1), (1*), исследованных в работах [1, 7, 12]. Сформулированные задачи при $a = b = c \equiv 0$ изучались в [2].

В качестве многомерного аналога задачи Гурса может быть рассмотрена следующая

Задача 3: Найти регулярное в области $\mathcal{D}$ решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{\mathcal{D}}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\varepsilon} = \sigma_1(r, \theta), \qquad u|_{S_1} = \sigma_2(r, \theta).$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqq k \leqq k_n$, $(m-2)!\, n!\, k_n = (2n + m - 2)!\, (m + n - 3)!$. Если $m = 2$, то $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система функций $\{\sin n\,\theta, \cos n\,\theta\}$. Далее, пусть $W_2^l(S)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ — пространства Соболева, а $S^\varepsilon = \{(r, \theta) \in S : \varepsilon < r < (1 + \varepsilon)/2\}$.

Имеет место [11]

Лемма: *Если $\sigma(r, \theta) \in W_2^l(S)$ и $l \geqq m - 1$, то ряд*

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_n^k(r)\, Y_{n,m}^k(\theta) \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Через $\varphi_n^k(r)$, $\sigma_{in}^k(r)$ $(i = 1, 2)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно, функций $\varphi(r, \theta)$, $\sigma_i(r, \theta)$ $(i = 1, 2)$. Рассмотрим множества функций $(l \geqq m - 1)$

$$B^l(S) = \{f(r, \theta) \in W_2{}^l(S):$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\|f_n{}^k(r)\|^2_{C([\varepsilon,1])} + \|f_n{}^k(r)\|^2_{C^s([\varepsilon,1])}] (\exp 2 \exp n^3) \exp n^3 < \infty\}$$

и

$$B_0{}^l(S) = \{f(r, \theta) \in W_2{}^l(S):$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\|f_n{}^k(r)\|^2_{C([\varepsilon,1])} + \|f_n{}^k(r)\|^2_{C^s([\varepsilon,1])}] \exp 2n^3 < \infty\}.$$

Пусть $a, b \in C^1(\bar{\mathscr{D}}) \cap C^2(\mathscr{D})$, $c \in C(\bar{\mathscr{D}}) \cap C^1(\mathscr{D})$, $\alpha(r), \beta(r) \in C([\varepsilon, 1]) \cap C^2((\varepsilon, 1))$, тогда справедлива

Теорема 1: (i) *Если* $\varphi(r, \theta) \in B^l(S)$, $\sigma_1(r, \theta) \in B^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_2(r, \theta) \in B^l(S \setminus \bar{S}^\varepsilon)$, *то задачи 1 и 2 поставлены корректно.*

(ii) *Если* $\sigma_1(r, \theta) \in B_0{}^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_2(r, \theta) \in B_0{}^l(S \setminus \bar{S}^\varepsilon)$, *то задача 3 является корректной.*

Теорема 2: *В классе функций* $C^1(\bar{\mathscr{D}}) \cap C^2(\mathscr{D})$ *рассматриваемые задачи имеют не более одного решения.*

Доказательство теоремы 1: Сначала рассмотрим задачу 1/(2). Не нарушая общности положим $\beta(r) \neq 0 (r \in [\varepsilon, 1])$. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \left(\frac{m-1}{r} + r \cdot a\right) u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} + b u_t + c u = 0, \tag{5}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \cdot \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$
$$\left(g_1 = 1;\ g_j = (\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{j-1})^2 \quad (j > 1)\right).$$

Так как искомое решение задачи 1/(2) принадлежит классу $C(\bar{\mathscr{D}}) \cap C^1(\mathscr{D} \cap S) \cap C^2(\mathscr{D})$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} v_n{}^k(r, t)\, Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $v_n{}^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению. Подставляя (6) в (5), затем произведя замену переменных $\xi = (r + t)/2$, $\eta = (r - t)/2$ будем иметь

$$v_{n\xi\eta}^k + a_1(\xi, \eta)\, v_{n\xi}^k + b_1(\xi, \eta)\, v_{n\eta}^k + c_1(\xi, \eta)\, v_n{}^k = 0, \tag{7}$$

где

$$8a_1(\xi, \eta) = \frac{m-1}{\xi + \eta} + (\xi + \eta)\, a(\xi + \eta, \xi - \eta) + b(\xi + \eta, \xi - \eta),$$

$$8b_1(\xi, \eta) = \frac{m-1}{\xi + \eta} + (\xi + \eta)\, a(\xi + \eta, \xi - \eta) - b(\xi + \eta, \xi - \eta),$$

$$4c_1(\xi, \eta) = c(\xi + \eta, \xi - \eta) - \frac{n(n + m - 2)}{(\xi + \eta)^2}.$$

При этом условие (2) для функции $v_n^k(\xi, \eta)$, с учетом выше указанной леммы, перепишется в виде

$$\alpha_1(\xi)\,\tau_n^k(\xi) + \beta_1(\xi)\nu_n^k(\xi) = \bar{\varphi}_n^k(\xi), \quad v_n^k(\xi, \varepsilon/2) = \bar{\sigma}_{1n}^k(\xi), \tag{8}$$

где

$$\alpha_1(\xi) = \alpha(2\xi), \quad \tau_n^k(\xi) = v_n^k(\xi, \xi), \quad \beta_1(\xi) = \sqrt{2}\,\beta(2\xi),$$

$$\nu_n^k(\xi) = \left.\frac{\partial v_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left.\left(\frac{\partial v_n^k}{\partial \xi} - \frac{\partial v_n^k}{\partial \eta}\right)\right|_{\xi=\eta},$$

$$\bar{\varphi}_n^k(\xi) = \varphi_n^k(2\xi), \quad \bar{\sigma}_{1n}^k(\xi) = \sigma_{1n}^k(\xi + \varepsilon/2), \quad \varepsilon/2 \leqq \xi \leqq 1/2.$$

Используя общее решение уравнения (7) [6], нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (5) имеет вид

$$v_n^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\,\tau_n^k(\eta)\,R_n(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)\,R_n(\xi, \xi; \xi, \eta)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi \Big\{\nu_n^k(\xi_1)\,R_n(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) - \tau_n^k(\xi_1)\,\frac{\partial}{\partial N} R_n(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|_{\xi_1=\eta_1}$$
$$+ 2\left[a_1(\xi_1, \eta_1)\,\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b_1(\xi_1, \eta_1)\,\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]\bigg|_{\xi_1=\eta_1} \cdot R_n(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta)\tau_n^k(\xi_1)\Big\}\,d\xi_1, \tag{9}$$

где $R_n(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\,(n = 0, 1, \ldots)$ — функция Римана уравнения (7), существование которой доказано в [6].

Из уравнения (9) при $\eta = \varepsilon/2$, с учетом условия (8), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$g_n^k(\xi) = \tau_n^k(\xi) + \int_{\varepsilon/2}^{\xi} G_n(\xi, \xi_1)\,\tau_n^k(\xi_1)\,d\xi_1, \tag{10}$$

где

$$g_n^k(\xi) = \frac{1}{R_n(\xi, \xi; \xi, \varepsilon/2)}\Bigg[2\bar{\sigma}_{1n}^k(\xi) - \bar{\sigma}_{1n}^k(\varepsilon/2)\,R_n(\varepsilon/2, \varepsilon/2; \xi, \varepsilon/2)$$
$$- \sqrt{2}\int_{\varepsilon/2}^{\xi} \frac{\varphi_n^k(\xi_1)}{\beta_1(\xi_1)}\,R_n(\xi_1, \xi_1; \xi, \varepsilon/2)\,d\xi_1\Bigg],$$

$$G_n(\xi, \xi_1) = \frac{1}{R_n(\xi, \xi; \xi, \varepsilon/2)}\Big\{-\frac{\alpha_1(\xi_1)}{\beta_1(\xi_1)}\,R_n(\xi_1, \xi_1; \xi, \varepsilon/2) - \frac{\partial}{\partial N}\,R_n(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|_{\xi_1=\eta_1}$$
$$+ 2\left[a_1(\xi_1, \eta_1)\,\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b_1(\xi_1, \eta_1)\,\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]\bigg|_{\xi_1=\eta_1} \cdot R_n(\xi_1, \xi_1; \xi, \varepsilon/2)\Big\}.$$

Учитывая определение функции Римана и $R_n(\xi, \xi; \xi, \varepsilon/2) > 0$, из уравнения (10) найдем единственным образом

$$\tau_n^k(\xi) = g_n^k(\xi) - \int_{\varepsilon/2}^{\xi} R_n(\xi, \xi_1; -1)\,g_n^k(\xi_1)\,d\xi_1, \tag{11}$$

где $R_n(\xi, \xi_1; -1)$ — резольвента ядра $G_n(\xi, \xi_1)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Отсюда решение задачи (7), (8) запишется в виде (9), где $\tau_n^k(\xi)$, $\nu_n^k(\xi)$ определяются соответственно из формул (11), (8). Следовательно, функция (6) является единственным решением задачи 1/(2), где $v_n^k(r, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, k_n; n = 0, 1, \ldots)$ находятся по формуле (9).

Учитывая ограничения на заданные функции $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\varphi(r, \theta)$, $\sigma_1(r, \theta)$ и тот факт, что функция Римана есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода, а также оценки [11]

$$k_n \leqq C \cdot n^{m-2}, \quad |Y^k_{n,m}(\theta)| \leqq C \cdot n^{(m/2)-1}, \quad C = \mathrm{const} > 0,$$

можно доказать, что полученное решение $u(r, \theta, t)$ в виде (6) принадлежит классу $C(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D} \cup S) \cap C^2(\mathcal{D})$ и является устойчивым. Таким образом корректность задачи 1/(2) доказана.

Справедливость теоремы 1 для задачи 1/(3) и для задач 2, 3 устанавливается аналогично ∎

Следствие: *Если* $a = b = c \equiv 0$ *и* $\sigma_1(r, \theta) \in W_2{}^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_2(r, \theta) \in W_2{}^l(S \setminus \bar{S}^\varepsilon)$, $l \geqq (8 + 3m)/2$, *то задача* 3 *корректно поставлена.*

Отметим, что в теореме 1 принадлежность заданных функций к классу $B^l(S)$ являются существенными и их нарушения могут привести к неустойчивости решения рассматриваемых задач. Действительно, пусть $a = b = c \equiv 0$, $\alpha(r) \equiv 1$, $\beta(r) \equiv 0$,

$$\sigma_1{}^k(r, \theta) \equiv 0, \quad \varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} \varphi_n{}^k(r) \; Y^k_{n,m}(\theta), \quad l > \frac{3m}{2} + 3,$$

$$\varphi_n{}^k(r) \in C([\varepsilon, 1]) \cap C^2\big((\varepsilon, 1)\big), \quad \varphi_n{}^k(r) \geqq 0, \quad \varphi_n{}^k(\varepsilon) = 0, \quad \varphi(r, \theta) \notin B^l(S).$$

Покажем, что, при достаточно малых изменениях граничных функций, само решение задачи 1/(2) может быть сколь угодно большим, по крайней мере в некоторых точках области $\mathcal{D}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$v_n{}^k(\xi, \eta) = \frac{\bar{\varphi}_n{}^k(\xi)}{n^l} + \frac{\xi - \eta}{n^l(\xi + \eta)} \int_{\varepsilon/2}^{\eta} \frac{\bar{\varphi}_n{}^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu{}' \left(\frac{\xi\eta + \xi_1{}^2}{(\xi + \eta)\, \xi_1} \right) d\xi_1, \tag{12}$$

где $\mu = n + (m - 3)/2$, $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, является решением задачи (7), (8). Отметим, что в рассматриваемой области $\varepsilon/2 < \xi < \eta < 1/2$ изменения переменных ξ, η, ξ_1 справедливо неравенство $z = \dfrac{\xi\eta + \xi_1{}^2}{(\xi + \eta)\, \xi_1} \geqq 1$. Кроме того, нам понадобится следующее утверждение: при $z \geqq 1$, $\mu \geqq 3$ функции $P_\mu(z)$, $P_\mu{}'(z)$ являются возрастающими и удовлетворяют неравенствам

$$P_\mu(z) > \frac{z^\mu}{2}, \quad P_\mu{}'(z) > \frac{\mu(\mu + 1)\, z^{\mu-1}}{4}. \tag{13}$$

Их справедливость легко следует из интегральных представлений функции Лежандра и ее производной

$$P_\mu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos\varphi)^\mu \, d\varphi,$$

$$P_\mu{}'(z) = \mu P_{\mu-1}(z) + \frac{\mu(\mu - 1)\, z}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos\varphi)^{\mu-2} \sin^2\varphi \, d\varphi.$$

Пусть $\varepsilon/2 < \xi_0, \eta_0 < 1/2$ и $0 < \delta_0 < (2\eta - \varepsilon)/4$. Тогда из (12) с учетом (13) имеем

$$v_n^k(\xi_0, \eta_0) \geqq \frac{\xi_0 - \eta_0}{n^l(\xi_0 + \eta_0)} \int\limits_{\varepsilon/2}^{\eta_0} \frac{\overline{\varphi}_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu' \left(\frac{\xi_0\eta_0 + \xi_1^2}{(\xi_0 + \eta_0)\,\xi_1}\right) d\xi_1$$

$$> \frac{\xi_0 - \eta_0}{n^l(\xi_0 + \eta_0)} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}+\delta_0}^{\eta_0-\delta_0} \frac{\overline{\varphi}_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu' \left(\frac{\xi_0\eta_0 + \xi_1^2}{(\xi_0 + \eta_0)\,\xi_1}\right) d\xi_1$$

$$> \frac{\xi_0 - \eta_0}{n^l(\xi_0 - \eta_0)} \cdot \frac{\eta_0 - \varepsilon/2 - 2\delta_0}{\eta_0 - \delta_0} \min_{\left[\frac{\varepsilon}{2}+\delta_0,\, \eta_0-\delta_0\right]} \overline{\varphi}_n^k(\xi_1)$$

$$\times P_\mu' \left[1 + \frac{\delta_0(\xi_0 - \eta_0 + \delta_0)}{(\xi_0 + \eta_0)(\eta_0 - \delta_0)}\right]$$

$$> \frac{\mu(\mu + 1)(\xi_0 - \eta_0)\left(\eta_0 - \frac{\varepsilon}{2} - 2\delta_0\right)}{4n^l(\xi_0 + \eta_0)(\eta_0 - \delta_0)} \min_{\left[\frac{\varepsilon}{2}+\delta_0,\, \eta_0-\delta_0\right]} \overline{\varphi}_n^k(\xi_1)$$

$$\times \left[1 + \frac{\delta_0(\xi_0 - \eta_0 + \delta_0)}{(\xi_0 + \eta_0)(\eta_0 - \delta_0)}\right]^{\mu-1}. \tag{14}$$

Из равенства (14), при фиксированных $\xi_0, \eta_0, \delta_0, l$ и при больших n, следует, что функциа $v_n^k(\xi_0, \eta_0)$ может быть сколь угодно большой. Так как $u(r_0, t_0, 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^k(r_0, t_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^k(\xi_0, \eta_0)$, то отсюда вытекает справедливость нашего утверждения.

А в случае задачи 1/(3) $\left(a = b = c \equiv 0,\ \alpha(r) \equiv 1,\ \beta(r) \equiv 0,\ \sigma_2^k(r, \theta) \equiv 0\right)$ ее неустойчивым решением (см. также [8]) является функция вида

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} v_n^k(r, t)\; Y_{n,m}^k(\theta),$$

где

$$v_n^k(\xi, \eta) = \frac{\overline{\varphi}_n^k(\xi)}{n^l} + \frac{\xi - \eta}{n^l(\xi + \eta)} \int\limits_{\xi}^{1/2} \frac{\overline{\varphi}_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu' \left(\frac{\xi\eta + \xi_1^2}{(\xi + \eta)\,\xi_1}\right) d\xi_1,$$

$$\overline{\varphi}_n^k(\xi) = \varphi_n^k(2\xi) \geqq 0, \quad \varphi_n^k(1) = 0; \quad \varphi_n^k(\xi) \in C([\varepsilon, 1]) \cap C^2\left((\varepsilon, 1)\right).$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2. Сначала докажем единственность решения задачи $1^*/(2^*)$ в классе $C^1(\overline{\mathscr{D}}) \cap C^2(\mathscr{D})$ при $\beta(r) \neq 0$ $(r \in [\varepsilon, 1])$. Пусть $u(r, \theta, t)$ — решение задачи 1/(2), которое равно нулю на S_ε, а на S совпадает с функцией $f(r, \theta) = \bar{f}(r)\; Y_{n,m}^k(\theta)$, $\bar{f}(r) \in V_0$, где V_0 — множество функций $\bar{f}(r)$ из класса $C^1([\varepsilon, 1]) \cap C^2\left((\varepsilon, 1)\right)$. Очевидно, что V_0 плотно всюду в $L_2\left((\varepsilon, 1)\right)$. Из определения сопряженных операторов

$$vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial P_{m+1}}{\partial t};$$

$$P_i = v \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial x_j} + x_i\, a u\, v, \qquad P_{m+1} = -v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} + buv$$

по формуле Грина имеем

$$\int_{\mathcal{D}} (vLu - uL^*v)\, d\mathcal{D} = -\int_{\partial\mathcal{D}} \left[v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a \cos(n, x_i) + b \cos(n, t) \right) uv \right] ds,$$

где $\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^{m} \cos(n, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos(n, t) \frac{\partial}{\partial t}$ — конормаль к границе $\partial\mathcal{D}$, а n — внутренняя нормаль к $\partial\mathcal{D}$. Дальнейшее доказательство проводится так же как в [1: пункт 3 теоремы 2]. Справедливость теоремы 2 для остальных задач устанавливается аналогично ▮

Отметим, что задача 3 при $a = b = c \equiv 0$ и $m = 2$ изучалось в [10].

2.

Рассмотрим уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$L_k u \equiv \Delta_x u - u_{tt} - \frac{k}{t} u_t = 0, \tag{15}$$

где k — действительное число, причем $k < 1$, $k \neq -1, -3, \ldots$ Через u^k, $u_1{}^k$ обозначим решение уравнения (15) при данном k. Пусть $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ — наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам $k + 2p \geqq m - 1$, $2 - k + 2q \geqq m - 1$.

Задача 4 ($k \leqq 0$): Найти регулиярное в области $\mathcal{D}$ решение уравнения (15), непрерывное в $\overline{\mathcal{D}}$ и удовлетворяющее условиям

$$u^k(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta),$$

$$\alpha(r)\, \mathcal{D}_{0t^2}^{-k/2}\left[u^k\big(\theta_0(t)\big) - u_1{}^k\big(\theta_0(t)\big)\right] = \beta(r) \lim_{t\to 0} t^k(u^k - u_1{}^k)_t + \gamma(r, \theta), \tag{16}$$

$$\varepsilon < r < 1,$$

где $\mathcal{D}_{0t}^l$ — оператор дробного интегрирования порядка $-l$ при $l < 0$ и обобщенная производная (в смысле Лиувилля) порядка l при $l > 0$, $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2} + \varepsilon, \theta, \frac{t}{2}\right)$, а $u_1{}^k(r, \theta, t)$ — решение задачи Коши

$$L_k u_1{}^k = 0, \quad u_1{}^k(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta), \quad u_{1t}^k(r, \theta, 0) = 0.$$

В случае $0 < k < 1$ в задаче 4 условие (16) заменяется условием

$$\alpha(r) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}_{0t^2}^{-k/2}\left[u^k\big(\theta_0(t)\big) - u_1{}^k\big(\theta_0(t)\big)\right] = \beta(r) \lim_{t\to 0} t^k(u^k - u_1{}^k)_t + \gamma(r, \theta),$$

$$\varepsilon < r < 1.$$

Пусть

$$M_q{}^l(S) = \Big\{ f(r, \theta) \in W_2{}^l(S): \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left[\|f_n{}^k(r)\|^2_{C^q([\varepsilon,1])} + \|f_n{}^k(r)\|^2_{C^{q+1}((\varepsilon,1))}\right] \exp 2\big(n^2 + n(m-2)\big) < \infty \Big\}.$$

Тогда имеет место

Теорема 3: *Если* $\gamma(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $l\geqq(3m+4)/2$, $\alpha(r),\beta(r)\in C([\varepsilon,1])\cap C^1((\varepsilon,1))$, $\beta(r)\neq 0$ $(r\in[\varepsilon,1])$ *в случае* $k\leqq 0$

и

$\gamma(r,\theta)\in M_q^l(S)$, $\alpha(r),\beta(r)\in C^q([\varepsilon,1])\cap C^{q+2}((\varepsilon,1))$, $\alpha(r)\neq\prod\limits_{s=0}^{q}(2s+1-k)\,\beta(r)$ $(r\in[\varepsilon,1])$ *в случае* $0<k<1$,

а $\tau(r,\theta)\in C^p(\bar S)\cap C^{p+2}(S)$, *тогда задача* 4 *разрешима однозначно.*

Доказательство: Решение задачи 4 будем искать в виде $u^k=u_1^k+u_2^k$, где $u_2^k(r,\theta,t)$ — решение следующей задачи:

$$L_ku_2^k=0, \tag{17}$$

$$u_2(r,\theta,0)=0, \tag{18}$$

$$\alpha(r)\,\mathcal{D}_{0t^2}^{-k/2}u_2^k(\theta_0(t))=\beta(r)\lim_{t\to0}t^ku_{2t}^k+\gamma(r,\theta)\quad\text{при}\quad k\leqq0, \tag{19}$$

$$\alpha(r)\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{D}_{0t^2}^{-k/2}u_2^k(\theta_0(t))=\beta(r)\lim_{t\to0}t^ku_{2t}^k+\gamma(r,\theta)\qquad 0<k<1. \tag{20}$$

Далее, используя связь [3] между решением задачи Коши $L_ku_2^k=0$, $u_2(r,\theta,0)=0$, $\lim\limits_{t\to0}t^ku_{2t}^k=\varphi(r,\theta)$ и решением задачи Коши для волнового уравнения $\Box u\equiv\Delta_xu-u_{tt}=0$, задачу (17)—(19) сводим к однозначно разрешимой задаче 2 в [2], а задачу (17), (18), (20) к задаче

$$\Box\, u_1^0=0,\quad u_{1t}(r,\theta,0)=0,$$

$$2\cdot\alpha(r)\,u_1^0(\theta_0(t))=\prod_{s=0}^{q}(2s+1-k)\,u_1^0(r,\theta,0)+\gamma(r,\theta).$$

Существование единственного решения последней задачи устанавливается аналогично доказательству теоремы 1 в [2] ∎

3.

Рассмотрим уравнение

$$L_k^nu\equiv\left(\Delta_x-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^nu=0, \tag{21}$$

где n — целое положительное число. В качестве многомерного аналога задачи Дарбу для уравнения (21) может быть рассмотрена

Задача 5: Найти регулярное решение уравнения (21), удовлетворяющее краевым условиям $(j=0,1,\dots,n-1)$

$$\left.\frac{\partial^{2j}u}{\partial t^{2j}}\right|_S=f_j(r,\theta),\ L_k^ju|_{S_\varepsilon}=\sigma_j(r,\theta);\quad(k\neq-2s,\ s=1,2,\dots)$$

и

$$L_k^ju|_S=f_j(r,\theta),\quad L_k^ju|_{S_\varepsilon}=\sigma_j(r,\theta)\quad(k=-2s).$$

Введем обозначения:

$$n_k=\left[-\frac{k}{2}+n-1\right],\quad \alpha_k=\max\{2(1+n_k),p\},$$

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_k \text{ для } k = -2s, s = 1, 2, \ldots \\ 2(n - j - 1) + \alpha_k \text{ для } k \leqq 0, k \neq -2s \\ \max\{\alpha_k, q + 1\} + 2(n - j - 1) \text{ для } 0 < k < 1, \end{cases}$$

$$\gamma_j = n_k + 1 \quad (j = 0, 1, \ldots, n - 2) \quad \text{и} \quad \gamma_{n-1} = \begin{cases} n_k + 1 \text{ для } k \leqq 0 \\ \max\{n_k, q\} + 1 \text{ для } 0 < k < 1, \end{cases}$$

где $[l]$ — целая часть числа l.

Справедливо

Теорема 4: *Задача* 5 *разрешима, причем однозначно, если*

$$f_j(r, \theta) \in M^l_{\beta_j}(S), \quad \sigma_j(r, \theta) \in M^l_{\gamma_j}(S) \quad (j = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Доказательство: Решение задачи 5 будем искать в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1(r, \theta, t)$, $u_2(r, \theta, t)$ — решения соответственно следующих задач ($j = 0, 1, \ldots, n - 1$)

$$L_k{}^n u_1 = 0, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial^{2j} u_1}{\partial t^{2j}}\right|_S = f_j(r, \theta), \quad \left.\frac{\partial^{2j+1} u_1}{\partial t^{2j+1}}\right|_S = 0 \quad (k \neq -2s), \tag{23}$$

$$L_k{}^j u_1|_S = f_j(r, \theta), \quad \left.\frac{\partial^{2j+1} u_1}{\partial t^{2j+1}}\right|_S = 0 \quad (k = -2s) \tag{23'}$$

и

$$L_k{}^n u_2 = 0, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial^{2j} u_2}{\partial t^{2j}}\right|_S = 0, \quad L_k{}^j u_2|_{S_\varepsilon} = \sigma_j(r, \theta) - L_k{}^j u_1|_{S_\varepsilon} = \sigma_{2j}(r, \theta) \quad (k \neq -2s), \tag{25}$$

$$L_k{}^j u_2|_S = 0, \quad L_k{}^j u_2|_{S_\varepsilon} = \sigma_j(r, \theta) - L_k{}^j u_1|_{S_\varepsilon} = \sigma_{2j}(r, \theta) \quad (k = -2s). \tag{25'}$$

Задача Коши (22), (23) (22), (23')) разрешима однозначно (см. [4]). Далее, используя леммы 2 и 3 из [4], задачу (24), (25) ((24), (25')) сводим к эквивалентной задаче

$$L_k{}^n u_2 = 0, \tag{26}$$

$$L_k{}^j u_2|_S = 0, \quad L_k{}^j u_2|_{S_\varepsilon} = \sigma_{2j}(r, \theta) \quad (j = 0, 1, \ldots, n - 1). \tag{27}$$

Теперь воспользуемся свойством решения уравнения (15) [14].

(1°) Если u^k — решение уравнения $L_k u = 0$, то функция $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial u^k}{\partial t} = u^{k+2}$ является решением уравнения $L_{k+2} u = 0$. Из свойства (1°) следует, что

$$L_\alpha u^\beta = (\beta - \alpha)\, u^{\beta+2}, \tag{28}$$

где α, β — произвольные действительные числа. Из равенства (28) в свою очередь вытекает, что функция (см. также [14])

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^{k-2(n-i)} \tag{29}$$

является общим решением уравнения (21). Представление (29) и соотношение (28) позволяют задачу (26), (27) свести к n эквивалентным задачам Дарбу для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона. А их однозначную разрешимость нетрудно установить путем редукции (см. п. 2) к задачам Дарбу для волнового уравнения [2]. Таким образом справедливость теоремы 4 доказана ▮

Автор признателен профессору А. М. Нахушеву за обсуждение результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алдашев, С. А.: О некоторых многомерных аналогах задач Дарбу для волнового уравнения. Дифф. уравнения 18 (1982), 254–260.
[2] Алдашев, С. А.: О некоторых локалных и нелокалных краевых задачах для волнового уравнения. Дифф. уравнения 19 (1983), 3–8.
[3] Алдашев, С. А.: Об одной задаче Дарбу для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона. Дифф. уравнения 16 (1980), 161–163.
[4] Алдашев, С. А.: О задаче Коши для операторов, распадающихся на множители с особенностями. Дифф. уравнения 17 (1981), 247–255.
[5] Бицадзе, А. В.: Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Изд-во Наука 1981.
[6] Бицадзе, А. В.: Уравнения смешанного типа. Моска: Изд-во Акад. Наук СССР 1959.
[7] Каратопраклиев, Г. Д.: О единственности решения некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа и гиперболических уравнений в пространстве. Дифф. уравнения 18 (1982), 59–63.
[8] Ким, Е. И., и В. Ли: О некорректности пространственных задач типа Коши-Гурса. Изв. Акад. Наук Каз. ССР, Серия физ.-мат. наук 1 (1970), 70–71.
[9] Лаврентьев, М. А., и Б. В. Шабат: Проблемы гидродинамики и их математические модели. Москва: Изд-во Наука 1973.
[10] Ли, В.: Решение задачи Гурса в случае двух пространственных переменных. Изв. Акад. Наук Каз. ССР, Серия физ.-мат. наук 3 (1968), 46–52.
[11] Михлин, С. Г.: Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз 1962.
[12] Нахушев, А. М.: О современном состоянии теории краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка в многомерных областях. В сб.: Труды Всесоюзной конф. по уравн. с частными производными, посв. 75-летию И. Г. Петровского. Москва: Изд-во Московского Гос. Университета 1978, 171–174.
[13] Тихонов, А. Н., и А. А. Самарский: Уравнения математической физики. Москва: Изд-во Наука 1972.
[14] Weinstein, A.: Sur une classe d'equations aux dérivées partielles singulieres. In: Collog. international. Centre national recherche scientifique (Paris) 71 (1956), 179–186.

Manuskripteingang: 10. 11. 1983

VERFASSER:

Д-р Серик Аймурзаевич Алдашев
Кафедра Теории функции и функционального анализа Кабардино-Балкарского госуниверситета
СССР-360004 Нальчик — 4, Ул. Чернышевского 173