Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (2) 1985, S. 133—191

Принцип максимума в линейных задачах с выпуклыми смешанными ограничениями

А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин

Es werden lineare Steuerprobleme mit bezüglich der Zeit unstetigen gemischten konvexen Restriktionen für die Phasenkoordinaten und die Steuerung sowie mit beliebigen punktweisen Beschränkungen für einen Teil der Komponenten des Steuervektors betrachtet. Unter der Annahme, daß die Aufgabe ein endliches Infimum besitzt, wird die Theorie des Maximumprinzips begründet.

Построена теория принципа максимума в линейной задаче об $\inf J$ с разрывными коэффициентами и содержащей наряду с выпуклыми смешанными ограничениями произвольное ограничение на часть компонент управления.

We study linear control problems with mixed convex restrictions, which are discontinuous with respect to time, for both trajectories and controls and with arbitrary pointwise restrictions for some components of the control vector. Under the assumption that the problem has a finite infimum, we found the theory of the maximum principle.

Введение

В работе построена теория принципа максимума линейной задачи оптимального управления с выпуклыми смешанными ограничениями на фазовые координаты и управление и с произвольным ограничением на часть координат управления. Новым является то, что рассмотрена задача об $\inf J$, а не традиционная задача о $\min J$. То есть вместо существования экстремали, реализующей оптимум функционала J, предполагается лишь существование конечного значения $\inf J$ на траекториях, допустимых ограничениями задачи.

Работа состоит из двух частей со сквозной нумерацией параграфов.

Часть I содержит §§ 1—4. В § 1 дана постановка задачи и формулировка предположений, в которых выводится принцип максимума. В § 2 определяются понятия критичности и стационарности значения J_0 функционала J. В § 3 вводится сеть присоединённых задач и определяется понятие экстремальности значения J_0 в исходной задаче через критичность этого значения в присоединённых задачах. Доказывается, что экстремальность является необходимым условием оптимальности. И, наконец, в § 4 содержится вывод нетривиального решения уравнения Эйлера критического значения J_0 в присоединённой задаче (н. р. э. значения J_0). Существование н. р. э. значения J_0 является эквивалентом его критичности в присоединённой задаче.

Во второй части работы, состоящей из §§ 5—7, находится принцип максимума значения J_0 функционала J. Принцип максимума значения J_0 является эквивалентом экстремальности J_0.

§ 1. Постановка задачи

В работе найдены необходимые условия экстремума следующей задачи.

Задача **А**: *Найти*, $\inf J(p)$, *если* $p = (x_0, x_1)$, $x_i = x(t_i)$ $(i = 0, 1)$ *и выполнены следующие условия:*

1.1 $\dot{x}(t)\ (=)\ A_0(e(t))\, x(t) + A(e(t))\, u(t) + a_0(e(t))$,

$B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t) + b_0(e(t))\ (=)\ 0$,

$Rp + r_0 = 0, \qquad u = (u_1, u_2)$;

$(x, u_i) : t \to \mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(u_i)} \qquad (i = 1, 2)$,

$e : t \to \mathbf{R}^{d(e)}, \qquad a_0, b_0 : \mathbf{R}^{d(e)} \to \mathbf{R}^{d(a_0)} \times \mathbf{R}^{d(b_0)}$.

1.2 $\varphi(p) \leqq 0, \qquad \Phi(x(t), u_1(t), e(t))\ (\leqq)\ 0$,

$\varphi : \mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(x)} \to \mathbf{R}^{d(\varphi)}, \qquad \Phi : \mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(u_1)} \times \mathbf{R}^{d(e)} \to \mathbf{R}^{d(\Phi)}$,

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{d(\varphi)}), \qquad \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{d(\Phi)})$.

Неравенства здесь понимаются как покомпонентные.

1.3 $u_2(t)\ (\in)\ \mathbf{Z}(t), \qquad \mathbf{Z}(t) \subseteqq \mathbf{R}^{d(u_2)}$.

Значение $\inf J(p)$ *ищется среди всех* $(x, u) \in A_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u)}$, *допустимых ограничениями* **1.1—1.3**.

Мы будем придерживаться следующих обозначений:

а) Здесь и всюду в работе t_0, t_1 — фиксированные числа, $\Delta = [t_0, t_1]$.

б) Если $(\cdot)$ вектор конечномерного пространства, то $d(\cdot)$ — его размерность.

в) Каждое из отношений $=, \leqq, \ldots$, взятое в круглые скобки, означает, что оно выполняется почти всюду на Δ в смысле меры Лебега.

г) $L_{\infty,\Delta}^{d(u)}$ — банахово пространство ограниченных измеримых функций, определенных почти всюду на Δ и принимающих значения в $R^{d(u)}$. Норма в нем задается равенством $\|u\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(u)}} = \operatorname{vrai\,max}_{\Delta} |u(t)|$. $A_\Delta^{d(x)}$ — банахово пространство абсолютно непрерывных на Δ функций со значениями в $\mathbf{R}^{d(x)}$. Норма в нем задается равенством $\|x\|_{A_\Delta^{d(x)}} = |x(t_0)| + \int_\Delta |\dot{x}(t)|\, dt$.

Вариационное исследование задачи **А** проводится в следующих предположениях **1.4 а)—г)**:

1.4 а) $A_0, A, B_0, B_1, a_0, b_0$ *определены и непрерывны по* e *на некотором открытом множестве* $Q \subset \mathbf{R}^{d(e)}$. *На* Q $\operatorname{rank} B_1 = d(b_0)$.

б) $e \in L_{\infty,\Delta}^{d(e)}$ *— некоторая фиксированная функция*, $\operatorname{vrai\,min}_{\Delta} \varrho(e(t); C\,Q) > 0$.

в) *Функции* Φ, φ, J *определены, непрерывны и выпуклы по* (x, u_1, e, p) *на* $\mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(u_1)} \times Q \times \mathbf{R}^{d(p)}$. *Семейство множеств* $\mathbf{Z}(t)$ $(t \in \Delta)$ *— произвольное. Матрица* R *и вектор* r_0 *— постоянные.*

Формулировке предположения **г)** предпошлем определение линейных функционалов, опорных к выпуклым функционалам банахова пространства $\mathfrak{z}$ [1]. Пусть φ — непрерывный выпуклый функционал. Линейный функционал λ

называется *опорным* к φ, если

$$n(\lambda, \varphi) = \inf_{\mathfrak{z}} [\varphi(\mathfrak{z}) - \lambda(\mathfrak{z})] > -\infty .$$

Совокупность линейных функционалов пространства $\mathfrak{z}$, опорных к φ, обозначается через $\partial\varphi$; множество элементов из $\partial\varphi$ таких, что $n(\lambda, \varphi) = \varphi(\mathfrak{z}_0) - \lambda(\mathfrak{z}_0)$, обозначается через $\partial\varphi(\mathfrak{z}_0)$. Нетрудно проверить, что $\partial\varphi$ — выпуклое множество, а $n(\lambda, \varphi)$ — вогнутая непрерывная сверху функция на $\partial\varphi$.

Условимся в двух обозначениях:

Пусть Φ_s одна из компонент Φ. Тогда через $\Phi_s[e]$ обозначается функция переменных x и u_1, заданная условием $(x, u_1) \to \Phi_s(x, u_1, e)$, а через $\partial\Phi_s[e]$ совокупность всех линейных функционалов пространства $\mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)}$, опорных к $\Phi_s[e]$.

И далее. Если $\mathscr{E} \subseteq Q$ некоторое множество, то

$$\operatorname{gr} \partial\Phi_s \,|\mathscr{E} = \{(l, e) |\, l \in \partial\Phi_s[e],\ e \in \mathscr{E}\},$$

$$\partial\Phi_s[\mathscr{E}] = \operatorname{pr}_l \operatorname{gr} \partial\Phi_s \,|\, \mathscr{E}.$$

Приведем теперь формулировку последнего предположения из **1.4.**

г) *Для каждого компакта* $\mathscr{E} \subset Q$ *существует константа* $k(\mathscr{E})$ *такая, что* $n(l, \Phi_s[e]) \geqq k(\mathscr{E})$ *при всех* $(l, e) \in \operatorname{gr} \partial\Phi_s \,|\, \mathscr{E}$ $\big(s = 1, \ldots, d(\Phi)\big)$.

Из этого предположения вытекает, что на каждом компакте $\mathscr{E} \subset Q$ множество $\operatorname{gr} \partial\Phi_s \,|\, \mathscr{E}$ является компактом пространства $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^{d(e)}$, а функция $n(l, \Phi_s[e])$ ограничена и полунепрерывна сверху на нем. В свою очередь из последнего обстоятельства и принадлежности $e \in L^{d(e)}_{\infty,\Delta}$ следует, что

$$K_0 := \max_s \operatorname{vrai} \max_\Delta \Big\{\big[\max |l| + \sup \big|n\big(l, \Phi_s[e(t)]\big)\big|\big] \,\big|\, l \in \partial\Phi_s[e]\Big\}$$

является конечным числом.

Обсуждение постановки задачи A

Переход от min к inf усложняет как исследование необходимых условий экстремума так и формулировку принципа максимума. Однако в такой постановке снимается проблема существования оптимали. Она заменяется более простым вопросом об ограниченности снизу функционала J на траекториях (x, u), допустимых условиями **1.1—1.3**.

Для задач, содержащих смешанные линейные ограничения неравенства, необходимые условия inf были получены в [2]. Настоящая работа обобщает [2] в двух направлениях.

а) Локальные и терминальные ограничения неравенства и минимизируемый функционал J задаются выпуклыми по x, u_1 и p функциями, в то время как в [2] они задавались линейными функциями этих переменных.

б) Дополнительно введено смешанное линейное ограничение локального равенства и понтрягинское ограничение $u_2(t)$ $(\in)$ $\mathbf{Z}(t)$ на часть компонент управления.

Строго говоря ограничение $u_2(t) \in \mathbf{Z}(t)$ является более общим, чем понтрягинское, поскольку в нем множество допустимых значений $\mathbf{Z}(t)$ зависит от t. Для иллюстрации общности предлагаемой постановки приведем два примера.

Задача Б: *Найти* $\inf J(p)$, *если* $p = (x_0, x_1)$ *и выполняются условия:*

1.5 $\dot{x}(t) \,(=)\, A_0(t)\, x(t) + A(t)\, u(t) + a_0(t), \qquad Rp + r_0 = 0;$

$B_0(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) + b_0(t) \,(=)\, 0.$

1.6 $\varphi(p) \leqq 0, \qquad C_0(t)\, x(t) + C(t)\, u(t) + c_0(t) \,(\leqq)\, 0.$

Компоненты матриц A_0, A, B_0, B, C_0, C *и векторов* a_0, b_0, c_0 *— ограниченные измеримые функции, определенные почти всюду на* Δ, aJ, φ, R, r_0 *описаны в постановке задачи* **А**.

Значение $\inf J(p)$ *ищется среди всех измеримых ограниченных функций* x *и* u, *допустимых ограничениями задачи* **Б**. (*Или точнее, среди всех пар* $(x, u) \in A_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u)}$, *допустимых условиями* **1.5—1.6**.)

Убедимся, что задача **Б** является вариантом задачи **А**. Для этого введем конечномерное пространство $\{e\}$ (прямое произведение), состоящее из всех матриц типа A_0, A, B_0, B, C_0, C и всех векторов типа a_0, b_0, c_0. Положим

$$e(t) = \big(A_0(t), A(t), B_0(t), B(t), C_0(t), C(t), a_0(t), b_0(t), c_0(t)\big).$$

Функции, входящие в постановку задачи **Б**, непрерывны по e. Следовательно, задача **Б** сводится к частному случаю задачи **А** с линейными смешанными ограничениями неравенства и не содержащему произвольного ограничения $u_2(t) \,(\in)\, \mathbf{Z}(t)$ на часть компонент управления.

Задача С: *Найти* $\inf J$, $J = \int\limits_\Delta F\big(u(t), t\big)\, dt$; *если*

$$\int\limits_\Delta Q\big(u(t), t\big)\, dt \leqq 0; \qquad \int\limits_\Delta G\big(u(t), t\big)\, dt = 0, \qquad u(t) \,(\in)\, \mathbf{Z}(t),$$

$(F, Q, G, u) \in \mathbf{R}^1 \times R^{d(Q)} \times \mathbf{R}^{d(G)} \times \mathbf{R}^{d(u)}$ *и функции* $F, Q; G$ *непрерывны.*

Значение $\inf J$ *ищется среди всех ограниченных измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям задачи* **С**.

Для сведения задачи **С** к варианту задачи **А** введем конечномерное пространство $\{v\}$ (прямое произведение), состоящее из всех элементов типа F, Q и G. Положим $\hat{\mathbf{Z}}(t) = \{F(u, t), Q(u, t), G(u, t) \mid u \in \mathbf{Z}(t)\}$. Обозначим, далее, через K_1, K_2, K_3 постоянные матрицы такие, что $F = K_1 v$, $Q = K_2 v$, $G = K_3 v$.
Рассмотрим следующую задачу.

Задача C_1: *Найти* $\inf y(t_1)$, *если*

$$\dot{y}(t) \,(=)\, K_1 v(t), \qquad \dot{x}(t) \,(=)\, K_2 v(t), \qquad \dot{z}(t) \,(=)\, K_3 v(t);$$
$$x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0, \qquad z(t_0) = 0, \qquad v(t) \,(\in)\, \hat{\mathbf{Z}}(t).$$

Ясно, что задача **С** эквивалентна задаче $\mathbf{C}_1$, а последная является частным случаем задачи **А**. Таким образом, к **А** сводятся линейные задачи со смешанными ограничениями и одномерные задачи Ляпуновского типа [3].

Необходимые условия экстремума имеют форму принципа максимума; равным образом обслуживающего как задачи об inf так и задачи о min.

Обсуждение предположений 1.4а)—г)

Среди выпуклых задач предположения а)—в) — естественные и достаточно общие. Требование г) ограничивает класс задач теми, у которых локальные смешанные ограничения неравенства задаются функциями, растущими по (x, u_1)

не быстрее чем линейные. Таким свойством обладают, например, выпуклые функции, полученные из сублинейных по (x, u_1) добавлением непрерывного по e слагаемого.

В общем случае отказ от требования г) приводит к тому, что множество линейных функционалов, опорных к выпуклому функционалу $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))$, становится неограниченным, вообще говоря не слабо замкнутым, и, следовательно, сложным для эффективного описания.

Однако требование г) не является слишком обременительным. Во первых, класс задач в которых неравенства $\Phi_s \leqq 0$ можно заменить эквивалентными неравенствами, удовлетворяющими условию г), достаточно широк. Во вторых, если среди стационарных последовательностей, отвечающих значению J_0 функционала J, содержатся ограниченные или задача обладает экстремалью, на которой функционал J принимает значение J_0, то для установления принципа максимума этого значения функционала J выполнение г) не требуется.

В заключение обсуждения предположений, в которых строится теория принципа максимума задачи **A**, повторим, что в отличие от традиционных постановок мы не предполагаем существования экстремали, на которой достигается оптимальное значение функционала. Как отмечалось выше это требование заменено более простым условием существования $\inf J$ на траекториях, допустимых ограничениями задачи **A**. Поэтому ниже будет говорится о стационарном и оптимальном значении J_0 функционала J.

Замыкание по мере функций, определенных на подмножествах $\triangle$ [4]

Пусть $y = f(t)$ измеримая функция, определенная на измеримом множестве $\operatorname{dom} f \subseteqq \Delta$. Пусть далее $\mathscr{E} \subset \Delta$ — некоторое измеримое множество. Сужение функции f на $\mathscr{E}$ обозначается через $f \mid \mathscr{E}$.

Замыканием по мере функции f называется многозначное отображение $\bar f : \Delta \to 2^{\mathbf{R}^{d(y)}}$, определенное при помощи соглашения: $\bar f(t)$ состоит из всех $y \in \mathbf{R}^{d(y)}$ таких, что для любых окрестностей V_y, V_t точек y, t

1.7 $\quad \operatorname{mes} f^{-1}(V_y) \cap V_t > 0.$

Через $\bar f(\Delta)$ обозначается множество, определенное формулой

1.8 $\quad \bar f(\Delta) = \{y \in \mathbf{R}^{d(y)} \mid y \in \bar f(t),\ t \in \Delta\}.$

В [4] доказывается:

1.9 а) $\bar f(\Delta) = \cap \overline{f(\mathscr{E}')}, \qquad \mathscr{E}' \subset \Delta, \qquad \operatorname{mes}(\Delta \setminus \mathscr{E}') = 0,$

где $f(\mathscr{E}')$ образ $\mathscr{E}'$ при отображении f, а $\overline{(\cdot)}$ замыкание в пространстве $\mathbf{R}^{d(y)}$.

б) *Существует множество $\mathscr{E} \subset \Delta$ полной меры на Δ (или на $\operatorname{dom} f$), такое, что $\bar f(\Delta) = \overline{f(\mathscr{E})}$.*

В качестве $\mathscr{E}$ можно принять, например, множество точек апроксимативной непрерывности f на $\operatorname{dom} f$. В частности, если $\mathscr{E} \subset \Delta$ измеримое множество, то из **1.9**а) и определения сужения функции f на $\mathscr{E}$ следует

1.10 $\quad \overline{f \mid \mathscr{E}}(\Delta) = \cap \overline{f(\mathscr{E}')}, \qquad \mathscr{E}' \subset \mathscr{E}, \qquad \operatorname{mes}(\mathscr{E} \setminus \mathscr{E}') = 0.$

Кроме того в [4] доказывается, что если f измеримая ограниченная функция, $\operatorname{dom} f \subset \Delta$, то $\bar f(\Delta)$ является компактом пространства $\mathbf{R}^{d(y)}$, а если $\varphi(y)$ непрерывная скалярная функция на открытом множестве $G \subset \mathbf{R}^{d(y)}$ и $\bar{f}(\Delta) \subset G$, то для любого измеримого множества $\mathscr{E} \subset \Delta$ имеет место следующая важная формула:

1.11 $$\operatorname{vrai}\max_{\mathscr{E}} \varphi f(t) = \max_{\overline{f|\mathscr{E}}(\Delta)} \varphi(y).$$

В частности, применяя это к $\mathscr{E} = \Delta$ получим

1.12 $$\operatorname{vrai}\max_{\Delta} \varphi f(t) = \max_{\bar{f}(\Delta)} \varphi(y).$$

Приведем примеры на приложение последней формулы. Поскольку Q открытое множество, а $e \in L^{d(e)}_{\infty,\Delta}$, то из **1.4б)** следует, что компакт $\bar{e}(\Delta)$ содержится в Q. Поэтому из **1.12** вытекает

1.13 $$\operatorname{vari}\min_{\Delta} \det B_1(e(t))\, B_1{}^*(e(t)) = \min_{\bar{e}(\Delta)} \det B_1(e)\, B_1{}^*(e).$$

Но в силу условия **1.4а)** $\operatorname{rank} B_1(e) = d(b_0)$ во всех точках Q. В частности он равен $d(b_0)$ и в точке минимума функции $\det B_1(e)\, B_1{}^*(e)$ по $\bar{e}(\Delta)$. Следовательно

1.14 $$\operatorname{vrai}\min_{\Delta} \det B_1(e(t))\, B_1{}^*(e(t)) = \min_{\bar{e}(\Delta)} \det B_1(e)\, B_1{}^*(e) > 0.$$

§ 2. Критические и стационарные значения Функционала J

Число J_0 называется *критическим* значением функционала J, если неравенства

2.1 $$\varphi_i(p) < 0, \quad J(p) - J_0 < 0, \quad \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t)) < 0$$

несовместны с равенствами **1.1** и включением **1.3**.

Критическое значение функционала J называется *стационарным*, если существует последовательность $\tau = \{(x_n, u_n)\}$, допустимая ограничениям **1.1—1.3** и такая, что

2.2 $$\lim_n J(p^n) = J_0.$$

Совокупность всех допустимых последовательностей τ, для которых предел **2.2** существует и равен J_0, обозначается через $\tau(J_0)$, а значение предела для данной допустимой последовательности τ через $J(\tau)$.

Последовательность τ называется *стационарной*, если $J(\tau)$ является стационарным значением функционала J.

Пусть J_* нижняя грань значений функционала J на траекториях x и u, допустимых **1.1—1.3**. Если J_* является конечным числом, то J_*, очевидно, является стационарным значением функционала J. Поэтому стационарность является необходимым условием оптимальности.

§ 3. Экстремальные значения J_0 функционала J

Присоединенные задачи

Из-за произвольного ограничения $u_2(t)\,(\in)\,\mathbf{Z}(t)$ задача **А** в исходной форме не допускает вариационного исследования. Вариационный анализ задачи **А** мы проведем методом присоединенных задач, который был разработан для получения интегрального принципа максимума канонической задачи оптимального управления [6].

Условимся в терминах и обозначениях.

Пусть Ξ_0 выпуклое замыкание множества всех измеримых ограниченных выборок из семейства множеств $\mathbf{Z}(t)$, определенных почти всюду на Δ, и Ξ — слабое замыкание Ξ_0, то есть, совокупность всех u_2, для каждой из которых можно указать последовательность $u_2^n \in \Xi_0$, удовлетворяющую условию: какова бы не была функция $b \in L_{1,\Delta}^{d(u_2)}$, всегда $\int \big(u_2^n(t) - u_2(t)\big) b(t)\, dt \to 0$. Ясно, что $\Xi \subset L_{\infty\Delta}^{d(u_2)}$.

Индексом называется каждый конечный набор $a = (u_2^1, \ldots, u_2^\varkappa)$, где все $u_2^j \in \Xi$. Число составляющих индекса a обозначается через $d(a)$. Совокупность всех индексов обозначается через $\mathcal{K}$, а множество индексов, компоненты которых принадлежат Ξ_0, через $\mathcal{K}_0$. Ясно, что $\mathcal{K} \supset \mathcal{K}_0$ и оба эти множества образуют сети по вложению. С каждым индексом из $\mathcal{K}$ свяжем присоединенную задачу $\mathbf{A}_a$.

Задача $\mathbf{A}_a$: *Найти* $\inf J(p)$, *если* $p = (x_0, x_1)$ *и выполнены следующие условия:*

3.1 $$\dot{x}(t) \,(=)\, A_0\big(e(t)\big)\, x(t) + A_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + A_2^C\big(e(t)\big) \sum_{j \leq d(a)} \alpha^j(t)\, u_2^j(t) + a_0\big(e(t)\big),$$
$$Rp + r_0 = 0, \qquad \sum_{j \leq d(a)} \alpha^j(t) = 1,$$
$$B_0\big(e(t)\big)\, x(t) + B_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + b_0\big(e(t)\big) \,(=)\, 0, \quad x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1.$$

3.2 $$\varphi(p) \leqq 0, \qquad \Phi\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) \,(\leqq)\, 0, \qquad \alpha(t) \,(\geqq)\, 0.$$

Здесь $A_1(e)$ *матрица, составленная из первых* $d(u_1)$ *столбцов матрицы* $A(e)$, *а* $A_2(e)$ — *из её последних* $d(u_2)$ *столбцов,* $\alpha(t) = \big(\alpha^1(t), \ldots, \alpha^{d(a)}(t)\big)$.

Значение $\inf J(p)$ *ищется среди всех* $(x, u_1, \alpha) \in A_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(a)}$, *допустимых ограничениями задачи* $\mathbf{A}_a$.

Введем функциональные пространства W_a и Y, подпространство $L_a \subset W_a$ и два оператора $P_a : W_a \to Y$, $T_a : W_a \to \mathbf{R}^{d(r_0)}$.

Пространство W_a состоит из всех троек $w = (x, u_1, \alpha) \in A_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(a)}$ и норма в нем задается условием

$$\|w\|_{W_a} = |x(t_0)| + \int_\Delta |\dot{x}(t)|\, dt + \|u_1\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}} + \|\alpha\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(a)}}.$$

Подпространство L_a пространства W_a состоит из всех элементов W_a, для которых выполнены условия:

3.3 $$\dot{x}(t) - A_0\big(e(t)\big)\, x(t) - A_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) - A_2\big(e(t)\big) \sum_{j \leq d(a)} \alpha^j(t)\, u_2^j(t) \,(=)\, 0,$$
$$\sum_{j \leq d(a)} \alpha^j(t) \,(=)\, 0,$$
$$B_0\big(e(t)\big)\, x(t) + B_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) \,(=)\, 0.$$

Пространство Y состоит из всех четверок $y = (y_x, y_r, y_b, y_a) \in L_{1,\Delta}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(r_0)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)} \times L_{\infty,\Delta}^{1}$ и норма в нем задаётся условием

$$\|y\|_Y + \|y_x\|_{L_{1,\Delta}^{d(x)}} + \|y_r\|_{\mathbf{R}^{d(r_0)}} + \|y_b\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)}} + \|y_a\|_{L_{\infty,\Delta}^{1}}.$$

Наконец, оператор T_a задается формулой

3.4 $$T_a(x, u_1, \alpha) = Rp,$$

а оператор P_a условием

3.5 $$P_a(x, u_1, \alpha) = \Big(\dot{x} - A_0(e)\,x - A_1(e)\,u_1 - A_2(e) \sum_{j \le d(a)} \alpha^j u_2,\ Rp,\ B_0(e)\,x + B_1(e)\,u_1,\ \sum_{j \le d(a)} \alpha^j\Big).$$

Нетрудно проверить, что так введенные операторы являются линейными, то есть аддитивными и ограниченными. Оператор P_a позволяет записать локальные ограничения равенства задачи $\mathbf{A}_a$ в форме

3.6 $$P_a(x, a_1, \alpha) + y^0 = 0, \qquad y^0 = \big(-a_0(e), r_0, b_0(e), -1\big) \in Y.$$

Применительно к задаче $\mathbf{A}_a$ критичность значения J_0 функционала J означает, что равенство 3.6 несовместно с неравенствами

3.7 $$\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) < 0 \qquad \big(s = 1, \dots, d(\Phi)\big),$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \big(-\alpha^j(t)\big) < 0 \qquad \big(j = 1, \dots, d(a)\big),$$

$$\varphi_i(p) < 0 \qquad \big(i = 1, \dots, d(\varphi)\big), \qquad J(p) - J_0 < 0.$$

Лемма о доверии

Вариационный смысл присоединенных задач определяется следующей леммой.

Лемма 3.1 (о доверии): *Для стационарности числа J_0, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, необходимо и достаточно критичность J_0 в каждой из присоединенных задач $\mathbf{A}_a$, отвечающих индексам $a \in \mathcal{K}_0$, компоненты которых являются выборками из $\mathbf{Z}(t)$.*

Доказательство: Достаточность очевидна поскольку из критичности J_0 в задачах $\mathbf{A}_a$, отвечающих всем одноэлементным индексам a, следует критичность этого числа в задаче $\mathbf{A}$.

Доказательство необходимости можно получить как прямое следствие теоремы, посвященной обоснованию скользящих режимов в нелинейных задачах со смешанными ограничениями [9]. Мы приводим доказательство необходимости для иллюстрации метода, позволяющего получить независимое доказательство этой теоремы.

Доказательство будем вести от противного. Положим, значение J_0 является критическим для функционала J в задаче $\mathbf{A}$ и не является критическим в некоторой задаче $\mathbf{A}_a$, $a = (u_2^1, \dots, u_2^\varkappa)$, где $\varkappa = d(a)$, $u_2^j(t)\ (\in)\ \mathbf{Z}(t)$ $(j = 1, \dots, \varkappa)$. Следовательно, найдется элемент $w^0 = (x^0, u_1^0, \alpha^0) \in W_a$, удовлетворяющий одновременно равенству 3.6 и неравенствам 3.7.

Покажем, что при любом $\eta > 0$ гиперплоскость H пространства W_a, определенная формулой

1. $$H = w^0 + L_a,$$

содержит точку $\overline{w} = (\overline{x}, \overline{u}_1, \overline{\alpha})$, удовлетворяющую условиям:

2а) $$\|(\overline{x}, \overline{u}_1) - (x^0, u_1^0)\|^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta} < \eta,$$

б) $$T_a(\overline{w}) + r_0 = 0,$$

в) компоненты вектора $\bar{\alpha}(t)$ принимают лишь два значения 0 или 1. Существование такой точки для всех достаточно малых $\eta > 0$ противоречиво. Действительно. По условию $w^0 = (x^0, u_1^0, \alpha^0)$ удовлетворяет 3.7. Следовательно:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x^0(t), u_1^0(t), e(t)\big) < 0 \qquad \big(s = 1, \ldots, d(\Phi)\big),$$

$$\varphi_i(p^0) < 0 \quad \big(i = 1, \ldots, d(\varphi)\big), \qquad J(p^0) - J_0 < 0, \qquad p^0 = \big(x^0(t_0), x^0(t_1)\big).$$

Поэтому из 2а) вытекает, что для всех достаточно малых $\eta > 0$

$$3. \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t), e(t)\big) < 0 \qquad \big(s = 1, \ldots, d(\Phi)\big),$$

$$\varphi_i(\bar{p}) < 0 \quad \big(i = 1, \ldots, d(\varphi)\big), \qquad J(\bar{p}) < J_0, \qquad \bar{p} = \big(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)\big).$$

Далее. Согласно формуле 1 $\bar{w} - w^0 \in L_a$. А так как в силу условия 2.б) $T_a(\bar{w}) = -r_0$, то из определения оператора P_a и подпространства L_a следует, что $P_a(\bar{w} - w^0) = 0$ или $P_a(\bar{w}) = P_a(w^0)$, откуда $P_a(\bar{w}) + y^0 = 0$. Таким образом для точки $\bar{w}$ выполняются равенства 3.1. Положим

$$\bar{u}_2(t) = \sum_{j \le \varkappa} \bar{\alpha}^j(t)\, u_2{}^j(t), \qquad \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2).$$

Тогда из сравнения 3.1 и 1.1 вытекает, что точка $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет условию 1.1. И, наконец, из 2в) следует, что точка $\bar{u}_2$ является выборкой из $\mathbf{Z}(t)$ вместе с функциями $u_2{}^j$ $(j = 1, 2, \ldots, \varkappa)$. Итак, точка $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет всем ограничениям задачи **А** и для нее выполняются неравенства 3, а значит и 2.1. Последнее невозможно, поскольку число J_0 является критическим значением функционала J в задаче **А**.

Итак, для доказательства необходимости осталось установить существование точек $\bar{w}$ для всех $\eta > 0$. Приступим к этому.

Линейный оператор T_a отображает L_a на подпространство $E_a \subset \mathbf{R}^{d(r_0)}$. В силу линейности T_a и конечномерности E_a существует подпространство $L \subset L_a$ такое, что

4а) $T_a(L) = E_a$ и

б) $\dim L = \dim E_a$.

Обозначим через $\overline{T}_a$ сужение T_a на L. Ясно, что $\overline{T}_a$ является гомеоморфизмом L на E_a. Пусть O единичная сфера в E_a. Тогда $\overline{T}_a{}^{-1}(O)$ — компакт пространства L. Обозначим через H_+ совокупность всех точек $w = (x, u_1, \alpha)$ из H, у которых компоненты вектора α неотрицательны. Положим, далее, $O_* = -\delta\overline{T}_a{}^{-1}(O) + w^0$. В силу формулы 1 O_* содержится в H при любом δ. Согласно условию w^0 удовлетворяет неравенствам 3.7. Поэтому $\operatorname*{vrai\,min}_{\Delta} \alpha^j(t) > 0$ для всех $j = 1, \ldots, \varkappa$.

Следовательно, в силу компактности $\overline{T}_a{}^{-1}(O)$, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $Q_* \subset H_+$ для всех δ, $0 < \delta < \delta_0$. Зафиксируем одно из таких чисел δ.

Для построения траектории $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{\alpha})$, содержащейся в H и удовлетворяющей условиям 2а)—в), введем последовательность операторов π_s, отображающих H_+ в себя для всех натуральных $s > 1$. В качестве образа $w = (x, u_1, \alpha) \in H_+$ при отображении π_s примем точку $w' = (x', u_1', \alpha')$, определённую соглашениями:

Для $\quad i = 0, 1, \ldots, s-1 \quad$ и $\quad l = 1, 2, \ldots, \varkappa \quad$ положим

$$\bar{t}_i = t_0 + \frac{i}{s} \operatorname{mes} \Delta, \qquad \Delta_i = [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$$

$$\bar{t}_{i,l} = \bar{t}_i + \sum_{k<l} \int_{\Delta_i} \alpha^k(t)\, dt, \qquad \Delta_{i,l} = [\bar{t}_{i,l}, \bar{t}_{i,l+1}].$$

Тогда компонента $\alpha'^{,l}$ вектора α' определяется равенством $\alpha'^{,l}(t) = \chi_{\cup\Delta_{i,l}}(t)$, а составляющие x', $\dot{u}_1'$ точки w' определяются из условий:

$$\dot{x}'(t) \,(=)\, A_0\big(e(t)\big)\,x'(t) + A_1\big(e(t)\big)\,u_1'(t) + A_2\big(e(t)\big)\sum_{j\leqq\varkappa}\alpha'^{,j}(t)\,u_2^{\,j}(t) + a_0\big(e(t)\big),$$

$$x'(t_0) = x(t_0),$$

$$\overline{u}_1'(t) \,(=)\, U(t)\,\big[B_1\big(e(t)\big)\,u_1(t) - B_0\big(e(t)\big)\,\big(x'(t) - x(t)\big)\big].$$

Здесь $U(t) = B_1{}^*\big(e(t)\big)\big(B_1(e(t))\,B_1{}^*(e(t))\big)^{-1}$.

Корректность такого определения точки $w' = (x', u_1', \alpha')$ следует из того, что согласно формуле **1.14** $\operatorname{vrai\,min}_\Delta \det B_1\big(e(t)\big)\,B_1{}^*\big(e(t)\big) > 0$ и, следовательно, элементы матрицы $\big(B_1(e(t))\,B_1{}^*(e(t))\big)^{-1}$ — ограниченные измеримые функции, определенные почти всюду на Δ. Поэтому элементы матрицы U — также ограниченные измеримые функции на Δ и $B_1\big(e(t)\big)\,U(t)\,(=)\,I$ (I — единичная матрица). Непосредственно проверяется, что $w' \in H$. А так как компоненты вектора α' принимают лишь два значения 0 или 1, то тем самым доказано, что $w' \in H_+$.

Убедимся, что оператор $T_a\pi_s$ удовлетворяет на H_+ условию Липщица с константой, не зависящей от s. Положим $\overline{w}, \overline{\overline{w}} \in H_+\big(\overline{w} = (\overline{x}, \overline{u}_1, \overline{\alpha}),\ \overline{\overline{w}} = (\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{u}}_1, \overline{\overline{\alpha}})\big)$ и $\overline{w}' = \pi_s\overline{w}$, $\overline{\overline{w}}' = \pi_s\overline{\overline{w}}$ $\big(\overline{w}' = (\overline{x}', \overline{u}_1', \overline{\alpha}'),\ \overline{\overline{w}}' = (\overline{\overline{x}}', \overline{\overline{u}}_1', \overline{\overline{\alpha}}')\big)$. Оценим $\|\overline{\alpha}' - \overline{\overline{\alpha}}'\|_{L^\varkappa_{1,\Delta}}$. Из определения оператора π_s следует:

$$5. \qquad \|\overline{\alpha}' - \overline{\overline{\alpha}}'\|_{L^\varkappa_{1,\Delta}} = \sum_{l\leqq\varkappa}\|\overline{\alpha}'^{,l} - \overline{\overline{\alpha}}'^{,l}\|_{L^1_{1,\Delta}}$$

$$= \sum_{i<s,\,l\leqq\varkappa}\ \int_{\Delta_{i,l}} |\overline{\alpha}'^{,l}(t) - \overline{\overline{\alpha}}'^{,l}(t)|\,dt = \sum_{i<s,\,l\leqq\varkappa}\left|\int_{\Delta_{i,l}}\big(\overline{\alpha}'^{,l}(t) - \overline{\overline{\alpha}}'^{,l}(t)\big)\,dt\right|$$

$$\leqq \sum_{i<s,\,l\leqq\varkappa}\left|\int_{\Delta_i}\big(\overline{\alpha}^l(t) - \overline{\overline{\alpha}}^l(t)\big)\,dt\right| = \|\overline{\alpha} - \overline{\overline{\alpha}}\|_{L^\varkappa_{1,\Delta}}.$$

Это и формулы, выражающие $\pi_s w$ через w, позволяют установить следующие три утверждения:

6а) Существует константа k не зависящая от s такая, что для любых $\overline{w}, \overline{\overline{w}} \in H_+$

$$\|\pi_s\overline{w} - \pi_s\overline{\overline{w}}\|_{W_a(1)} < k\,\|\overline{w} - \overline{\overline{w}}\|_{W_a(1)},$$

где $\|\cdot\|_{W_a(1)}$ — норма в W_a, заданная для $w = (x, u_1, \alpha) \in W_a$ формулой $\|w\|_{W_a(1)} = \|x\|_{A^{d(x)}_\Delta} + \|u_1\|_{L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}} + \|\alpha\|_{L^\varkappa_{1,\Delta}}$.

б) Оператор $T_a\pi_s$ удовлетворяет на H_+ условию липщица с константой k не зависящей от s (ее можно считать совпадающей с константой пункта а)).

в) Для любого финксированного элемента $w = (x, u_1, \alpha) \in H_+$, последовательность $w^s = \pi_s w$, $w^s = (x^s, u_1{}^s, \alpha^s)$, сходится к W в смысле

$$\|(x^s, u_1{}^s) - (x, u_1)\|_{L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}} \to 0, \quad \int_\Delta\big(\alpha^s(t) - \alpha(t)\big)\,b(t)\,dt \to 0 \qquad \big(b \in L^\varkappa_{1,\Delta}\big),$$

то есть α^s сходится к α в $L^\varkappa_{1,\Delta}$ слабо.

Обозначая через z точки единичной сферы $O \subset E_a$ введем отображение Θ_s сферы O в E_a при помощи соглашения

$$7. \qquad \Theta_s z = T_a\pi_s\{w^0 - \delta\overline{T}_a{}^{-1}z\}.$$

По только что доказанному константа Липщица оператора Θ_s от s не зависит. Далее. В силу отмеченного выше свойства сходимости $\pi_s w$ к w, при любом фиксированном $z \in O$ имеет место предельное соотношение $\lim\limits_s \Theta_s z = -\delta z - r_0$. Так как O компакт, то $\Theta_s z$ сходится к $(-\delta z - r_0)$ равномерно на O. Следовательно, на сфере O оператор $\Theta_s(z) + r_0 + z$ равномерно сходится к $(1 - \delta) z$. Поэтому можно указать s_0 такое, что для всех $s > s_0$ этот оператор отображает сферу O в себя. В силу теоремы о неподвижной точке для каждого $s > s_0$ найдется точка $z_s \in O$ такая, что $\Theta_s z_s + z_s + r_0 = z_s$. Следовательно, $\Theta_s z_s = -r_0$. Далее. На H_+ имеем $T_a \pi_s w \to T_a w$. Поэтому

8. $\quad T_a \pi_s w^0 \to T_a w^0 = -r_0.$

Так как на сфере O сходимость $\Theta_s z \to -\delta z - r_0$ равномерная, то из соглашения 7 и свойства 8 вытекает, что $-\delta T_a \pi_s \overline{T}_a^{-1} z \to -\delta z$ равномерно на сфере O. Следовательно

9. $\quad \delta T_a \pi_s \overline{T}_a^{-1} z_s - \delta z_s \to 0.$

Согласно выбору z_s, из соглашения 7 следует

10. $\quad -\delta T_a \pi_s \overline{T}_a^{-1} z_s + T_a \pi_s w^0 = -r_0.$

Сравнивая это со сходимостью 9 получим $T_a \pi_s w^0 - \delta z_s \to -r_0$. Но из сходимости 8 следует, что $T_a \pi_s w^0 \to -r_0$. Поэтому $\delta z_s \to 0$. А так как $\delta > 0$ фиксированное число, то

11. $\quad z_s \to 0.$

Положим $\overline{w}^s = \pi_s\{-\delta \overline{T}_a^{-1} z_s + w^0\}$. Тогда

12. $\quad T_a \overline{w}^s = \Theta_s z_s = -r_0.$

По выбору $\delta > 0$ имеем $w^0 - \delta \overline{T}_a^{-1}(O) \subset H_+$. По $\pi_s H_+ \subseteqq H_+$. Поэтому

13. $\quad \overline{w}^s \in H_+,$

причем из определения оператора π_s вытекает, что компоненты вектора $\overline{\alpha}^s(t)$ принимают лишь два значения 0 или 1. Далее. Поскольку $\overline{w}^s, \pi_s w^0 \in H_+$, то из утверждения 6а) следует

$$\|\pi_s w^0 - \overline{w}^s\|_{W_a(1)} = \|\pi_s w^0 - \pi_s\{-\delta \overline{T}_a^{-1} z_s + w^0\}\|_{W_a(1)} \leqq K\delta \|\overline{T}_a^{-1} z_s\|_{W_a(1)}.$$

То есть

14. $\quad \|\pi_s w^0 - \overline{w}^s\|_{W_a(1)} \to 0.$

Положим $\pi_s w^0 = w^s$. Поскольку норма $\|\cdot\|_{A_\Delta^{d(x)}}$ в пространстве $A_\Delta^{d(x)}$ сильнее нормы $\|\cdot\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(x)}}$, то из сходимости 14 вытекает

15. $\quad \|(\overline{x}^s, \overline{u}_1^s) - (\overline{x}^0, \overline{u}_1^0)\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(x)+d(u_1)}} \to 0.$

Но согласно утверждению 6в) $\|(x^s, u_1^s) - (x^0, u_1^0)\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(x)+d(u_1)}} \to 0.$
Поэтому из сходимости 15 следует

16. $\quad \|(\overline{x}^s, \overline{u}_1^s) - (\overline{x}^0, \overline{u}_1^0)\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(x)+d(u_1)}} \to 0.$

Отсюда, из соотношения 12 и принадлежности 13 вытекает, что для каждого $\eta > 0$ в качестве точки $\overline{w} = (\overline{x}, \overline{u}_1, \overline{\alpha})$ можно принять точки $\overline{w}^s = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{\alpha}^s)$ при всех достаточно больших s ∎

Экстремальность значения J_0 функционала J

В силу леммы о доверии стационарность значения J_0 функционала J эквивалентна выполнению двух требований:

1. $\tau(J_0) \neq \emptyset$.

2. Значение J_0 является критическим в каждой из задач $\mathbf{A}_a$ ($a \in \mathscr{K}_0$).

Принцип максимума будет найден как эквивалент условия, более слабого чем стационарность, а именно как эквивалент экстремальности. Прежде чем определять экстремальность значения J_0 введём понятие полного индекса.

Определение 3.1: Индекс $a \in \mathscr{K}$ называется *полным*, если для любого $a' > a$ выполняется $T_{a'}L_{a'} = T_aL_a$. Совокупность всех полных индексов обозначается через K.

Прежде всего заметим, что $\mathbf{K} \neq \emptyset$. Действительно, для каждого $a \in \mathscr{K}$ T_aL_a является подпространством конечномерного пространства $\mathbf{R}^{d(r_0)}$. Так как T_aL_a монотонно зависят от a, то каждый индекс $a \in \mathscr{K}$ обладает полной мажорантой.

Ясно, что множество $\mathbf{K}$ полных индексов образует сеть по вложению.

Общее для всех индексов $a \in \mathbf{K}$ подпространство пространства $\mathbf{R}^{d(r_0)}$, являющееся образом L_a при отображении T_a, будет обозначаться через $\mathbf{E}$.

Определение 3.2: Значение J_0 функционала J называется *экстремальным*, если выполнены следующие два требования:

1. $\tau(J_0) \neq \emptyset$.

2. Число J_0 является критическим значением функционала J для всех задач $\mathbf{A}_a$, отвечающих полным индексам a.

Простые примеры показывают, что из стационарности и даже из оптимальности значения J_0 функционала J, вообще говоря, не следует его критичности во всех задачах $\mathbf{A}_a$ ($a \in \mathscr{K}$) Однако, если ограничиться только задачами $\mathbf{A}_a$, отвечающими полным индексам из $\mathbf{K}$, то, как будет показано в следующей теореме, из *стационарности* значения J_0 следует его *критичность* во всех таких задачах.

Теорема 3.1: *Экстремальность значения J_0 функционала J является необходимым условием стационарности.*

Доказательство: Доказательство экстремальности стационарного значения функционала J_0 будем вести от противного. Пусть J_0 стационарное значение функционала J, $\bar{a}$ — полный индекс и J_0 не является критическим в задаче $\mathbf{A}_{\bar{a}}$. Положим $\bar{a} = \left(\bar{u}_2{}^1(t), \ldots, \bar{u}_2{}^\varkappa(t)\right)$, $\varkappa = d(a)$. Для уменьшения громоздкости выкладок заметим, что если $a', a'' \in \mathscr{K}$ и $d(a') = d(a'')$, то $W_{a'} = W_{a''}$, $T_{a'} = T_{a''}$. Поэтому при доказательстве теоремы пространства W_a и операторы T_a, отвечающие индексам $a \in \mathscr{K}$, $d(a) = \varkappa$, будут обозначаться через W и T, соответственно.

Согласно предположению от противного существует точка $\overline{w} = (\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{\alpha}) \in W$; $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^\varkappa)$, такая, что

1а) $P_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{\alpha}) + y^0 = 0$,

б) $\varphi_i(\bar{p}) < -\delta_0 \qquad \left(i = 1, \ldots, d(\varphi)\right)$,

в) $\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\left(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t), e(t)\right) < -\delta_0$, г) $\operatorname{vrai}\min_{\Delta} \bar{\alpha}^j(t) > \delta_0$,

д) $J(\overline{p}) - J_0 < -\delta_0$,

где $\delta_0 > 0$ некоторое фиксированное число, $\overline{p} = (\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1))$. Приведем свойства 1а)—д) в противоречие со стационарностью J_0. Поскольку $a \in \mathcal{K}$, то существует последовательность индексов $\overset{n}{a} = \left(\overset{n}{u}_2{}^1(t), \ldots, \overset{n}{u}_2{}^\varkappa(t)\right)$ такая, что

2а) $\overset{n}{a} \in \mathcal{K}_0$ при всех n и

б) $\overset{n}{u}_2{}^j \to \bar{u}_2{}^j$ слабо в $L_{1,\Delta}^{d(u_2)}$ для всех $j = 1, \ldots, \varkappa$.

Для каждого натурального числа n введем элемент $\overset{n}{w} = \left(\overset{n}{x}, \overset{n}{u}_1, \bar{\alpha}\right) \in W$ и оператор $\overset{n}{\sigma} : W \to W$ следующим образом.

Пара $\left(\overset{n}{x}, \overset{n}{u}_1\right)$ определяется из системы уравнений

3а) $\dot{\overset{n}{x}}(t) \,(=)\, A_0(e(t))\, \overset{n}{x}(t) + A_1(e(t))\, \overset{n}{u}_1(t) + A_2(e(t)) \sum_j \bar{\alpha}^j(t)\, \overset{n}{u}_2{}^j(t) + a_0(e(t))$,

$\overset{n}{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$;

б) $\overset{n}{u}_1(t) = \bar{u}_1(t) + U(t)\, B_0(e(r)) \left(\bar{x}(t) - \overset{n}{x}(t)\right)$.

Как и выше здесь $U(t) = B_1{}^*(e(t)) \left(B_1(e(t))\, B_1{}^*(e(t))\right)^{-1}$.

Пусть $w' = (x', u_1', \alpha) \in W$ значение оператора $\overset{n}{\sigma}$ в точке $w = (x, u_1, \alpha) \in W$, $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^\varkappa)$. Пара (x', u') находится из системы уравнений

4а) $\dot{x}'(t) = A_0(e(t))\, x'(t) + A_1(e(t))\, u_1'(t) + A_2(e(t)) \sum_j \alpha^j(t)\, \overset{n}{u}_2{}^j(t)$,

$x'(t_0) = x(t_0)$;

б) $u_1'(t) = u_1(t) + U(t)\, B_0(e(t)) \left(x'(t) - x(t)\right)$.

Корректность определения точек $\overset{n}{w}$ и операторов $\overset{n}{\sigma}$ следует из того, что элементы матрицы $U(t)$ в силу равенства 1.14 являются ограниченными измеримыми функциями. Из соотношений 3 и 4 вытекает, что

5а) $\overset{n}{\sigma}(L_{\bar{a}}) \subset L_{\overset{n}{a}}$ для всех n,

б) $\overset{n}{w} \to \overline{w}$ в $C_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)+\varkappa}$,

в) если $w \in L_{\bar{a}}$, то $\overset{n}{\sigma}(w) \to w$ в $C_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)+\varkappa}$.

Введём следующие обьекты: индекс $\overset{n}{b} = \left(\bar{u}_2{}^1(t), \ldots, \bar{u}_2{}^\varkappa(t), \overset{n}{u}_2{}^1(t), \ldots, \overset{n}{u}_2{}^\varkappa(t)\right)$ длины $2\varkappa$, элементы $\overset{n}{\underset{\bullet}{w}} = \left(\overset{n}{x}, \overset{n}{u}_1, \overset{n}{\underset{\bullet}{\alpha}}\right)$ и $\underset{\bullet}{\overline{w}} = \left(\bar{x}, \bar{u}_1, \underset{\bullet}{\bar{\alpha}}\right)$ пространства $W_{\overset{n}{b}}$, у которых компоненты $\overset{n}{\underset{\bullet}{\alpha}}$ и $\underset{\bullet}{\bar{\alpha}}$ задаются условиями $\overset{n}{\underset{\bullet}{\alpha}} = (0, \ldots, 0, \bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^\varkappa)$ и $\underset{\bullet}{\bar{\alpha}} = (\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^\varkappa, 0, \ldots, 0)$.

Тогда $\overset{n}{\underset{v}{w}} - \underset{v}{\overline{w}} \in L_{\overset{n}{b}}$. Из определения множества $\mathbf{E}$ вытекает, что $T_{\overset{n}{b}}\left(\overset{n}{\underset{v}{w}} - \underset{v}{\overline{w}}\right) \in \mathbf{E}$. С другой стороны $T_{\overset{n}{b}}\left(\overset{n}{\underset{v}{w}} - \underset{v}{\overline{w}}\right) = T\left(\overset{n}{w} - \overline{w}\right)$. Поэтому

6. $\quad T\left(\overset{n}{w} - \overline{w}\right) \in \mathbf{E}.$

Поскольку $\bar{a}$ полный индекс, то $TL_{\bar{a}} = \mathbf{E}$. Обозначим через L подпространство $L_{\bar{a}}$, являющееся прообразом $\mathbf{E}$ при отображении $T : L_{\bar{a}} \to \mathbf{R}^{d(r_0)}$ и удовлетворяющее условию $\dim L = \dim \mathbf{E}$. И далее, обозначим через $\overset{n}{L}$ подпространство $\overset{n}{\sigma}(L)$. В силу свойства 5а) $\overset{n}{L} \subset L_{\overset{n}{a}}$ при всех n. Согласно свойству 5в) из конечномерности L следует, что, при всех достаточно больших n, $\overset{n}{\sigma}$ является гомеоморфизмом L на $\overset{n}{L}$.

Обозначим через $\overset{n}{T}$ сужение T на $\overset{n}{L}$. Из соотношений 5б)—в) следует, что операторы $\overset{n}{T}{}^{-1}$ для всех достаточно больших n определены на всем подпространстве $\mathbf{E}$ и их нормы ограничены в совокупности некоторым числом $\mathbf{k}_*$. Согласно включению в 6 $\overset{n}{T}{}^{-1}\left(\overline{w} - \overset{n}{w}\right) \in \overset{n}{L} \subset L_{\overset{n}{a}}$. Положим $\overset{n}{\overline{w}} = \overset{n}{w} + \overset{n}{T}{}^{-1}T\left(\overline{w} - \overset{n}{w}\right)$. Тогда $T\left(\overset{n}{\overline{w}}\right) = T\left(\overset{n}{w} + \overset{n}{T}{}^{-1}T\left(\overline{w} - \overset{n}{w}\right)\right) = T(\overline{w}) = -r_0$. Следовательно $P_{\overset{n}{a}}\left(\overset{n}{\overline{w}}\right) + y^0 = 0$. Поскольку

$$\left\|\overset{n}{\overline{w}} - \overset{n}{w}\right\|_{C_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)+\varkappa}} \leqq k_* \|T\| \left\|\overline{w} - \overset{n}{w}\right\|_{C_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)+\varkappa}},$$

то из предельного соотношения 5б) следует, что, для всех достаточно больших n, J_0 не является критическим значением функционала J в задаче $\mathbf{A}_{\overset{n}{a}}$. Последнее, в силу леммы о доверии, приводит нас к противоречию поскольку $\overset{n}{a} \in \mathcal{K}_0$ для всех n ∎

Как уже отмечалось принцип максимума будет найден как эквивалент экстремальности значения J_0.

Укажем три важных случая задачи $\mathbf{A}$ в которых все индексы полны:

3.8 а) Правая часть дифференциальной связи **1.1** от u_2 не зависит. Это выпуклые задачи.

б) Почти всюду на $\triangle$ множество $A_2(e(t))\,\mathbf{Z}(t)$ является одноэлементным.

в) Либо первые, либо последние $d(x)$ столбцов матрицы R равны нулю.

В каждом из этих случаев экстремальность эквивалентна стационарности.

В дальнейшем нам потребуется утверждение

3.9 *Если $a', a'' \in K$, то $P_{a'}W_{a'} = P_{a''}W_{a''}$.*

Доказательство: Очевидно, множества P_aW_a монотонно неубвают при увеличении a. если $a' > a''$, то $P_{a'}W_{a'} \subset P_{a''}W_{a''}$. Поэтому достаточно показать, что если $a' > a''(a', a'' \in K)$ и $y' \in P_{a'}W_{a'}$, то $y' \in P_{a''}W_{a''}$. Положим $y'(t) = (y_x'(t), y_r'(t), y_b'(t), y_\alpha'(t))$. Тогда найдется элемент $w' \in W_{a'}$ такой, что $P_{a'}w' = y'$. Непосредственно усматривается, что система

$$\dot{x} - A_0x - A_1u_1 - A_2 \sum_{j \leq d(a'')} \alpha^j u_2^j = y_x', \quad B_0x + B_1u_1 = y_b', \quad \sum_{j \leq d(a'')} \alpha^j = y_\alpha'$$

совместна. Пусть $w_* \in W_{a''}$ её решение. Положим $P_{a''}w_* = y_*$. Очевидно $y' - y_* \in P_{a'}L_{a'} = P_{a''}L_{a''}$. Следовательно, существует точка $\overline{w} \in L_{a''}$ такая, что $P_{a''}\overline{w} = y' - y_*$. Поэтому $y' = P_{a''}(\overline{w} + w_*)$ ∎

Укажем еще на одно свойство полных индексов. А именно, *если J_0 экстремальное значение функционала J, то для каждого полного индекса $a \in K$ имеет место включение*

3.10 $\quad y^0 \in P_a W_a.$

Действительно, поскольку J_0 экстремальное значение функционала J, то $\tau(J_0) \neq \emptyset$. Пусть последовательность $\tau = \{(x^s, u^s)\}$ содержится в $\tau(J_0)$. Тогда каждый одноэлементный индекс a^s, отвечающий члену последовательности (x^s, u^s), обладает свойством $P_{a^s}W_{a^s} \ni y^0$, которое заведомо выполняется для полной мажоранты индекса a^s. Поэтому из свойства **3.9** следует справедливость включения **3.10** ∎

§ 4. Нетривиальные решения уравнения Эйлера критического значения J_0 функционала J в задаче $\mathbf{A}_a$

Нетривиальные решения уравнения Эйлера в выпуклых задачах

Аналитические условия несовместности конечной системы выпуклых неравенств с линейным равенством были получены в [1]. Они являются обобщением нетривиального решения уравнения Эйлера (н. р. э.) конечной системы непустых выпуклых множеств [5]. В дальнейшем эти условия мы будем называть н. р. э. системы, содержащей конечное число выпуклых неравенств и линейное равенство. Напомним их применительно к задаче об $\inf J$.

Пусть W, Y — банаховы пространства, φ_i, J — выпуклые непрерывные функционалы пространства W, A — линейный оператор, отображающий W в Y. Предполагается, что оператор A правилен, то есть что линейное многообразие AW замкнуто.

Введем определение критичности значения функционала J следующей абстрактной задачи:

Найти $\inf J(w)$, *если*

4.1 а) $\quad \varphi_i(w) \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ *и*

б) $\quad Aw + b = 0,$ *где* $b \in Y$ *фиксированный элемент.*

Число J_0 называется *критическим* значением функционала J в этой задаче, если равенство

4.2 а) $\quad Aw + b = 0$ несовместно с неравенствами

б) $\quad \varphi_i(w) < 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad J(w) - J_0 < 0.$

Согласно [1] эта несовместность эквивалентна существованию н. р. э. этой системы, состоящему в существовании элементов $\nu_0, \nu_i \in W^*$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\mu \in Y^*$, удовлетворяющих набору условий

4.3 а) $\quad \nu_0 \in \partial J; \qquad \nu_i \in \partial\varphi_i, \qquad \alpha_i \geqq 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$

(Условия принадлежности),

б) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \nu_i(w) + \mu(Aw) = 0$,

в) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i n(\nu_i, \varphi_i) + \alpha_0\big(n(\nu_0, J) - J_0\big) + \mu(b) = 0$

(*Уравнение Эйлера*),

г) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i + \|\mu\| > 0$

(*Нормировочное неравенство*).

Для невырожденных задач (то есть задач, у которых $b \in AW$) среди н. р. э. существуют такие, для которых нормировочное неравенство г) может быть заменено более сильным условием

г^0) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i > 0$.

Докажем это. Поскольку $Y_0 := AW$ является замкнутым линейным многообразием банахова пространства Y, то Y_0 — банахово пространство. Поэтому в н. р. э. **4.3** вместо Y можно принять банахово пространство Y_0. Убедимся, что для такого н. р. э. $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i > 0$. Если допустить противное, то из уравнения Эйлера **4.3б)** будет следовать, что $\mu(Aw) = 0$ для всех $w \in W$. Поскольку $\mu \in Y_0^*$, а $AW = Y_0$, то $\mu \equiv 0$, а это противоречит неравенству **4.3г)**. Следовательно $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i > 0$. Продолжив функционал μ на все пространство Y получим н. р. э. с нормировочным условием **4.3г^0)**.

Для того, чтобы найденные абстрактные условия критичности можно было применить к задачам A_a необходимо выполнить следующую программу действий:

а) Установить правильность каждого из операторов P_a.

б) Найти общий вид линейных функционалов, опорных к

$$J(p), \qquad \varphi_i(p), \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \big(-\alpha^j(t)\big), \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big).$$

в) Найти выражения для величин $n(\lambda, \cdot)$, отвечающих этим функционалам.

г) Установить невырожденность каждой из присоединенных задач, отвечающих полным индексам $a \in K$.

Согласно **3.10** для каждого полного индекса $a \in K$ имеем $P_aW_a \ni y^0$. Следовательно присоединенные задачи, отвечающие полным индексам, являются невырожденными. Поэтому нам необходимо выполнить лишь предписания а)—в).

Правильность оператора P_a

Покажем, что *многообразие P_aW_a является замкнутым для каждого индекса $a \in \mathcal{K}$.*

Пусть $y^s = (y_x{}^s, y_r{}^s, y_b{}^s, y_\alpha{}^s) \in P_aW_a$, $\bar y = (\bar y_x, \bar y_r, \bar y_b, \bar y_\alpha)$ и $y^s \to \bar y$. Убедимся, что $\bar y \in P_aW_a$. Для этого рассмотрим систему

4.4а) $\dot x - A_0x - A_1u_1 - A_2 \sum_{j \leq d(a)} \alpha^j u_2{}^j = y_x{}^s$, $\qquad \sum_{j \leq d(a)} \alpha^j = y_\alpha{}^s$,

$B_0x + B_1u_1 = y_b{}^s$,

б) $x(t_0) = 0$.

Решение ее будем искать среди (x, u_1, α), удовлетворяющих условиям

4.5 $\qquad u_1 = B_1^*(B_1B_1^*)^{-1}\,\xi, \quad \xi \in L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta}, \quad \alpha^1 = y_a{}^s, \qquad \alpha^j = 0$ если $j > 1$.

Для таких (x, u_1, α) система 4.4 эквивалентна уравнению

$$\dot{x} = A_0x - A_1B_1^*(B_1B_1^*)^{-1}(y_b{}^s - P_0x) - A_2u_2'y_a{}^s - y_a{}^s = 0, \; x(t_0) = 0,$$

обладающему решением $(x_*{}^s, u^s_{1*}, \alpha_*{}^s) = w_*{}^s$. Поскольку последовательность y^s сходится к $\bar{y}$ в метрике пространства Y, то $w_*{}^s$ сходится к некоторому элементу w_* пространства W_a в его метрике. Ясно, что w_* удовлетворяет системе 4.4, в которую вместо y^s поставлен вектор $\bar{y}$. Положим, как и при доказательстве леммы о доверии, $T_aL_a = E_a$. Ясно, что E_a подпространство $\mathbf{R}^{d(r_0)}$. Обозначим через L прообраз E_a при отображении T_a такой, что $\dim L = \dim E_a$, а через $\overline{T}_a$ сужение T_a на L. Ясно, что $\overline{T}_a$ гомеоморфизм L на E_a. Пусть $\{w^s\} \subset W_a$ такова, что $P_aw^s = y^s$ (существование w^s следует из включения $y^s \in P_aW_a$). Так как w^s и $w_*{}^s$ удовлетворяют 4.4а), то $w^s - w_*{}^s \in L_a$. Поэтому $T_a(w^s - w_*{}^s) \in E_a$. Но $T_a(w^s) = y_r{}^s$. Следовательно $y^s{}_r - T_a(w_*{}^s) \in E_a$. Так как опратор T_a непрерывный, а $w_*{}^s$ и $y_r{}^s$ имеют пределы при $s \to \infty$, то $\bar{y}_r - T_a(w_*) \in E_a$. Далее, поскольку $\overline{T}_a{}^{-1}$ осуществляет гомеоморфизм E_a на L, то $\overline{T}_a{}^{-1}\big(\bar{y}_r - T_a(w_*)\big) \equiv w_{**} \in L \subset L_a$. Применяя к последнему равенству T_a получим $\bar{y}_r = T_a(w_* + w_{**})$. Выше мы отмечали, что w_* удовлетворяет системе, полученной из 4.4 заменой y^s на $\bar{y}$. Так как $w_{**} \in L_a$, то и $w_* + w_{**}$ удовлетворяет той же системе. Но $T_a(w_* + w_{**}) = \bar{y}_r$. Поэтому $P_a(w_* + w_{**}) = \bar{y}$. Тем самым замкнутость многообразия P_aW_a доказана, а значит, оператор P_a является правильным для любого индекса a ∎

Перейдем теперь к нахождению общего вида функционалов, опорных к выпуклым финкционалам и отвечающим ограничениям типа неравенств задачи $\mathbf{A}_a$.

Учитывая общность исследуемой задачи следует оговорить класс объектов, которые мы будем считать эффективно вычислимыми (по крайней мере в принципе). Этими объектами мы будем считать наряду с функциями J, φ_i, $\Phi_s[e]$ множества опорных функционалов $\{\varkappa_0\} \in \partial J$, $\{\varkappa_i\} \in \partial\varphi_i$, $\{l\} \in \partial\Phi_s$ и функции $n(\varkappa_0, J)$, $n(\varkappa_i, \varphi_i)$, $n(l, \Phi_s[e])$ (определенные на этих множествах) аналогично тому, что вместе с гладкой функцией считается эффективно заданной ее производная, а вместе с суммируемой функцией ее первообразная.

Общий вид линейных функционалов пространства W_a, опорных к $\operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \{-\alpha^j(t)\}$ $\big(j = 1, 2, \ldots, d(a)\big)$.

Непосредственно проверяется, что ими будут функционалы $-\gamma_j(\alpha^j)$ $(0 \leqq \gamma_j \in L^{1'}_{\infty,\Delta}$, $\|\gamma_j\| = 1)$. При этом $n\Big(-\gamma_j, \; \operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \{-\alpha^j(t)\}\Big) = 0$.

Общий вид линейных функционалов пространства W_a, опорных к $\operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big)$

Получение такого описания в терминах объектов, эффективно заданных, требует проведения некоторых конструкций. Условимся в обозначениях:

$\Pi_s[t]$ — афинная оболочка субградиента $\partial\Phi_s[e(t)]$, то есть совокупность векторов пространства $\mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)}$, допускающих представления в виде конечных сумм $\sum c_kl_k\big(l_k \in \partial\Phi_s[e(t)], \sum c_k = 1\big)$.

dm_{st} — мера Лебега в $\Pi_s[t]$.

$d\overline{m}_{st}$ — вероятностная мера $\dfrac{1}{m_{st}\,\partial\Phi_s[e(t)]}\,\chi_{\partial\Phi_s[e(t)]}(l)\,dm_{st}$, определенная на $\Pi_s[t]$.

$\mathscr{E}$ — измеримое множество отрезка Δ.

ν_s — линейный функционал пространства W_a, являющийся опорным к $\operatorname{vrai}\max_{\mathscr{E}} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))$, то есть $\nu_s \in \partial\left\{\operatorname{vrai}\max_{\mathscr{E}} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))\right\}$. Тогда $n\left(\nu_s, \operatorname{vrai}\max_{\mathscr{E}} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))\right)$ мы будем обозначать через $n\left(\nu_s, \operatorname{vrai}\max_{\mathscr{E}} \Phi_s\right)$.

В пространстве всех непрерывных функций $z = z(l, t)$, $(l, t) \in \mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)} \times \Delta$ и $|l| \leqq 2k_0$, введем меру Радона σ_s при помощи соглашения

4.6 $$\int z(l, t)\,d\sigma_s = \int dt \int z(l, t)\,d\overline{m}_{st}.$$

Ясно, что она однозначно определяется функцией $\Phi_s[e(t)]$, а чтобы установить корректность ее задания необходимо показать, что *функция* $\int z(l, t)\,d\overline{m}_{st}$ *переменного* t *измерима на* Δ *для любой непрерывной функции* $z(l, t)$.

Докажем это. Пусть $\mathscr{F}$ некоторое замкнутое множество отрезка Δ, на котором функция e непрерывна. Из предположения **1.4 г)** следует, что $\operatorname{gr}\partial\Phi_s[e(\cdot)] \mid \mathscr{F}$ является компактом пространства $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$ и на нем функция $n(l, \Phi_s[e(t)]$ полунепрерывна сверху. Кроме того на этом компакте для функции $|l|$ имеет место оценка $|l| \leqq k_0$. Пусть $\delta > 0$ и обозначим через $\mathscr{F}_\delta$ совокупность всех точек $t \in \mathscr{F}$, в каждой из которых $m_{st}\,\partial\Phi_s[e(t)] \geqq \delta$. Поскольку $\operatorname{gr}\partial\Phi_s[e(\cdot)] \mid \mathscr{F}$ является компактом пространства $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$, то при любом выборе K множество точек $t \in \mathring{\mathscr{F}}_\delta$, в каждой из которых $\dim \Pi_s[t] < k$, открыто на $\mathscr{F}_\delta$. А так как множество $\partial\Phi_s[e(t)]$ выпукло, то оно содержит внутренние точки $\Pi_s[t]$. Следовательно $\mathscr{F} = \bigcup_{\delta>0} \mathscr{F}_\delta$. Поэтому множество точек $t \in \mathscr{F}$, в каждой из которых $\dim \Pi_s[t] < k$, открыто на $\mathscr{F}$. Таким образом с точностью до множества меры нуль отрезок Δ можно представить в виде счетной суммы замкнутых множеств, на каждом из которых функция e непрерывна, а $\dim \Pi_s[t]$ является константой. Пусть $\mathscr{F}$ одно из таких множеств. На нем дункция переменного t

$$\int_{\partial\Phi_s[e(t)]} z(l, t)\,dm_{st} = \int_{\partial\Phi_s[e(t)]} z^+(l, t)\,dm_{st} - \int_{\partial\Phi_s[e(t)]} z^-(l, t)\,dm_{st}$$

измерима по Лебегу, будучи разностью двух непрерывных сверху функций. Таким образом корректность формулы **4.6** доказана ∎

Отметим следующие два очевидных свойства меры σ_s:

Прежде всего ясно, что σ_s является положительной мерой. И, далее, ее проекция на ось t совпадает с мерой Лебега на отрезке Δ. Поэтому $\|\sigma_s\| = t_1 - t_0$ и все функции $(x, u_1) \in L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ суммируемы по мере σ_s.

Введем два обозначения:

$L_1{}^1(\sigma_s)$ — совокупность всех функций, определенных почти всюду в смысле меры σ_s на $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$ и суммируемых по ней, а

$L^1_\infty(\sigma_s)$ — совокупность всех измеримых относительно меры σ_s функций, определенных почти всюду на $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$ и у которых норма

$$\|z\|_{L^1_\infty(\sigma_s)} = \operatorname{vrai}\max\,(\sigma_s)\,|z(l, t)| = \inf_{\mathscr{E}}\left\{\sup_{(l,t)\in\mathscr{E}} |z(l, t)| : \sigma_s(\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1 \setminus \mathscr{E}) = 0\right\}$$

ограничена. Ясно, что $L^1_\infty(\sigma_s)$, $L_1{}^1(\sigma_s)$ банаховы пространства и $L^1_\infty(\sigma_s) \subset L_1{}^1(\sigma_s)$.

Убедимся, что функция $n(l, \Phi_s[e(t)])$ содержится в $L^1_\infty(\sigma_s)$.

Действительно. Пусть $\mathcal{F} \subset \Delta$ некоторое замкнутое множество, на котором функция e непрерывна. Тогда функция $n(l, \Phi_s[e(t)])$ полунепрерывна сверху на $\mathbf{R}^{(dl)} \times \mathcal{F}$. Поскольку мера σ_s проектируется на ось t в меру Лебега отрезка Δ, а Δ можно представить в виде счетной суммы замкнутых множеств, на каждом из которых функция e непрерывна, плюс некоторое множество нулевой меры Лебега, то из сказанного следует, что функция $n(l, \Phi_s[e(t)])$ измерима относительно меры σ_s. Для завершения доказательства σ_s — ограниченности функции $n(l, \Phi_s[e(t)])$ достаточно показать, что каждое замкнутое множество $\mathcal{E}$ пространства $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$, на котором $|n(l, \Phi_s[e(t)])| > \mathbf{k}_0$, имеет σ_s— меру, равную нулю, то есть $\int \chi_\varepsilon(l, t)\, d\sigma_s = 0$. Пусть $\mathcal{F} \subset \Delta$ замкнутое множество, на котором e непрерывна. Тогда $H \doteq \operatorname{gr} \partial\Phi_s[e(t)] \mid \mathcal{F}$ является компактом пространства $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$ и на нем функция $n(l, \Phi_s[e(t)])$ по модулю не превосходит $\mathbf{k}_0$. Обозначим через $m = m(l, t)$ непрерывную функцию, определенную на $\mathbf{R}^{d(l)} \times \mathbf{R}^1$ и обладающую свойствами: $0 \leqq m(l, t) \leqq 1$ во всех точках (l, t), на H она исчезает, а на $\mathcal{E}$ равна единице. Тогда

$$\sigma_s(\mathcal{E}) = \int \chi_{\mathcal{E}}(l, t)\, d\sigma_s \leqq \int m(l, t)\, d\sigma_s$$
$$= \int_{\mathcal{F}} dt \int_{\partial\Phi_s[e(t)]} m(l, t)\, d\overline{m}_{st} + \int_{\Delta \setminus \mathcal{F}} dt \int_{\partial\Phi_s[e(t)]} m(l, t)\, d\overline{m}_{st} \leqq \operatorname{mes}(\Delta \setminus \mathcal{F}).$$

Поскольку число $\operatorname{mes}(\Delta \setminus \mathcal{F})$ надлежащим выбором $\mathcal{F}$ можно следать сколь угодно малым, то $\sigma_s(\mathcal{E}) = 0$. Таким образом доказано, что $n(l, \Phi_s[e(t)]) \in L^1_\infty(\sigma_s)$ ∎

Для получения общего вида функционалов, опорных к $\operatorname{vrai}\max_{\mathcal{E}} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))$, где $\mathcal{E}$ — некоторое измеримое множество отрезка Δ, потребуются две формулы:

4.7 а) $\int z(l, t)\, d\sigma_s = \int dt \int z(l, t)\, d\overline{m}_{st}$ *для любой функции* $z \in L_1^1(\sigma_s)$;

б) $\operatorname{vrai}\max_G (\sigma_s)\, z(l, t) = \operatorname{vrai}\max_\Delta \operatorname{vrai}\max_{l \in G(t)} z(l, t)$ *для любой функции* $z \in L^1_\infty(\sigma_s)$ *и любого множества* G, *измеримого относительно меры* σ_s.

Доказательство: а) Пусть $F \subset \mathbf{R}^{d(l)+1}$ замкнутое множество. Обозначим через $\{f_n\}$, $f_n = f_n(l, t)$, последовательность непрерывных функций, сходящуюся к $\chi_F(l, t)$ в каждой точке (l, t), $0 \leqq f_n(l, t) \leqq 1$. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int f_n(l, t)\, d\overline{m}_{st} \to \int \chi_F(l, t)\, d\overline{m}_{st} \quad \text{для всех} \quad t \in \Delta.$$

Поэтому

$$\int dt \int f_n(l, t)\, d\overline{m}_{st} \to \int dt \int \chi_F(l, t)\, d\overline{m}_{st},$$

и, кроме того,

$$\int f_n(l, t)\, d\sigma_s \to \int \chi_F(l, t)\, d\sigma_s.$$

Отсюда, поскольку $\int f_n(l, t)\, d\sigma_s = \int dt \int f_n(l, t)\, d\overline{m}_{st}$, следует

$$\int \chi_F(l, t)\, d\sigma_s = \int dt \int \chi_F(l, t)\, d\overline{m}_{st}.$$

В свою очередь из этого вытекает, что $\int \chi_{\mathcal{E}}(l, t)\, d\sigma_s = \int dt \int \chi_{\mathcal{E}}(l, t)\, d\overline{m}_{st}$ для любых множеств типа F_σ и G_δ. Поскольку каждое множество $\mathcal{E}$, измеримое относительно меры σ_s, можно заключить между множествами $\mathcal{E}_* \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ типа F_σ

и G_δ соответственно, такими, что $\sigma_s(\mathscr{E}^* \setminus \mathscr{E}_*) = 0$, то

$$\int dt \int \chi_{\mathscr{E}^*}(l, t)\, d\overline{m}_{st} = \int dt \int \chi_{\mathscr{E}_*}(l, t)\, d\overline{m}_{st}.$$

Следовательно $\overline{m}_{st}\mathscr{E}^*(t) = \overline{m}_{st}\mathscr{E}^*(t) = \overline{m}_{st}\mathscr{E}(t)$ почти всюду на Δ. Поэтому функция $\chi_{\mathscr{E}}(l, t)$ почти для всех t суммируема по мере $\overline{m}_{st}$ и $\int dt \int \chi_{\mathscr{E}}(l, t)\, d\overline{m}_{st} = \int \chi_{\mathscr{E}}(l, t)\, d\sigma_s$. Тем самым формула **4.7 а)** доказано для всех характеристических функций множеств, измеримых относительно меры σ_s, а отсюда уже обычным образом доказывается справедливость ее для всех функций, суммируемых относительно меры σ_s.

б) Положим $a = \operatorname*{vrai\,max}_{G} (\sigma_s)\, z(l, t)$. Согласно определению этого vrai max существует измеримое относительно меры σ_s множество $G_* \subset G$ такое, что $\sigma_s(G \setminus G_*) = 0$ и $a = \sup\limits_{G_*} z(l, t)$. Из формулы **4.7 а)** вытекает, что $\overline{m}_{st}G(t) = \overline{m}_{st}G_*(t)$ почти всюду на Δ и что на множестве положительной меры $m_{st}G(t) > 0$. Поэтому

$$a = \sup_{G_*} z(l, t) = \sup_{t\in\Delta} \sup_{l\in G_*(t)} z(l, t) \geqq \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \operatorname*{vrai\,max}_{G(t)} z(l, t).$$

Установим обратное неравенство. Пусть $\delta > 0$. Найдется замкнутое множество $G_\delta \subset G$, $\sigma_s G_\delta > 0$, на котором $z(l, t) > a - \delta$. Тогда $\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \operatorname*{vrai\,max}_{G_\delta(t)} z(l, t) \geqq a - \delta$. Тем более $\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \operatorname*{vrai\,max}_{G(t)} z(l, t) \geqq a - \delta$. В силу произвольности δ следует $\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \operatorname*{vrai\,max}_{G(t)} z(l, t) \geqq a$ ∎

Теперь можно описать общий вид функционалов пространства $L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ опорных к выпуклому функционалу $\operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))$. Пусть $(x, u_1) \in L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$, t — точка, содержащаяся в области определения функций x, u_1, e и такая, что $e(t) \in \overline{e}(t)$. Множество точек t, удовлетворяющих этим условиям, имеет полную меру на Δ. В каждой из них функция $\Phi_s[e(t)]\colon \mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(u_1)} \to \mathbf{R}^1$ определена и выпукла. Согласно [1] имеем формулу

$$\textbf{4.8} \qquad \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t)) = \max_{l\in\partial\Phi_s[e(t)]} \{l(x(t), u_1(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\}.$$

Убедимся, что в ней вместо $\max\limits_{l}$ можно поставить $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{l}$. Для этого заметим, что функция $n(l, \Phi_s[e(t)])$ переменной l определена, вогнута и полунепрерывна сверху на выпуклом компакте $\partial\Phi_s[e(t)]$ пространства $\mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)}$, причем $|n(l, \Phi_s[e(t)])| < \mathbf{K}_0$. Из сказанного следует, что она непрерывна во всех внутренних (относительно $\Pi_s[e(t)]$) точках компакта $\partial\Phi_s[e(t)]$ и на каждом отрезке, содержащемся в $\partial\Phi_s[e(t)]$. Поэтому из формулы **4.8** следует

$$\Phi_s(x(t), u_1(t), e(t)) = \operatorname*{vrai\,max}_{l\in\partial\Phi_s[e(t)]} \{l(x(t), u_1(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\}.$$

Далее. Согласно формуле **4.7 б)**

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\operatorname{gr}\partial\Phi_s[e(t)]\,\|\,\mathscr{E}} (\sigma_s) \{l(x(t), u_1(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\}$$

$$= \operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathscr{E}} \operatorname*{vrai\,max}_{l\in\partial\Phi_s[e(t)]} \{l(x(t), u_1(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\}.$$

Поэтому

4.9 $$\operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) = \operatorname*{vrai\,max}_{\mathrm{gr}\,\partial\Phi_s[e(t)]|\mathscr{E}} \big\{l\big(x(t), u_1(t)\big) + n\big(l, \Phi_s[e(t)]\big)\big\}.$$

В [6] было показано, что линейные функционалы пространства $L^1_\infty(\sigma_s)$, опорные к сублинейному функционалу $\operatorname*{vrai\,max}_G (\sigma_s)\ z(l, t)$ этого пространства, допускают представление

4.10 $$\nu_s\big(z(l, t)\big), \quad \nu_s \parallel G, \quad 0 \leqq \nu_s \in L^{1'}_\infty(\sigma_s), \quad \|\nu_s\| = 1$$

($\nu_s \parallel G$ означает, что функционал ν_s равен нулю на всех функциях из $L^1_\infty(\sigma_s)$, исчезающих на множестве G). Поскольку функционал $\operatorname{vrai\,max} (\sigma_s)\ z(l, t)$ является сублинейным, то $n\Big(\nu_s, \operatorname*{vrai\,max}_G (\sigma_s)\ z(l, t)\Big) = 0$. Наконец, нам потребуется предложение о композиции, доказанное в [1] и состоящее в следующем:

Пусть V, Z, — банаховы пространства, φ_0 — непрерывный выпуклый функционал пространства V, $A : Z \to V$ — линейный оператор, $b \in V$. Тогда каждый функционал, опорный к $\varphi_0(Az + b) = \varphi(z)$, допускает представление

4.11 $$\lambda(z) = \mu(Az), \quad \mu \in \partial\varphi_0, \qquad n(\lambda, \varphi) = n(\mu, \varphi_0) + \mu(b).$$

Из 4.9—4.11 вытекает, что каждый функционал пространства $L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$, опорный к непрерывному выпуклому функционалу $\operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big)$, допускает представление

4.12 $$\nu_s\big(l(x(t), u_1(t))\big), \quad 0 \leqq \nu_s \in L^{1'}_\infty(\sigma_s), \quad \|\nu_s\| = 1, \quad \nu_s \parallel \mathrm{gr}\,\partial\Phi_s[e(t)] \mid \mathscr{E},$$
$$n\Big(\nu_s, \operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\Big) = \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big).$$

Эта формула позволяет получить общий вид функционалов пространства W_a, опорных к $\operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big)$. Поскольку рассматриваемый выпуклый функционал не зависит от α, то достаточно установить общий вид функционалов, опорных к $\operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big)$ в пространстве $A^{d(x)}_\Delta \times L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}$, являющемся линейным многообразием пространства $L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$. Решение этой задачи опирается на 4.12 и следующее Предложение о продолжении, полученное в [1]:

Пусть Z — банахово пространство, $\Gamma \subset Z$ — линейное многообразие, φ — выпуклый непрерывный функционал на Z. Обозначим, далее, через φ_Γ сужение функционала φ на многообразие Γ. Тогда каждый аддитивный функционал λ_Γ, опорный φ_Γ, может быть продолжен на все пространство до некоторого функционала λ, опорного к φ, так чтобы $n(\lambda, \varphi) = n(\lambda_\Gamma, \varphi_\Gamma)$.

Поэтому из представления 4.12 следует, что каждый линейный функционал пространства W_δ, опорный к выпуклому функционалу $\operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big)$, допускает представление

4.13 $$\nu_s\big(l(x(t), u_1(t))\big), \quad 0 \leqq \nu_s \in L^{1'}_\infty(\sigma_s), \quad \|\nu_s\| = 1, \quad \nu_s \parallel \mathrm{gr}\,\partial\Phi_s[e(\cdot)] \mid \mathscr{E},$$
$$n\Big(\nu_s, \operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}} \Phi_s\Big) = \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big).$$

Нетривиальное решение уравнения Эйлера критического значения J_0 функционала J в задаче $\mathbf{A}_a$

Согласно определению критичность значения J_0 функционала J эквивалентна тому, что неравенства **3.7** несовместны с равенством **3.6**. Выше мы нашли общий вид функционалов пространства W_a, опорных к соответствующим выпуклым функционалам, содержащимся в **3.7**. Поскольку оператор P_a правильный и для каждого полного индекса a задача $\mathbf{A}_a$ является невырожденной, то согласно **4.3** (**а, б, в, г°**) критичность J_0 эквивавлентна существованию н. р. э. системы **3.6**, **4.7** или критического значения J_0 функционала J в задаче $\mathbf{A}_a$.

Н. р. э. критического значения J_0 функционала J в задаче $\mathbf{A}_a$ состоит в выполнении следующих условий **4.14 а)—д)**.

Условия существования и принадлежности: Существуют функция

$$\psi \in L^{d(x)}_{\infty,\Delta};$$

функционалы

$$\nu_s \in L^{1\prime}_{\infty}(\sigma_s) \qquad \big(s = 1, \ldots, d(\Phi)\big), \quad \mu \in L^{d(b_0)\prime}_{\infty,\Delta},$$

$$\mu_0, \gamma_j \in L^{1\prime}_{\infty,\Delta} \qquad \big(j = 1, \ldots, d(a)\big),$$

скаляры

$$\beta_0, \beta_i \quad \big(i = 1, \ldots, d(\varphi)\big),$$

векторы

$$\chi_0, \chi_i \in \mathbf{R}^{d(p)} \quad \big(i = 1, \ldots, d(\varphi)\big), \qquad c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$$

такие, что

4.14 а) $\beta_0, \beta_i \geqq 0, \quad \gamma_j \geqq 0, \quad \nu_s \geqq 0, \quad \nu_s \parallel \operatorname{gr} \partial\Phi_s[e(t)], \quad \chi_0 \in \partial J, \quad \chi_i \in \partial\varphi_i$

б) $n\left(\nu_s, \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\right) = \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big).$

Условия критичности значения J_0:

в)
$$\int \psi\Big(\dot{x} - A_0 x - A_1 u_1 - A_2 \sum_{j\leqq d(a)} \alpha^j u_2{}^j\Big)\, dt + \mu(B_0 x + B_1 u_1)$$
$$+ \sum_{s\leqq d(\Phi)} \nu_s(lx, u_1) - \sum_{j\leqq d(a)} \gamma_j(\alpha^j) + \mu_0\Big(\sum_{j\leqq d(a)} \alpha^j\Big)$$
$$+ \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i \chi_i p + \beta_0 \chi_0 p + cRp = 0,$$

г)
$$-\int \psi a_0\, dt + \mu(b_0) + c r_0 + \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big)$$
$$+ \sum_{s\leqq d(\Phi)} \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big) - \mu_0(1) \geqq 0.$$

Условие невырожденности:

д)
$$\sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i + \beta_0 + \sum_{j\leqq d(a)} \|\gamma_j\| + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| > 0.$$

Покажем, что в н. р. э. **4.14** можно всегда считать, что $c \in \mathbf{E}$, при этом нормировочное условие **д)** оказывается эквивалентным условию

д°)
$$|c| + \beta_0 + \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| > 0.$$

Действительно. Обозначим через $\bar{c}$ составляющую вектора c, содержащуюся в подпространстве $E^{\perp} = (T_a L_a)^{\perp}$ (напомним, что для полных индексов $T_a L_a = \mathbf{E}$, а все индексы из K полные). Учитывая общий вид функционалов пространства W_a, исчезающих на L_a, заключаем, что существуют функция $\bar{\psi} \in L^{d(x)}_{\infty,\Delta}$ и функционалы $\bar{\mu}, \bar{\mu}_0 \in L^{d(b_0)'}_{\infty,\Delta} \times L^{1}_{\infty,\Delta}$ такие, что

4.15а) $$\bar{c}Rp + \int \bar{\psi}\Big(\dot{x} - A_0 x - A_1 u_1 - A_2 \sum_{j \leq d(a)} \alpha^j u_2{}^j\Big)\, dt$$
$$+ \bar{\mu}_0\Big(\sum_{j\leq d(a)} \alpha^j\Big) + \bar{\mu}(B_0 x + B_1 u_1) = 0$$

для всех точек $w = (x, u_1, \alpha) \in W_a$. Поскольку индекс a полный, то найдется точка $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{\alpha}) \in W_a$ такая, что $P_a(\bar{w}) + y^0 = 0$. Подставляя $\bar{w}$ в **4.15а)** получим

4.15б) $$\bar{c}r_0 - \int \bar{\psi} a_0\, dt - \mu_0(1) + \mu(b_0) = 0.$$

Вычитание из компонент c, ψ, μ, μ_0 н. р. э. **4.14** $\bar{c}, \bar{\psi}, \bar{\mu}, \bar{\mu}_0$ соответственно приводит к н. р. э. значения J_0 функционала J в задаче $\mathbf{A}_a$, у которого $c \in \mathbf{E}$, а $\nu_s, \gamma_j, \beta_i, \varkappa_i, \beta_0, \varkappa_0$ те же, как и у исходной строки 4.14.

Убедимся, что для всех строк **4.14**, у которых $c \in \mathbf{E}$, условие д) эквивалентно неравенству д^0). Действительно, если предположить, что в такой строке $|c| + \sum_{i\leq d(\varphi)} \beta_i + \beta_0 + \sum_{s\leq d(\Phi)} \|\nu_s\| = 0$, то, подставляя в в) вместо $w \in W_a$ тройку

$$\Big(x(\cdot), B_1{}^*(e(\cdot))\big(B_1(e(\cdot))\, B_1{}^*(e(\cdot))\big)^{-1}\big(B_0(e(\cdot))\, x(\cdot) - \xi(\cdot)\big), \alpha(\cdot)\Big),$$

где $(x, \xi, \alpha) \in A^{d(x)}_{\Delta} \times L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta} \times L^{d(a)}_{\infty,\Delta}$ произвольная функция получим

4.16а) $$\int \psi\big(\dot{x} - A_0 x - A_1 B_1{}^*(B_1 B_1{}^*)^{-1}(B_0 x - \xi) - A_2 \sum_{j\leq d(a)} \alpha^j u_2{}^j\big)\, dt$$
$$+ \mu(\xi) + \mu_0\Big(\sum_{j\leq d(a)} \alpha^j\Big) - \sum_{j\leq d(a)} \gamma_j(\alpha^j) = 0.$$

Поскольку функция (x, ξ, α) произвольная, то отсюда следует

4.16б) $$\psi(t)\,(=)\,0, \qquad \mu = 0, \qquad \mu_0 = \gamma_j \quad (j = 1, \ldots, d(a)).$$

В силу этого условие **4.14г)** примет вид $-\mu_0(1) = -\dfrac{1}{d(a)} \sum_{j\leq d(a)} \gamma_j(1) \geqq 0$. Таким образом в рассматриваемом случае имеем

$$\beta_0 + \sum_{i\leq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s\leq d(\Phi)} \|\nu_s\| + \sum_{j\leq d(a)} \|\gamma_j\| = 0.$$

Последнее противоречит условию нетривиальности **4.14д)**. Этим импликация **4.14**: д) $\Rightarrow$ д^0) доказана.

Установим обратное утверждение. Положим для строки **4.14а)—г)**, д^0) $c \in \mathbf{E}$ и убедимся, что для неё выполняется д). Действительно, если предположить противное, то для этой строки будет иметь место

$$\beta_0 + \sum_{i\leq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{j\leq d(a)} \|\gamma_j\| + \sum_{s\leq d(\Phi)} \|\nu_s\| = 0.$$

В свою очередь из этого равенства и **4.14в)** вытекает, что $cRp = cT_a w$ исчезает на всем подпространстве L_a. Следовательно $c \in (T_a L_a)^{\perp} = \mathbf{E}^{\perp}$, а так как по предположению $c \in \mathbf{E}$, то $c = 0$ и тем самым $|c| + \sum_{i\leq d(\varphi)} \beta_i + \beta_0 + \sum_{s\leq d(\Phi)} \|\nu_s\| = 0$. Последнее противоречит **4.14д^0)**.

§ 5. Трансляция нетривиальных решений уравнений Эйлера экстремального значения J_0 функционала J по множеству K полных индексов

Согласно определению 3.2 значение J_0 функционала J называется *экстремальным*, если $\tau(J_0) \neq \emptyset$ и значение J_0 является критическим во всех задачах $\mathbf{A}_a$, отвечающих полным индексам $a \in K$. Принцип максимума будет получен как условие, эквивалентное существованию н. р. э. для каждой из задач $\mathbf{A}_a$ $(a \in K)$. Нахождение транслирующейся системы н. р. э. задач $\mathbf{A}_a$ $(a \in K)$ требует предварительных конструкций.

Критичность J_0 в задаче $\mathbf{A}_a$ равносильна несовместности неравенств

5.2 а) $\varphi_i(p) < 0, \quad J(p) - J_0 < 0, \quad \operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t)) < 0,$

б) $\dot{x} - A_0 x - A_1 u_1 - A_2 \sum_{j \le d(a)} \alpha^j u_2{}^j - a_0 = 0,$

$$B_0 x + B_1 u_1 + b_0 = 0, \quad Rp + r_0 = 0, \quad \sum_{j \le d(a)} \alpha^j = 1,$$

$$\operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \{-\alpha^j(t)\} < 0 \qquad (j = 1, \ldots, d(a)).$$

Обозначим для удобства через Q_* множество решений (x, u_1) неравенств **5.2 а)** и через Γ_a проекцию множества решений (x, u_1, α) системы **5.2 б)** в $A_{\Delta}^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}$. Положим $\Gamma = \cup \{\Gamma_a : a \in K\}$. Ясно, что Γ_a и Γ выпуклые множества пространства $A_{\Delta}^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}$.

Критичность J_0 во всех задачах $\mathbf{A}_a$ эквивалентна отсутствию общих точек у множеств Q_* и Γ. Транслирующаяся система н. р. э. экстремального значения J_0 в задачах $\mathbf{A}_a$, отвечающих всем полным индексам $a \in K$, будет получена как эквивалент непересечения этих множеств.

Возможны следующие три случая:

а^0) Множество Q_* пусто.

б^0) Множества Γ_a пусты для индексов $a \in K$, образующих конфинальную систему.

в^0) Множество Q_* и множества Γ_a, для $a > a_0$, непусты.

Найдем аналитическое условие экстремальности значения J_0 функционала J в каждом из этих трех случаев.

а^0) *Множество Q_* пусто.* Согласно условиям **4.3** это эквивалентно существованию н. р. э. системы **5.2 а)**, состоящему в выполнении следующих групп условий:

Условия существования и принадлежности:

5.3 а) Найдутся скаляры β_0, β_i $(i = 1, \ldots, d(\varphi))$,

векторы $\chi_0, \chi_i \in \mathbf{R}^{d(p)}$ $(i = 1, \ldots, d(\varphi))$,

функционалы $\nu_s \in L_{\infty}^{1\prime}(\sigma_s)$ $(s = 1, \ldots, d(\Phi))$ такие, что

$$\beta_0, \beta_i \geqq 0, \quad \nu_s \geqq 0, \quad \chi_0 \in \partial J, \quad \chi_i \in \partial\varphi_i, \quad \nu_s \parallel \operatorname{gr} \partial\Phi_s[e(\cdot)],$$

$$n\Big(\nu_s, \operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s(\cdot)\Big) = \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big)$$

$$\Big(\operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s(\cdot) := \operatorname{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))\Big).$$

Условия критичности:

5.3б) $\sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i \chi_i p + \beta_0 \chi_0 p + \sum_{s \leq d(\Phi)} \nu_s(lx(t), u_1(t)) = 0$

(уравнение Эйлера).

в) $\sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0(n(\chi_0, J) - J_0) + \sum_{s \leq d(\Phi)} \nu_s(n(l, \Phi_s[e(t)])) \geq 0.$

Условие нетривиальности:

г) $\sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i + \beta_0 + \sum_{s \leq d(\Phi)} \|\nu_s\| > 0.$

Таким образом в случае а^0) н. р. э. **4.14** сводится к виду **5.3**.

Для анализа случаев б^0), в^0) нам потребуется лемма.

Лемма 5.1: *Пусть* $c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$, $\psi \in L^{d(x)}_{\infty,\Delta}$, $\lambda \in L^{d(x)'}_{\infty,\Delta}$ *удовлетворяют условию*

а) $cRp + \int \psi(\dot{x} - A_0 x)\, dt + \lambda(x) = 0$ *для всех* $x \in A^{d(x)}_{\Delta}$.

Тогда

а$_1$) $-\psi(t)\ (=)\ R_1{}^*c - \int_t^{t_1} A_0{}^*\psi\, d\tau + \nu[t, t_1]$,

а$_2$) $\int_{t_0}^{t_1} A_0\psi\, d\tau + (R_1{}^* + R_0{}^*)\, c + \nu[t_0, t_1] = 0$,

где ν *мера Радона, определенная из условия* $\int x(t)\, d\nu = \lambda(x)$ *для всех* $x \in C^{d(x)}_{\Delta}$.

Доказательство: Заменяя в условии а) $\lambda(x)$ на $\int_{t_0}^{t_1} x(t)\, d\nu$, интегрируя по частям в выражении $-\int_{t_0}^{t_1} A_0{}^*\psi x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} x\, d\nu$ и учитывая произвольность $x(t_0)$, $\dot{x}(t)$ после несложных преобразований получим, что условие а) эквивалентно тождествам а$_1$) и а$_2$) ∎

Следствие 1: *В условиях леммы* 5.1 ψ *является функцией ограниченной вариации. Точнее, меняя ее на множестве нулевой меры мы приходим к функции ограниченной вариации, совпадающей с правой частью* а$_1$). *Ясно, что эта функция будет непрерывной слева.*

Это непосредственно усматривается из а$_1$) ∎

Равенства а$_1$) и а$_2$) можно записать в следующей эквивалентной форме:

б$_1$) $-d\psi = A_0{}^*\psi\, dt - d\nu$,

б$_2$) $\psi_r(t_0) = R_0{}^*c + \nu(t_0)$, $\quad \psi_l(t_1) = -R_1{}^*c - \nu(t_1)$.

(Пояснение: б$_1$) означает, что мера Радона, отвечающая функции ограниченной вариации ψ, равна $-A_0{}^*\psi\, dt + d\nu$.)

Следствие 2: *В условиях леммы* 5.1 *имеет место оценка*

$$\|\psi\|_{L^{d(x)}_{\infty,\Delta}} < k\left(|c| + \|\lambda\|_{L^{d(x)'}_{\infty,\Delta}}\right),$$

где k неубывающая функция, $k(z) \to +0$ при $z \to +0$.

Доказательство следует из a_1) и очевидной оценки $\|\nu\|_{C_\Delta^{d(x)'}} \leqq \|\lambda\|_{L_{\infty,\Delta}^{d(x)'}}$ ∎

6°. *Множества* Γ_a *пусты для всех индексов* a, *образующих конфинальную систему* $K' \subset K$. В рассматриваемом случае каждое из множеств решений системы 5.2б) пусто для всех $a \in K'$. Аналитическим эквивалентом пустоты для данного $a \in K'$ согласно **4.3** является существование н. р. э. системы 5.2б), состоящего в выполнении следующих групп условий:

Условия существования и принадлежности:

5.4 а) Найдется

вектор $c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$,

функция $\psi \in L_{\infty,\Delta}^{d(x)}$,

функционалы $\mu_0 \in L_{\infty,\Delta}^{1'}$, $\mu \in L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)'}$, $0 \leqq \gamma_j \in L_{\infty,\Delta}^{1'}$ $\big(j = 1, \ldots, d(a)\big)$.

Условия критичности:

б) $$cRp + \int_{t_0}^{t_1} \psi\Big(\dot{x} - A_0x - A_1u_1 - A_2\sum_{j\leqq d(a)} \alpha^j u_2{}^j\Big)\,dt + \mu_0\Big(\sum_{j\leqq d(a)} \alpha^j\Big) + \mu(B_0x + B_1u_1) - \sum_{j\leqq d(a)} \gamma_j(\alpha^j) = 0$$

(уравнение Эйлера),

в) $$cr_0 - \int_{t_0}^{t_1} \psi a_0\,dt + \mu(b_0) - \mu_0(1) \geqq 0.$$

Условие нетривиальности:

г) $$\sum_{j\leqq d(a)} \|\gamma_j\| > 0.$$

Выделим транслирующуюся цепочку н. р. э. 5.4а)—в). При анализе строки 4.14 было показано, что условия существования и принадлежности 5.4а) можно усилить дополнительным требованием

5.5 а) $c \in \mathbf{E}$.

При этом условие нетривиальности станет эквивалентным неравенству

б) $|c| > 0$.

В дальнейших рассуждениях мы будем считать, что в н. р. э. 5.4 $c \in \mathbf{E}$ и $|c| > 0$.

Выше (при обсуждении понятия замыкания по мере) мы показали, что элементы матрицы $(B_1B_1{}^*)^{-1}$ — ограниченные измеримые функции, определенные почти всюду на Δ. Поэтому, подставляя в 5.4б) вместо $(x, u_1, \alpha) \in W_a$ тройку $\big(x, B_1{}^*(B_1B_1{}^*)^{-1}\,\xi, \alpha\big)$, $(x, \xi, \alpha) \in A_\Delta^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(a)}$, и воспользовавшись произволом в выборе (x, ξ, α) заключаем, что μ: $\mu(\xi) = \int m(t)\,\xi(t)\,dt\big(m \in L_{1,\Delta}^{d(b_0)}\big)$, абсолютно непрерывный функционал и 5.4б) эквивалентно трем тождествам

5.6 а) $cRp + \int \psi(\dot{x} - A_0x)\,dt + \int mB_0x\,dt = 0$,

б) $A_1{}^*\psi - B_1{}^*m \,(=)\, 0$,

в) $-\int \psi A_2u_2{}^j\alpha^j\,dt + \mu_0(\alpha^j) = \gamma_j(\alpha^j)$, $\quad j = 1, \ldots, d(a)$.

Из а) согласно лемме 5.1. следует, что

$$-\dot\psi\,(=)\,A_0{}^*\psi - B_0{}^*m,\qquad \psi(t_0) = R_0{}^*c,\qquad \psi(t_1) = -R_1{}^*c,$$

или, с учетом б),

а^0) $\quad -\dot\psi\,(=)\,A_0{}^*\psi - B_0{}^*(B_1B_1{}^*)^{-1}B_1A_1{}^*\psi,\quad \psi(t_0) = R_0{}^*c,\quad \psi(t_1) = -R_1{}^*c.$

Обозначим через Λ_a совокупность всех строк $(c,\psi,\mu_0,m)\in \mathrm{E}\times L^{d(x)}_{\infty,\Delta}\times L^{1'}_{\infty,\Delta}\times L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta}$, удовлетворяющих следующим условиям:

5.7 а) $\quad -d\psi = (A_0{}^*\psi - B_0{}^*m)\,dt,\quad \psi(t_0) = R_0{}^*c,\quad \psi(t_1) = -R_1{}^*c,$

б) $\quad A_1{}^*\psi = B_1{}^*m\,(=)\,\hat 0,$

в) $\quad -\int \psi A_2 u_2{}^j\xi\,dt + \mu_0(\xi)$ — позитивный функционал пространства $L^1_{\infty,\Delta}$ $\big(j = 1,\ldots,d(a)\big),$

г) $\quad cr_0 - \int \psi a_0\,dt - \int mb_0\,dt - \mu_0(1) \geqq 0,$

д) $\quad |c| = 1.$

Между строками из Λ_a и н. р. э. 5.4 существует следующая связь: каждой строке из Λ_a отвечает н. р. э. 5.4, у которого функционалы γ_j определяются из условия

$$\gamma_j(\xi) = \mu_0(\xi) - \int \psi A_2 u_2{}^j\xi\,dt\qquad \big(j = 1,\ldots,d(a)\big),$$

и обратно, каждое н. р. э. 5.4 после деления на отличное от нуля число $|c|$ приводит к строке из Λ_a.

Покажем, что каждое из множеств Λ_a является компактом в $\mathrm{R}^{d(r_0)}\times L^{d(x)}_{1,\Delta}\times L^1_{\infty,\Delta}\times L^{d(b_0)}_{1,\Delta}$ — слабой топологии, то есть топологии, порожденной сходимостью на каждом элементе этого пространства. Для этого заметим, прежде всего, что так как элементы матрицы $(B_1B_1{}^*)^{-1}$ ограниченные измеримые функции, то из 5.7а) б) и второго следствия из леммы 5.1 вытекает, что $\|\psi\|_{L^{d(x)}_{\infty,\Delta}} < k(|c|)$, где k функция, описанная в упомянутом слествии. Далее, в [4] было доказано, что функционал μ_0 можно разложить в разность $\mu_0 = \mu_0{}^+ - \mu_0{}^-$ двух позитивных $\mu_0{}^\pm$ так, чтобы $\|\mu_0\| = \mu_0{}^+(1) + \mu_0{}^-(1)$. Поскольку $\gamma_j(\xi) = -\int \psi A_2u_2{}^j\xi\,dt + \mu_0(\xi)$ позитивный функционал, то $-\int \psi A_2 u_2{}^j\,dt \geqq \mu_0{}^-(1) = \|\mu_0{}^-\|$. Таким образом $\|\mu_0{}^-\| < k_1(|c|)$. Согласно 5.7б) $m = (B_1B_1{}^*)^{-1}B_1{}^*A_1{}^*\psi$. Поэтому $\|m\|_{L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta}} \leqq k_2(|c|)$. И, наконец, из 5.7г) следует, что $cr_0 - \int \psi a_0\,dt + \int mb_0\,dt' \geqq \mu_0{}^+(1) - \mu_0{}^-(1)$. Следовательно $\|\mu_0{}^+\| \leqq k_3(|c|)$. Этим ограниченность Λ_a доказана. А так как множество Λ_a замкнуто в $\mathrm{R}^{d(r_0)}\times L^{d(x)}_{1,\Delta}\times L^1_{\infty,\Delta}\times L^{d(b_0)}_{1,\Delta}$ — слабой топологии, то тем самым доказана и его компактность.

Непосредственно усматривается, что компакты Λ_a образуют центрированную систему и поэтому согласно теореме Тихонова обладают непустым пересечением. Строка $(\bar c, \bar\psi, \bar\mu_0, \bar m)$, содержащаяся во всех компактах Λ_a $(a \in K')$, задает транслирующуюся цепочку н. р. э. 5.7а)—г). Поскольку каждый индекс $a \in K$ обладает мажорантой из K', то строка $(\bar c, \bar\psi, \bar\mu_0, \bar m)$ удовлетворяет условиям 5.7а)—г) для всех $a \in K$. Поэтому система 5.2б) обладает н. р. э. 5.7а)—г) и следовательно множество решений системы 5.2б) для всех $a \in K$ является пустым. То есть $K' = K$.

в^0. *Множество Q_* и множества Γ_a непусты для всех $a > a_0$.* В расматриваемом случае выпуклое открытое непустое множество Q_* не пересекается с выпуклым непустым множеством Γ. Следовательно, в силу [5] существует линейная функция $\lambda(x, u_1) + b$, позитивная на Q_* и неположительная на Γ. Тогда полупространство $\lambda(x, u_1) - \inf \lambda(Q_*) > 0$ не пересекается с выпуклым множеством Γ. Следовательно, при каждом $a > a_0$ множество решений системы 5.2б) не пересекается с открытым выпуклым непустым множеством Q_*. Согласно [1] общий вид функционалов λ пространства W_a, у которых $\inf \lambda(Q_*) > -\infty$, задается формулой

5.8
$$\lambda(x, u_1) = -s_0\Big[\beta_0\chi_0 p + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i\chi_i p + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s\big(l(x(t), u_1(t))\big)\Big]$$

$$\big(s_0, \beta_0, \beta_i \geqq 0;\ \chi_0 \in \partial J,\ \chi_i \in \partial\varphi_i,\ 0 \leqq \nu_s \in L^{1'}_\infty(\sigma_s)\big),$$

$$\nu_s \parallel \operatorname{gr} \partial\Phi_s[e(\cdot)], \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i + \beta_0 = 1,$$

$$\inf \lambda(Q_*) = s_0\Big[\sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big) + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big)\Big].$$

Зафиксируем такой из них, у которого $s_0 = 1$. Очевидно, что множество решений системы

5.9
$$\beta_0[\chi_0 p + n(\chi_0, J) - J_0] + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i\chi_i p + n(\chi_i, \varphi_i)$$
$$+ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s\big(l(x(t), u_1(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\big) < 0$$

при любом $a > a_0$ не пересекает множество решений системы 5.2б). Поэтому системы 5.2б) и 5.9 обладают н. р. э. для любого индекса $a > a_0$. Поскольку функционал, опорный к линейному, совпадает с ним, то н. р. э. систем 5.2б) и 5.9 состоит в следующем:

5.10а) Существуют

функция $\psi \in L^{d(x)}_{\infty, \Delta}$,

функционалы $\mu \in L^{d(b_0)'}_{\infty, \Delta}$, $\mu_0, \gamma_j \in L^{1'}_{\infty, \Delta}$ $\big(j = 1, \ldots, d(a)\big)$,

вектор $c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$

такие, что $\gamma_j \geqq 0$, $c \in \mathbf{E}$ и выполняются условия

б)
$$\sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i\chi_i p + \beta_0\chi_0 p + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \big(\nu_s l x(t), u_1(t)\big)$$
$$+ \int \psi(t)\Big[\dot{x}(t) - A_0\big(e(t)\big)\,x(t) - A_1\big(e(t)\big)\,u_1(t) - A_2\big(e(t)\big)\sum_{j \leqq d(a)} u_2{}^j(t)\,\alpha^j(t)\Big]\,dt$$
$$- \mu_0\Big(\sum_{j \leqq d(a)} \alpha^j(t)\Big) - \sum_{j \leqq d(a)} \gamma_j\big(\alpha^j(t)\big) + cRp + \mu\big(B_0(e(t))\,x(t) + B_1(e(t))\,u_1(t)\big) = 0$$

(уравнение Эйлера),

в)
$$\beta_0[n(\chi_0, J) - J_0] + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i{}^n(\chi_i, \varphi_i) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big)$$
$$- \int \psi a_0\,dt + cr_0 + \mu(b_0) - \mu_0(1) \geqq 0,$$

г)
$$\beta_0 + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| = 1$$

(условие нетривиальности).

Напомним, что строка β_i, χ_i, β_0, χ_0, ν_s описана в 5.8 и является фиксированной для всех $a > a_0$. Доказательство существования н. р. э. системы 5.2б) и 5.9, у которого $c \in \mathbf{E}$, проводится дословно так же как и при анализе н. р. э. 4.14.

Выделим транслируюшуюся цепочку н. р. э. 5.10. Начнем с того, что перепишем условия 5.10б)—г) в эквивалентной форме:

5.11 а)
$$\Big(\sum_{i\le d(\varphi)} \beta_i\chi_i + \beta_0\chi_0 + R^*c\Big)\, p + \int \psi(t)\,[\dot x(t) - A_0(e(t))\, x(t)]\, dt + \sum_{s\le d(\Phi)} \nu_s(l_x x(t)) + \beta(B_0(e(t))\, x(t)) = 0,$$

б)
$$\sum_{s\le d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1(t)) - \int \psi(t)\, A_1(e(t))\, u_1(t)\, dt + \mu(B_1(e(t))\, u_1(t)) = 0,$$

в)
$$-\int \psi(t)\, A_2(e(t))\, u_2^{\,j}(t)\, \xi(t)\, dt + \mu_0(\xi(t)) \ge 0 \qquad (j = 1, \ldots, d(a))$$

при всех $\xi(0 \le \xi \in L^1_{\infty,\Delta})$,

г)
$$\sum_{i\le d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0[n(\chi_0, J) - J_0] + \mu(b_0(e(t))) + \sum_{s\le d(\Phi)} \nu_s(n(l, \Phi_s[e(t)])) - \int \psi(t)\, a_0(e(t))\, dt + cr_0 - \mu_1(1) \ge 0,$$

д)
$$\sum_{i\le d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s\le d(\Phi)} \|\nu_s\| = 1.$$

Эта система условий очевидным образом эквивалентна 5.10б)—г). Компоненты c, ψ, μ, μ_0, ν_s, β_0, χ_0, β_i, χ_i описаны в 5.8 и 5.10.

Совокупность всех строк $(c, \psi, \mu, \mu_0) \in \mathbf{E} \times L^{d(x)}_{\infty,\Delta} \times L^{d(b_0)'}_{\infty,\Delta} \times L^{1'}_{\infty,\Delta}$, удовлетворяющих 5.11, будем обозначать Λ_a. Убедимся, что Λ_a является компактом в $\mathbf{R}^{d(r_0)} \times L^{d(x)}_{1,\Delta} \times L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta} \times L^1_{\infty,\Delta}$ — слабой топологии. Действительно, так как элементы матрицы $(B_1 B_1^*)^{-1}$ являются измеримыми ограниченными функциями, то из а), б) в силу леммы 5.1 следует, что $\|\psi\|_{L^{d(x)}_{\infty,\Delta}} < k(|c|)$, $\|\mu\|_{L^{d(b_0)'}_{\infty,\Delta}} < k_1(|c|)$, где $k = k(\tau)$, $k_1 = k_1(\tau)$ неубывающие функции, определенные для $\tau \ge 0$. Далее $\mu_0 = \mu_0^+ - \mu_0^-$ $(\mu_0^\pm \ge 0,\ \|\mu_0\| = \|\mu_0^+\| + \|\mu_0^-\|)$. Поэтому из найденной оценки и в) следует $\|\mu_0^-\|_{L^{1'}_{\infty,\Delta}} < k_2(|c|)$. Так как строка ν_s, χ_0, β_0, χ_i, β_i — фиксированная для всех рассматриваемых множеств Λ, то учет г) приводит к неравенству $\|\mu_0^+\|_{L^{1'}_{\infty,\Delta}} < k_3(|c|)$. Поэтому ограниченность Λ_a будет доказана, если мы установим, что нормы векторов c, содержащихся в строках Λ_a, ограничены общей константой, зависящей лишь от a. Если допустить противное, то в Λ_a найдется сеть строк (c, ψ, μ, μ_0), вдоль которой $|c| \to \infty$. Нормируя их на $|c|$ и переходя к подсети, вдоль которой $c \to \bar c$, $\psi \to \bar\psi$, $\mu \to \bar\mu$, $\mu_0 \to \bar\mu_0$ в $\mathbf{R}^{d(r_0)} \times L^{d(x)}_{1,\Delta} \times L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta} \times L^1_{\infty,\Delta}$ — слабой топологии, придем к строке $(\bar c, \bar\psi, \bar\mu, \bar\mu_0)$ удовлетворяющей условиям:

$$\bar\mu_0\Big(\sum_{j\le d(a)} \alpha^j\Big) - \sum_{j\le d(a)} \bar\gamma_j(\alpha^j) + \int \bar\psi\Big(\dot x - A_0 x - A_1 u_1 - A_2 \sum_{j\le d(a)} \alpha^j u_2^{\,j}\Big)\, dt + \bar c R p = 0,$$

$$-\bar\mu_0(1) + \bar\mu(b_0) - \int \bar\psi a_0\, dt + \bar c r_0 \ge 0, \qquad |\bar c| = 1,$$

$\bar\gamma_j(\xi) = -\int \bar\psi A_2 u_2^{\,j} \xi\, dt + \bar\mu_0(\xi)$ — некоторый позитивный функционал пространства $L^1_{\infty,\Delta}$.

Поскольку индекс a полный, то из этих условий следует, что множество решений системы 5.2б) пусто. Последнее противоречит предположению в[0]). Ограниченность множеств $\hat{\Lambda}_a$ доказана. Так как замкнутость $\hat{\Lambda}_a$ в $\mathbf{R}^{d(r_0)} \times L_{1,\Delta}^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)} \times L_{\infty,\Delta}^{1}$ — слабой топологии очевидна, то тем самым доказано, что каждое из множеств $\hat{\Lambda}_a(a > a_0)$ является компактом.

Поскольку система компактов $\hat{\Lambda}_a$ центрированная, то согласно теореме Тихонова найдется строка (c, ψ, μ, μ_0), общая всем им. Эта строка порождает транслирушуюся цепочку н. р. э. 5.2.

Суммируя полученные результаты приходим к теореме.

Теорема 5.1: *Для экстремальности значения J_0 функционала J, $\tau(J_0) \neq \varnothing$, необходимо и достаточно существование строки $c, \chi_0, \beta_0, \chi_i, \beta_i, \mu, \mu_0, \nu_s, \psi$, удовлетворяющей следующей системе условий:*

Условия существования и принадлежности:

5.12 а) *Найдутся*

скаляры $\beta_0, \beta_i \ (i = 1, \ldots, d(\varphi))$,

векторы $c \in \mathbf{E}$, $\chi_0, \chi_i \in \mathbf{R}^{d(p)} \quad (i = 1, \ldots, d(\varphi))$,

функция $\psi \in L_{\infty,\Delta}^{d(x)}$ *и*

функционалы $\mu, \mu_0 \in L_{\infty,\Delta}^{1'}$, $\nu_s \in L_{\infty,\Delta}^{1'}(\sigma_s) \quad (s = 1, \ldots, d(\Phi))$

такие что

$$\beta_0, \beta_i \geqq 0, \qquad \chi_0 \in \partial J, \qquad \chi_i \in \partial\varphi_i.$$

Условия критичности:

б) $$\Big(R^*c + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i\chi_i + \beta_0\chi_0\Big)\, p + \int \psi(\dot{x} - A_0x)\, dt + \mu(B_0x) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_x x) = 0,$$

в) $$\int \psi A_1 u_1\, dt = \mu(B_1u_1) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1),$$

г) *Функционал* $\mu_0(\xi) - \int \psi A_2 u_2 \xi\, dt \ \big(\xi \in L_{\infty,\Delta}^{1}\big)$ *является позитивным для любой функции* $u_2 \in \Xi$,

д) $$-\int \psi a_0\, dt + cr_0 + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big)$$
$$+ \mu(b_0) - \mu_0(1) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big) \geqq 0.$$

Условие нетривиальности:

5.12 е) $$\beta_0 + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| + |c| > 0.$$

Предварительное преобразование строки 5.12

Убедимся, что в д) имеет место точное равенство и что функционал μ_0 является абсолютно непрерывным. Действительно, подставляя в а)—д) вместо (x, u_1, u_2) элемент $(x^n, u_1{}^n, u_2{}^n)$ последовательности $\tau \in \tau(J_0)$, вместо ξ — число 1, складывая и усиливая полученное неравенство получим:

$$\beta_0\big(J(p^n) - J_0\big) + \sum_{i\le d(\varphi)} \beta_i\big(\varphi_i(p^n) - J_0\big)$$

$$+ \sum_{s\le d(\Phi)} \|\nu_s\| \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s\big(x^n(t), u_1{}^n(t), e(t)\big) \geqq \gamma_{u_2{}^n}(1) \geqq 0,$$

$$\gamma_{u_2{}^n}(\xi) = \mu_0(\xi) - \int \psi \dot{A}_2 u_2{}^n \xi\, dt.$$

Поскольку все слагаемые этого неравенства, кроме $\beta_0\big(J(p^n) - J_0\big)$ неположительные, а $J(p^n) - J_0 \to 0$ при $n \to \infty$, то все они имеют своим пределом нуль. Отсюда вытекает, что в д) имеет место равенство и $\|\gamma_{u_2{}^n}\| \to 0$. В силу г) из последнего условия следует, что μ_0 является слабым пределом последовательности абсолютно непрерывных функционалов $\int \psi A_2 u_2{}^n\, dt$. Поэтому и функционал μ_0 абсолютно непрерывен. Следовательно все функционалы $\gamma_{u_2{}^n}$ являются абсолютно непрерывными.

Аналогичные рассуждения показывают, что условие 5.12д) эквивалентно следующему условию *дополняющей нежесткости*:

5.12д^0) Если $\{(x^n, u_1{}^n, u_2{}^n)\} \subset \tau(J_0)$ некоторая последовательность, то

$$\int \psi A_2 u_2{}^n \xi\, dt \to \mu_0(\xi), \qquad \nu_s\big(lx^n, u_1{}^n + n(l, \Phi_s[e(t)])\big) \to 0,$$

$$\beta_i\big(\chi_i p^n + n(\chi_i, \varphi_i)\big) \to 0, \qquad \beta_0\big(\chi_0 p^n + n(\chi_0, J) - J_0\big) \to 0.$$

В дальнейшем функционал μ_0 будем записывать в форме $\mu_0(\xi) = \int m_0 \xi\, dt$ ($m_0 \in L^1_{1,\Delta}$). С её учетом условия 5.12г, д) примут вид:

г) $m_0(t) - \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, u_2(t)\ (\geqq)\ 0$ для любой функции $u_2 \in \Xi$.

д) $$-\int \psi a_0\, dt + c r_0 + \sum_{i\le d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big) + \mu(b_0)$$

$$+ \sum_{s\le d(\Phi)} \nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big) - \int m_0\, dt = 0.$$

Первое из предельных соотношений дополняющей нежесткости 5.12д^0) запишется в форме $\psi A_2(e)\, u_2{}^n \xrightarrow[L^1_{1,\Delta}]{} m_0$.

Проведем теперь преобразование функционалов μ, ν_s. Согласно [4] существуют линейные операторы A, $\operatorname{sing}\colon L^{1'}_\infty(\sigma_s) \to L^{1'}_\infty(\sigma_s)$, удовлетворяющие условиям:

1. Для любых фиксированных $\lambda \in L^{1'}_\infty(\sigma_s)$, $z(l, \cdot) \in L^1_\infty(\sigma_s)$

$$A\lambda\big(z(l, \cdot)\, \chi_{\mathscr{E}}(\cdot)\big)$$

абсолютно непрерывная функция множества $\mathscr{E} \subset \Delta$ (на классе измеримых по Лебегу множеств отрезка Δ).

2. Существует последовательность измеримых множеств $\mathscr{E}_\delta \subset \Delta$, $\operatorname{mes} \mathscr{E}_\delta \to 0$, такая, что $\operatorname{sing}\lambda \parallel \mathbf{R}^{d(l)} \times \mathscr{E}_\delta$ при всех $\delta > 0$ и

$$\operatorname{sing}\lambda\big(z(l, \cdot)\big) = \lim_{\delta\to+\infty} \lambda\big(z(l, \cdot)\, \chi_{\mathscr{E}_\delta}(\cdot)\big).$$

(Напомним, что если η некоторый функционал, то $\eta \parallel H$ означает, что η исчезает на функциях, равных нулю вне множества H.)

3. $\|\lambda\| = \|A\lambda\| + \|\operatorname{sing}\lambda\|$.

Непосредственно усматривается, что $A\lambda$ и $\operatorname{sing}\lambda$ взаимно сингулярные функционалы. При этом из условия $\lambda \geqq 0$ следует, что $A\lambda \geqq 0$ и $\operatorname{sing}\lambda > 0$. В [4] было показано, что каждый функционал $\mu \in L^{d(b_0)'}_{\infty,\Delta}$ разлагается в сумму $\mu = \mu^a + \mu^s$ абсолютно непрерывного функционала μ^a и сингулярного функционала μ^s. Функционал μ^a допускает представление $\mu^a(\cdot) = \int m\,dt$, где $m \in L^{d(b_0)}_{1,\Delta}$. Что же касается функционала μ^s, то он сосредоточен на каждом из множеств некоторой последовательности $\mathscr{E}_\delta \subset \Delta$, $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\delta \to 0$. Очевидно $\|\mu\| = \|\mu^a\| + \|\mu^s\|$.

Применим полученные представления функционалов μ и ν_s для преобразования строки 5.12. Согласно первому свойству оператора A функция $A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(\cdot))$ абсолютно непрерывна на классе измеримых по Лебегу множеств $\mathscr{E}$ отрезка Δ. Ясно, что $A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(\cdot))$ является счетно аддитивной функцией множеств этого класса. Поэтому согласно теореме Радона-Никодима имеет место представление

$$\text{5.14а)}\qquad A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)) = \int b_s(t)\,dt \qquad \left(0 \leqq b_s \in L^1_{1,\Delta},\ \|\nu_s\| = \int b_s(t)\,dt\right).$$

Аналогично $A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,l)$, $A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,n(l, \Phi_s[e(t)]))$ являются абсолютно непрерывными функциями множества относительно меры $b_s(t)\,dt$. По теореме Радона-Никодима имеет место представление

$$\text{5.14б)}\qquad A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,l) = \int_{\mathscr{E}} b_s(t)\,l_s(t)\,dt, \qquad \left(b_s l_s \in L^{d(x)+d(u_1)}_{1,\Delta}\right),$$

$$A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,n(l, \Phi_s[e(t)])) = \int_{\mathscr{E}} b_s(t)\,n_s(t)\,dt, \qquad \left(b_s n_s \in L^1_{1,\Delta}\right).$$

Поэтому для произвольной пары функций $(x, u_1) \in L^{d(x)}_{\infty,\Delta} \times L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ и измеримого множества $\mathscr{E} \subset \Delta$ имеем

$$A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,l(x(t), u_1(t))) = \int_{\mathscr{E}} b_s(t)\,l_s(t)\,(x(t), u_1(t))\,dt,$$

$$A\nu_s(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,n(l, \Phi_s[e(t)])) = \int_{\mathscr{E}} b_s(t)\,n_s(t)\,dt.$$

Таким образом

$$A\nu_s\Big(\chi_{\mathscr{E}}(t)\,\big(l(x(t), u_1(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\big)\Big) = \int_{\mathscr{E}} b_s(t)\,\big(l_s(t)\,(x(t), u_1(t)) + n_s(t)\big)\,dt$$

для каждой функции $(x, u_1) \in L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ и любого измеримого множества $\mathscr{E} \subset \Delta$.

Пусть $\mathscr{E} \subset \Delta$ измеримое множество, на котором функции b_s, e, n_s, l_s непрерывны и $b_s(t) > 0$, а $t_* \in \mathscr{E}$ точка плотности $\mathscr{E}$; $(\xi, v_1) \in \mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(u_1)}$. Тогда, обозначая через Δ' сегмент, содержащий t_* в качестве внутренней точки, получим

$$\frac{1}{|\Delta'|}\int_{\mathscr{E}\cap\Delta'} b_s(t)\,\big(l_s(t)\,(\xi, v_1) + n_s(t)\big)\,dt$$

$$\leqq \frac{1}{|\Delta'|}\int_{\mathscr{E}\cap\Delta'} b_s(t)\,dt\ \operatorname*{vrai\,max}_{\mathscr{E}\cap\Delta'} \Phi_s(\xi, v_1, e(t)).$$

Переходя к пределу при $|\Delta'| \to 0$ и сокращая на $b_s(t_*) > 0$ приходим к неравенству $l_s(t_*)\,(\xi, v_1) + n_s(t_*) \leqq \Phi_s(\xi, v_1, e(t_*))$. Поскольку здесь в качестве (ξ, v_1)

можно принять любую точку пространства $\mathbf{R}^{d(x)} \times \mathbf{R}^{d(u_1)}$, то $l_s(t_*) \in \partial\Phi_s[e(t_*)]$, $n_s(t_*) \leqq n\bigl(l_s(t_*), \Phi_s[e(t_*)]\bigr)$.

Убедимся, что на самом деле $n_s(t) = n\bigl(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\bigr)$ почти всюду на множестве $\{t \in \Delta\colon b_s(t) > 0\}$. Для этого заметим, что согласно 5.12д^0) функционал ν_s удовлетворяет условию дополняющей нежесткости

$$\nu_s\bigl(l(x^m(t), u_1{}^m(t)) + n(l, \Phi_s[e(t)])\bigr) \to 0$$

на каждой последовательности $\{(x^m, u^m)\} \in \tau(J_0)$. Очевидно, далее, что если некоторый функционал $0 \leqq \nu_s \in L_\infty^{1'}(\sigma_s)$ удовлетворяет условию дополняющей нежесткости, то этим же свойством будет обладать и любая его позитивная часть $\bar{\nu}_s \in L_\infty^{1'}(\sigma_s)$, $0 \leqq \bar{\nu}_s \leqq \nu_s$. Следовательно, свойством дополняющей нежесткости обладает и функционал $A\nu_s\bigl(\chi_{\mathscr{E}}(t)\, z(l, t)\bigr)$, где $\mathscr{E}$ произвольное измеримое множество отрезка Δ. Поэтому для каждой последовательности $\{(x^m, u^m)\} \in \tau(J_0)$ имеет место

$$\int_{\mathscr{E}} b_s(t) \bigl(l_s(t)\, (x^m(t), u_1{}^m(t)) + n_s(t)\bigr)\, dt \to 0.$$

Поэтому последовательность $b_s(\cdot) \bigl(l_s(\cdot)\, (x^m(\cdot), u_1{}^m(\cdot)) + n_s(\cdot)\bigr)$ сходится слабо $L^1_{\infty,\Delta}$ к нулю, а так как ее члены неположительны, то она сходится к нулю в норме $L^1_{1,\Delta}$. Значит $b_s(t) \bigl(l_s(t)\, (x^m(t), u_1{}^m(t)) + n_s(t)\bigr) \to 0$ почти всюду на Δ. Следовательно, почти во всех точках $t \in \Delta$, в которых $b_s(t) > 0$, будет

$$b_s(t) \bigl(x^m(t), u_1{}^m(t)\bigr) + n_s(t) \to 0, \qquad \Phi_s\bigl(x^m(t), u_1{}^m(t), e(t)\bigr) \to 0.$$

На этом множестве $n_s(t)\ (=)\ n\bigl(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\bigr)$.

Так как значения функций l_s, n_s на множестве $\{t\colon b_s(t) = 0\}$ не влияют на значения функции $b_s\bigl(l_s(x, u_1) + n_s\bigr)$, то можно считать, что $n_s(t)\ (=)\ n\bigl(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\bigr)$, а $l_s(t)\ (\in)\ \partial\Phi_s[e(t)]$.

Подставляя найденные представления функционалов ν_s, μ в 5.12а) и используя лемму 5.1 заключаем, что 5.12б) эквивалентно условию

5.13 а)
$$-d\psi = (A_0{}^*\psi - \sum b_s l_{sx} - B_0{}^* m)\, dt - d\nu,$$
$$\psi_r(t_0) = \nu(t_0) + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i \chi_{i0} + \beta_0 \chi_{00} + R_0{}^* c,$$
$$\psi_l(t_1) = -\nu(t_1) - \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i \chi_{i1} - \beta_0 \chi_{01} - R_1{}^* c,$$

где ν векторная мера Радона, заданная тождеством

$$\int x\, d\nu = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \operatorname{sing} \nu_s(l_* x) + \mu^s(x) \text{ для всех } x \in C_\Delta^{d(x)}.$$

Условие 5.12б) примет вид

$$\int \psi A_1 u_1\, dt = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\, l_{su_1}(t)\, u_1(t)\, dt + \int m(t)\, B_1\bigl(e(t)\bigr)\, u_1(t)\, dt$$
$$+ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \operatorname{sing} \nu_s(l_{u_1} u_1) + \mu^s\bigl(B_1(e)\, u_1\bigr).$$

Поскольку функционал пространства $L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}$, являющейся одновременно абсолютно непрерывным и сингулярным, равен нулю, то последнее условие эквивалентно паре тождеств:

б) $A_1{}^*(e(t))\,\psi(t)\,(=)\sum_{s\leqq d(\Phi)} b_s(t)\,l_{su_1}(t) + B_1{}^*(e(t))\,m(t)$,

в) $\sum_{s\leqq d(\Phi)} \operatorname{sing} \nu_s(l_{su_1}u_1) + \mu^s(B_1(e)\,u_1) = 0$.

Итак мы пришли к следующей теореме.

Теорема 5.2: *Для экстремальности значения J_0 функционала J, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, необходимо и достаточно существование строки c, β_0, β_i, χ_i, χ_0, b_s, l_s, m_0, m, ν_s, μ, ψ, удовлетворяющей условиям:*

Условия существования и принадлежности:

5.14 а) $c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$, $\beta_0, \beta_i \in \mathbf{R}^1$, $\chi_0, \chi_i \in \mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)}$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, d(\varphi))$,

$b_s \in L^1_{1,\Delta}$, $l_s \in L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ $\quad (s = 1, 2, \ldots, d(\Phi))$, $\quad m_0 \in L^1_{1,\Delta}$, $\quad m \in L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta}$,

$\nu_s \in L^{1'}_{\infty}(\sigma_s)$ $\quad (s = 1, 2, \ldots, d(\Phi))$, $\quad \mu \in L^{d(b_0)'}_{\infty,\Delta}$,

$\psi : \Delta \rightleftarrows \mathbf{R}^{d(x)}$ — *функция ограниченной вариации.*

б) $\beta_0, \beta_i \geqq 0$, $\quad \chi_0 \in \partial J$, $\quad \chi_i \in \partial\varphi_i$, $\quad b_s \geqq 0$, $\quad \nu_s \geqq 0$, $\quad c \in \mathbf{E}$,

$l_s(t)\,(\in)\,\partial\Phi_s[e(t)]$.

Условия критичности числа J_0:

в) $$-d\psi(t) = \Big(A_0{}^*(e(t))\,\psi(t) - \sum_{s\leqq d(\Phi)} b_s(t)\,l_{sx}(t) - B_0{}^*(e(t))\,m(t)\Big)\,dt - d\nu,$$

$$\psi_r(t) = \nu(t_0) + \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i\chi_{i0} + \beta_0\chi_{00} + R_0{}^*c,$$

$$\psi_l(t) = -\nu(t_1) - \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i\chi_{i1} - \beta_0\chi_{01} - R_1{}^*c,$$

где мера ν определяется из условия

$$\int x\,d\nu = \mu_0(B_0(e)) + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \nu_s(l_x x) \quad \text{для всех} \quad x \in C^{d(x)}_\Delta.$$

г) $A_1{}^*(e(t))\,\psi(t) - B_1{}^*(e(t))\,m(t) - \sum_{s\leqq d(\Phi)} b_s(t)\,l_{su_1}(t)\,(=)\,0$.

д) $\mu(B_1(e)\,u_1) + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1}u_1) = 0$ *для всех* $u_1 \in L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}$.

е) $m_0(t) - \psi(t)\,A_2(e(t))\,u_2(t)\,(\geqq)\,0$ *для всех* $u_2 \in \Xi$.

ж) $$-\int \psi(t)\,a_0(e(t))\,dt + cr_0 + \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \beta_i) + \beta_0(n(\chi_0, J) - J_0)$$

$$+ \varrho + \int m(t)\,b_0(e(t))\,dt + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\,n(l_s(t), \Phi_s[e(t)])\,dt - \int m_0(t)\,dt \geqq 0,$$

где $\varrho = \sum_{s\leqq d(\Phi)} \nu_s(n(l, \Phi_s[e])) + \mu(b_0(e))$.

Условие нетривиальности:

з) $|c| + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \left(\|\nu_s\| + \int b_s(t)\,dt\right) + \beta_0 + \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i > 0$.

Доказательство: Необходимость доказана выше. Для достаточности покажем, что строка 5.14 пересчитывается в строку 5.12. Имеем

$$\int b_s(t) \big(l_s(t)\,(x(t), u_1(t)) + n(l_s(t), \Phi_s[e(t)])\big)\, dt$$
$$\leqq \int b_s(t)\, dt \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big).$$

Следовательно, функционал $\int b_s(t)\, l_s(t)\,\big(x(t), u_1(t)\big)\, dt$ является опорным к $\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) \int b_s(t)\, dt$ и

$$\int b_s(t)\, n\big(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\big)\, dt$$
$$\leqq n\Big(\int b_s(t)\, l_s(t)\,\big(x(t), u_1(t)\big)\, dt, \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) \int b_s(t)\, dt\Big).$$

Поэтому согласно 4.12 функционал $\int b_s(t)\, l_s(t)\,\big(x(t), u_1(t)\big)\, dt$ допускает представление

$$\int b_s(t)\, l_s(t)\,\big(x(t), u_1(t)\big)\, dt = \bar\nu_s\big(l(x(t), u_1(t))\big),$$
$$0 \leqq \bar\nu_s \in L_\infty^{1'}(\sigma_s), \qquad \|\bar\nu_s\| = \int b_s(t)\, dt,$$
$$\int n\big(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\big)\, b_s(t)\, dt \leqq \bar\nu_s\big(n(l, \Phi_s[e(t)])\big).$$

Положим

$$\hat\nu_s = \nu_s + \bar\nu_s, \qquad \hat\mu(\cdot) = \mu(\cdot) \int m(t) \cdot dt, \qquad \hat\mu_0(\cdot) = \int m_0(t) \cdot dt.$$

Тогда строка c, β_0, β_i, χ_0, χ_i, $\hat\nu_s$, $\hat\mu_0$, $\hat\mu$, ψ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1. Следовательно, число J_0 является экстремальным значением функционала J ∎

Принцип максимума будет получен преобразованием строки 5.14 к эквивалентной форме, не содержащей такого объекта как функционал пространства L_∞. Дело в том, что функционалы пространства ограниченных измеримых функций не имеют никакого независимого описания и являются объектами существенно более сложной природы чем функции. Поэтому ответ, написанный с использованием таких функционалов, не эффективен в принципе. Преобразование строки 5.14 к эквивалентной форме, не содержащей элементов пространства L_∞, называется *расшифровкой*. Как и в [2, 6—8] это преобразование опирается на апроксимативную теорему [7, 8]. Центральным местом расшифровки является нахождение представления множества Λ функционалов $\int x(t)\, d\nu + \varrho\tau$ пространства $\mathfrak{X} = C_\Delta^{d(x)} \times \mathbf{R}^1$ с нормой $\|(x, \tau)\|_{\mathfrak{X}} = \|x\|_C + |\tau|$:

5.15
$$\int x\, d\nu + \varrho\tau = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s\big(l_x x + n(l, \Phi_s[e])\,\tau\big) + \mu\big(B_0(e)\, x + b_0(e)\,\tau\big),$$
$$0 \leqq \nu_s \in L_\infty^{1'}(\sigma_s), \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| = 1, \qquad \mu \in L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)'},$$
$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1) + \mu\big(B_1(e)\, u_1\big) = 0.$$

§ 6. Расшифровка функционалов $\int x d\nu + \varrho\tau$

Предварительные построения

Нам потребуется пространства

$$V = L^1_\infty(\sigma_s) \times L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta} \times L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta} \text{ с нормой}$$

$$\|(v_s, u_1, b)\|_V = \max\left\{\|v_s\|_{L^1_\infty(\sigma_s)}, \|u_1\|_{L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}}, \|b\|_{L^{d(b_0)}_{\infty,\Delta}}\right\},$$

$$Z = L_1{}^1(\sigma_s) \times L^{d(u_1)}_{1,\Delta} \times L^{d(b_0)}_{1,\Delta} \text{ с нормой}$$

$$\|(z_s, z, z_b)\|_Z = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|z_s\|_{L_1{}^1(\sigma_s)} + \|z\|_{L^{d(u_1)}_{1,\Delta}} + \|z_b\|_{L^{d(b_0)}_{1,\Delta}},$$

оператор $\mathcal{F}: \mathfrak{X} \to V$, заданный соглашением $\mathcal{F}(x, \tau) = (\dot v_s, 0, b)$, где

$$v_s(l, t) = l_x x(t) + n\big(l, \Phi_s[e(t)]\big)\, \tau, \qquad b(t) = B_0\big(e(t)\big)\, x(t) + b_0\big(e(t)\big)\, \tau,$$

и множество $\mathbf{N}$ функционалов пространства V, допускающих представление

$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(v_s) + \mu(b), \quad \text{где } \nu_s \geqq 0, \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| = 1$$

и

$$\mu\big(B_1(e)\, u_1\big) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1) = 0 \quad \text{при всех} \quad u_1 \in L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}.$$

Непосредственно усматривается, что $\mathbf{N}$ выпуклый бикомпакт в V-слабой топологии (то есть топологии, порожденной сходимостью на всех элементах из V). Так как $\mathcal{F}$ линейный оператор, то сопряженный оператор $\mathcal{F}^*: V' \to \mathfrak{X}'$ является непрерывным в $\mathfrak{X}$-слабой топологии и

6.1 $\qquad \Lambda = \mathcal{F}\mathbf{N}.$

Следовательно, Λ как образ бикомпакта при непрерывном отображении является бикомпактом пространства $\mathfrak{X}'$. В силу аддитивности $\mathcal{F}$ и выпуклости $\mathbf{N}$ бикомпакт Λ является выпуклым. В [5] было доказано предложение: каждый выпуклый бикомпакт Λ_* сопряженного пространства $\mathfrak{X}'$ в точности совпадает со множеством опорных функционалов сублинейного функционала $\sup \lambda(x, \tau)$, $\lambda \in \Lambda_*$. Поэтому Λ совпадает с совокупностью всех опорных функционалов сублинейного функционала

6.2 $\qquad \sup\limits_{\Lambda} \int x\, d\nu + \varrho\tau$

(множество Λ описано в **5.15**). Таким образом задача о расшифровке Λ будет решена, если мы найдем такое представление сублинейного функционала 6.2, которое позволит получить описание совокупности всех его опорных функционалов в терминах, не содержащих понятия функционала пространства ограниченных измеримых функций. Оказывается, что эта задача разрешима и основную роль при ее решении играет аппроксимативная теорема.

Применение аппроксимативной теоремы

Имея в виду применение аппроксимативной теоремы введем выпуклые непустые конусы Ω_s, $L \subset V$, H_s, $H \subset Z$, определенные при помощи соглашений:

$$\Omega_s = \{(v_s, u_1, b) \in V : \operatorname{vrai\,min}(\sigma_s)\, v_s(l, t) > 0\},$$

$$L = \left\{(v_s, u_1, b) \in V : v_s(l, t) - l_{u_1} u_1(t)\ (=)\ 0,\ B_1(e(t))\, u_1(t)\ (=)\ 0\right\},$$

$$H_s = \{(z_s, z, z_b) \in Z : z_s(l, t)\ (\geqq)\ 0\},$$

$$H = \left\{(z_s, z, z_b) \in Z : z(t)\ (=)\ B_1^*(e(t))\, z_b(t) - \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int z_s l_{u_1} d\overline{m}_{st}\right\},$$

Из определения пространств V, Z, непосредственно усматривается, что $Z' = V$ и конусы H_s, H *густы* на Ω_s, L соответственно. Напомним определение: Если $A \subset V$ и $B \subset Z$ выпуклые непустые конусы, то *густота* B на A означает выполнение двух условий:

1. $a(b) \geqq 0$ для всех $(a, b) \in A \times B$,
2. если $a_0(b) \geqq 0$ для всех $b \in B$, то $a_0 \in \bar{A}$.

($\bar{A}$ означает замыкание множества A в топологии пространства V.)

Поскольку множество всех нетривиальных решений уравнения Эйлера системы конусов Ω_s, L совпадает со множеством наборов функционалов

$$\left(\nu_s(v_s),\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1 - v_s) + \mu(B_1 u_1)\right)$$

$$\left(0 \leqq \nu_s \in L_\infty^{1'}(\sigma_s),\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| > 0,\ \mu \in L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)'},\right.$$

$$\left.\sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1) + \mu(B_1 u_1) = 0 \quad \text{для всех} \quad u_1 \in L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}\right)$$

то согласно аппроксимативной теореме имеем

6.3 $\quad \mathbf{N} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\mathbf{N}^\delta}$ ($\overline{\mathbf{N}^\delta}$ — замыкание в V—слабой топологии),

где

$$\mathbf{N}^\delta = \left\{(z_s, 0, z_b) \in Z : z_s(l, t) \geqq 0,\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int z_s(l, t)\, d\sigma_s = 1,\quad \|\varphi\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}} \leqq \delta,\right.$$

$$\left.\varphi(t) = \sum_{s \leqq d(\Phi)} z_s(l, t)\, l_{u_1} d\overline{m}_{st} + B_1^*(e(t))\, z_b(t)\right\}.$$

Убедимся, что каждое из множеств $\mathbf{N}^\delta$ ограничено в метрике Z. Действительно, элементы матрицы $(B_1 B_1^*)^{-1}$ являются ограниченными измеримыми функциями. Поэтому из формулы

$$z_b = (B_1 B_1^*)^{-1} B_1 \left\{\sum_{s \leqq d(\Phi)} \int z_s l_{u_1} d\overline{m}_{st} - \varphi\right\}$$

следует, что функция z_b ограничена в норме $L_{1,\Delta}^{d(b_0)}$, так как

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \max_{l \in \partial \Phi_s[e(t)]} |l| \leqq \mathbf{k}_0 \quad \text{и поэтому} \quad \left\|\int z_s(l, t)\, l_{u_1}\, d\overline{m}_{st}\right\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}} < \mathbf{k}_0.$$

Следовательно каждое из множеств $\mathbf{N}^\delta$ ограничено в Z.

В силу слабой бикомпактности единичной сферы сопряженного пространства отсюда следует, что $\overline{\mathbf{N}^\delta}$ слабые бикомпакты, убывающие вместе с $\delta > 0$. Так как при непрерывном отображении образ пересечения монотонно убывающей системы бикомпактов равен пересечению образов, а образ замыкания совпадает с замыканием образа, то из **6.1**, **6.3** вытекает $\Lambda = \mathcal{F}^* \mathbf{N} = \cap F^* \overline{\mathbf{N}^\delta} = \overline{\cap \mathcal{F}^* \mathbf{N}^\delta}$

($\delta > 0$). Обозначим $\mathcal{F}^*\mathrm{N}^\delta$ через Λ^δ. Тогда

6.4 $$\Lambda = \bigcap_{\delta\to 0} \overline{\Lambda^\delta} \quad (\overline{\Lambda^\delta} \text{ — замыкание в } \mathfrak{X}\text{-слабой тополии}),$$

где

$$\Lambda^\delta = \Big\{ \sum_{s\le d(\Phi)} \int z_s(l,t)\big(l_x x(t) + n(l, \Phi_s[e(t)])\,\tau\big)\,d\sigma_s$$
$$+ \int z(t)\big(B_0(e(t))\,x(t) + b_0(e(t))\,\tau\big)\,dt:$$
$$z_s \geqq 0, \quad \sum_{s\le d(\Phi)} \int z_s(l,t)\,d\sigma_s = 1, \quad \|\varphi\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}} < \delta,$$
$$\varphi(t) = \sum_{s\le d(\Phi)} \int l_{u_1} z_s(l,t)\,d\overline{m}_{st} + B_1{}^*(e(t))\,z(t)\Big\}.$$

Поскольку пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельное, а множества $\overline{\Lambda^\delta}$ являются слабыми бикомпактами, убывающими вместе с $\delta > 0$, то из **6.4** следует

Лемма 6.1: *Для того, чтобы функционал $\int x\,d\nu + \varrho\tau$ содержался в Λ необходимо и достаточно существование последовательности $(z_s{}^\delta, z^\delta) \in L_1{}^1(\sigma_s) \times L_{1,\Delta}^{d(b_0)}$ такой, что*

6.5 а) $$\int x\,d\nu + \varrho\tau = \lim_{\delta\to+0} \Big\{ \sum_{s\le d(\Phi)} \int z_s{}^\delta(l,t)\big(l_x x(t) + n(l, \Phi_s[e(t)])\,\tau\big)\,d\sigma_s$$
$$+ \int z^\delta(t)\big(B_0(e(t))\,x(t) + b_0(e(t))\,\tau\big)\,dt\Big\},$$

б) $$(z_s{}^\delta, z^\delta) \in L_1{}^1(\sigma_s) \times L_{1,\Delta}^{d(b_0)}, \quad z_s{}^\delta \geqq 0, \quad \sum_{s\le d(\Phi)} \int z_s{}^\delta(l,t)\,d\sigma_s = 1,$$
$$\|\varphi^\delta\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}} < \delta, \qquad \varphi^\delta(t) = \sum_{s\le d(\Phi)} \int z_s{}^\delta(l,t)\,l_{u_1}\,d\overline{m}_{st} + B_1{}^*(e(t))\,z^\delta(t).$$

Преобразование условий 6.5

Пусть последовательность $(z_s{}^\delta, z^\delta)$ удовлетворяет условиям **6.5**. Введем обозначения:

$$\beta_s{}^\delta(t) = \int z_s{}^\delta(l,t)\,d\overline{m}_{st}, \qquad \beta^\delta(t) = \sum_{s\le d(\Phi)} \beta_s{}^\delta(t),$$
$$e_s{}^\delta = \{t: \beta_s{}^\delta(t) > 0\}, \qquad e^\delta = \{t: \beta^\delta(t) > 0\} = \bigcup_{s\le d(\Phi)} e_s{}^\delta.$$

Тогда $0 \leqq \beta_s{}^\delta, \beta^\delta \in L_{1,\Delta}^1$, $\int \beta^\delta(t)\,dt = 1$. Через $e^{\delta'}$ обоначается множество, дополнительное к e^δ, то есть Ce^δ. Из **6.5 б)** следует, что

$$z^\delta(t)\,\chi_{e^{\delta'}}(t) = -\big(B_1(e(t))\,B_1{}^*(e(t))\big)^{-1} B_1(e(t))\,\varphi^\delta(t)\,\chi_{e^{\delta'}}(t),$$

а это значит, что $z^\delta\chi_{e^{\delta'}} \to 0$ в $L_{1,\Delta}^{d(b_0)}$. Отсюда, в частности, следует, что в **6.5 а)** ни один из пределов не изменится, если в последовательности **6.5** функцию z^δ умножить на χ_{e^δ}. Поэтому без умаления общности можно считать, что в последовательности **6.5** функции $z_s{}^\delta$ сосредоточены на e^δ.

Пусть (z_s^δ, z^δ) такая последовательность. Положим

$$\alpha_s^\delta(t) = \begin{cases} \beta_s^\delta(t)/\beta^\delta(t), & \text{если} \quad t \in e^\delta \\ 0, & \text{если} \quad t \notin e^\delta. \end{cases}$$

Введем функцию l_s^δ при помощи соглашения

$$l_s^\delta(t) = \begin{cases} 1/\beta_s^\delta(t) \cdot \int z_s^\delta(l, t)\, l\, d\overline{m}_{st} & \text{на} \quad e_s^\delta, \\ \text{любой изм. выборке из} \quad \partial\Phi_s[e(t)] & \text{на} \quad e_s^{\delta'}. \end{cases}$$

Поскольку $\left(z_s^\delta(l, t)/\beta_s^\delta(t)\right) d\overline{m}_{st}$ при $t \in e_s^\delta$ вероятностная мера, сосредоточенная на выпуклом компакте $\partial\Phi_s[e(t)]$, то и на e_s^δ имеет место $l_s^\delta(t) \in \partial\Phi_s[e(t)]$. Введем далее n_s^δ и m^δ при помощи формул

$$n_s^\delta(t) = \begin{cases} 1/\beta_s^\delta(t) \cdot \int n\left(l, \Phi_s[e(t)]\right) z_s^\delta(l, t)\, d\overline{m}_{st} & \text{если} \quad t \in e_s^\delta \\ n(l_s^\delta(t), \Phi_s[e(t)] & \text{если} \quad t \notin e_s^\delta \end{cases}$$

и

$$m^\delta(t) = \begin{cases} z^\delta(t)/\beta^\delta(t) & \text{если} \quad t \in e^\delta \\ 0 & \text{если} \quad t \notin e^\delta. \end{cases}$$

Тогда

$$(\alpha_s^\delta, l_s^\delta, n_s^\delta, m^\delta) \in L^1_{\infty,\Delta} \times L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta} \times L^1_{\infty,\Delta} \times L^{d(b_0)}_{1,\Delta},$$

$$\alpha_s^\delta(t)\ (\geqq)\ 0, \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t) = 1 \quad \text{на} \quad e^\delta, \qquad \alpha_s^\delta(t) = 0 \quad \text{вне} \quad e_s^\delta$$

и имеют место следующие равенства:

$$\alpha_s^\delta(t)\, \beta^\delta(t)\, l_s^\delta(t) = \int z_s^\delta(l, t)\, l\, d\overline{m}_{st},$$

$$\alpha_s^\delta(t)\, \beta^\delta(t)\, n_s^\delta(t) = \int z_s^\delta(l, t)\, n\left(l, \Phi_s[e(t)]\right) d\overline{m}_{st}, \quad \beta^\delta(t)\, m^\delta(t) = z^\delta(t).$$

Очевидно: $|n_s^\delta(t)|\ (\leqq)\ k_0$. С учетом так введенных обозначений

$$\beta_s^\delta(t)\left(l_s^\delta(t)\, x, u_1 + n_s^\delta(t)\right) = \int z_s^\delta(l, t)\left(lx, u_1 + n(l, \Phi_s[e(t)])\right) d\overline{m}_{st}$$
$$\leqq \beta_s(t)\, \Phi_s\left(x, u_1, e(t)\right).$$

Поэтому $n_s^\delta(t)\ (\leqq)\ n\left(l_s^\delta(t), \Phi_s[e(t)]\right)$.

Итак доказана лемма.

Лемма 6.2: *Для того, чтобы функционал* $\int x\, d\nu + \varrho\tau$ *содержался в* Λ *необходимо существование последовательности* $(n_s^\delta, \beta^\delta, \alpha_s^\delta, l_s^\delta) \in L^1_{\infty,\Delta} \times L^1_{1,\Delta} \times L^1_{\infty,\Delta} \times L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$, удовлетворяющей условиям:

Условия принадлежности и связи:

6.6a) $$\int x\, d\nu + \varrho\tau = \lim_{\delta \to +0} \int \beta^\delta(t) \left\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t)\left(l_{sx}^\delta(t)\, x(t) + n_s^\delta(t)\, \tau\right) + m^\delta(t)\left(B_0^*(e(t))\, x(t) + b_0(e(t))\, \tau\right) \right\} dt,$$

$$\alpha_s^\delta(t)\ (\geqq)\ 0, \qquad \beta^\delta(t)\ (\geqq)\ 0, \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t)\ (=)\ \operatorname{sign} \beta^\delta(t),$$

$$l_s^\delta(t)\ (\in)\ \partial\Phi[e(t)], \qquad n_s^\delta(t)\ (\leqq)\ n\left(l_s^\delta(t), \Phi_s[e(t)]\right).$$

Нормировочные условия:

б) $|n_s^\delta(t)|\ (\leqq)\ \mathbf{k}_0, \qquad \int \beta^\delta(t)\,dt = 1, \qquad \|\varphi^\delta\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}} \leqq \delta,$

$$\varphi^\delta(t) = \beta^\delta(t)\left(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t)\, l_{su_1}^\delta(t) + B_1^*\big(e(t)\big)\, m^\delta(t)\right).$$

Нам потребуется следующее преобразование последовательности **6.6**. Обозначим через $\mathscr{E}_\delta$ совокупность всех точек $t \in \Delta$, в которых

$$r^\delta(t) > \sqrt{\|\varphi^\delta\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}}}, \qquad r^\delta(t) = \left|\sum_{s\leqq d(\Phi)} l_{su_1}^\delta(t)\, \alpha_s^\delta(t) + B_1^*\big(e(t)\big)\, m^\delta(t)\right|.$$

Очевидно имеем

$$\int_{\mathscr{E}_\delta} \beta^\delta(t)\,dt \leqq \left(\|\varphi^\delta\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}}\right)^{-1/2} \int_{\mathscr{E}_\delta} \beta^\delta(t)\, r^\delta(t)\,dt \leqq \left(\|\varphi^\delta\|_{L_{1,\Delta}^{d(u_1)}}\right)^{1/2} \leqq \delta^{1/2}.$$

Поскольку

$$m^\delta(t)\,\beta^\delta(t)\,\chi_{\mathscr{E}_\delta}(t) = \big(B_1(e(t))\,B_1^*(e(t))\big)^{-1} B_1\big(e(t)\big)\,\chi_{\mathscr{E}_\delta}(t)\left(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t)\, l_{su_1}^\delta(t)\,\beta^\delta(t) - \varphi^\delta(t)\right),$$

то $m^\delta\beta^\delta\chi_{\mathscr{E}_\delta} \to 0$ в $L_{1,\Delta}^{d(u_1)}$. Подобным образом из условия $|n_s^\delta(t)| < \mathbf{k}_0$ следует, что $\beta^\delta n_s^\delta \chi_{\mathscr{E}_\delta} \to 0$ в $L_{1,\Delta}^1$. Поэтому класс функционалов, являющихся слабыми пределами последовательностей **6.6** не изменится, если $\beta^\delta(t)$ заменить на $\left(\int_{\mathscr{E}_\delta} \beta^\delta(t)\,dt\right)^{-1} \times \beta^\delta(t)\,\chi_{\mathscr{E}_\delta}(t)$, а $m^\delta, n_s^\delta, \alpha_s^\delta$ домножить на $\chi_{\mathscr{E}_\delta'}$ ($\mathscr{E}_\delta' = \Delta \setminus \mathscr{E}_\delta$).

Доказана лемма.

Лемма 6.3: *Для того, чтобы функционал* $\int x(t)\,d\nu + \varrho\tau$ *содержался в* Λ *необходимо существование последовательности* $(\alpha_s^\delta, l_s^\delta, m^\delta, n_s^\delta, \beta^\delta) \in L_{\infty,\Delta}^1 \times L_{\infty,\Delta}^{(d)+d(u_1)} \times L_{1,\Delta}^{d(b_0)} \times L_{\infty,\Delta}^1 \times L_{1,\Delta}^1$, *удовлетворяющей условиям:*

Условия принадлежности и связи:

6.7 а) $$\int x\,d\nu + \varrho\tau = \lim_{\delta\to+0} \int \beta^\delta(t)\left\{\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t)\big(l_{sx}^\delta(t)\,x(t) + n_s^\delta(t)\,\tau\big) + m^\delta(t)\big(B_0(e(t))\,x(t) + b_0(e(t))\,\tau\big)\right\}dt$$

$$\beta^\delta \geqq 0, \qquad \alpha_s^\delta \geqq 0, \qquad \sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta = \chi_{e_\delta} \qquad \big(e_\delta = \{t\colon \beta^\delta(t) > 0\}\big),$$

б) $l_s^\delta(t) \in \partial\Phi_s[e(t)], \qquad n_s^\delta(t) \leqq n\big(l_s^\delta(t), \Phi_s[e(t)]\big).$

Нормировочные условия:

в) $|n_s^\delta(t)| \leqq \mathbf{k}_0, \qquad \int \beta^\delta(t)\,dt = 1,$

$$\left|\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t)\, l_{su_1}^\delta(t) + B_1^*\big(e(t)\big)\, m^\delta(t)\right| < \delta.$$

Мы не останавливаемся на доказательстве того, что класс функционалов $\int x\,d\nu + \varrho\tau$ пространства $\mathfrak{X}$, заданных условиями **6.6** и, соответственно, **6.7** совпадает с Λ, так как при выводе принципа максимума значения J_0 функционала J это не требуется.

Геометрическое представление функционалов $\int x\,d\nu + \varrho\tau$, содержащихся в Λ

Обозначим через Π_δ совокупность всех наборов $(\alpha_s^\delta, l_s^\delta, n_s^\delta, m^\delta, \beta^\delta, e_\delta)$, удовлетворяющих 6.7. Пусть функционал $\int x\,d\nu + \varrho\tau$ содержится в Λ. Согласно лемме 6.3

$$\int x\,d\nu + \varrho\tau \leqq \sup_{\Pi_\delta} \int \beta^\delta(t) \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t) \big(l_{sx}^\delta(t)\, x(t) + n_s^\delta(t)\, \tau\big) + m^\delta(t) \big[B_0(e(t))\, x(t) + b_0(e(t))\, \tau\big]\Big\}\, dt.$$

Оценим сверху выражение, стоящее под знаком $\sup\limits_{\Pi_\delta}$, обозначив его через f^δ:

$$f^\delta \leqq \operatorname*{vrai\,max}_{e_\delta} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t) \big(l_{sx}^\delta(t)\, x(t) + n_s^\delta(t)\, \tau\big) + m^\delta(t) \big(B_0(e(t))\, x(t) + b_0(e(t))\, \tau\big)\Big\}$$

$$\leqq \sup_{e_\delta'} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s^\delta(t) \big(l_{sx}^\delta(t)\, x(t) + n_s^\delta(t)\, \tau\big) + m^\delta(t) \big(B_0(e(t))\, x(t) + b_0(e(t))\, \tau\big)\Big\}$$

$$= \sup_{\substack{\operatorname{gr} \alpha_s^\delta, l_s^\delta, n_s^\delta \\ m^\delta, e | e_\delta'}} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s \big(l_{sx} x(t) + n_s \tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\},$$

где $e_\delta' \subset e_\delta$, $\operatorname{mes}(e_\delta \setminus e_\delta') = 0$. Функция

$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s \big(l_{sx} x(t) + n_s \tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)$$

непрерывно зависит от $(\alpha_s, l_s, n_s, m, e, t)$. Поэтому если множество $e_\delta' \subset e_\delta$ таково, что на нем все функции α_s^δ, l_s^δ, n_s^δ, m^δ, e ограничены (существование такого множества $e_\delta' \subset e_\delta$, $\operatorname{mes}(e_\delta \setminus e_\delta') = 0$, следует из того, что все перечисленные функции измеримы и ограничены по условию), то имеет место оценка

$$f^\delta \leqq \max_{\substack{\operatorname{gr} \alpha_s^\delta, l_s^\delta, n_s^\delta \\ m^\delta, e | e_\delta'}} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s \big(l_{sx} x(t) + n_s \tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\}.$$

Поскольку это неравенство выполняется для всех $e_\delta' \subset e_\delta$, $\operatorname{mes}(e_\delta \setminus e_\delta') = 0$, то из 1.10 следует, что оно верно также если $e \mid e_\delta'$ заменить на $e \mid e_\delta$. Таким образом доказано:

6.8 $$\sup_{\Lambda} \int x\,d\nu + \varrho\tau \leqq \max_{\hat{\Theta}_\delta} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s \big(l_{sx} x(t) + n_s \tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\},$$

где

$$\hat{\Theta}_\delta = \Big\{(\alpha_s, l_s, n_s, m, e, t) : e \in \bar{e}(t),\ \alpha_s \geqq 0,\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s = 1,$$

$$l_s \in \partial\Phi[e],\ t \in \Delta,\ -\mathrm{k}_0 \leqq m_s \leqq n(l_s, \Phi_s[e]),\ \Big| \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{su_1} + B_1^*(r)\, m \Big| \leqq \delta \Big\}.$$

Ясно, что $\hat{\Theta}_\delta$ компакты, убывающие вместе с $\delta > 0$. Если $\Lambda \neq \emptyset$, то компакты $\hat{\Theta}_\delta$ непусты для всех $\delta > 0$. Положим $\hat{\Theta} = \bigcap\limits_{\delta > 0} \hat{\Theta}_\delta$. Тогда из 6.8 в силу упоминавшейся выше непрерывности функции

$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_{sx}x(t) + n_s\tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)$$

относительно $(\alpha_s, \bar{l}_s, n_s, m, e, t)$ вытекает:

6.9 $$\sup_{\Lambda} \int x\, d\nu + \varrho\tau \leqq \max_{\hat{\Theta}} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_{sx}x(t) + n_s\tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\},$$

$$\hat{\Theta} = \Big\{(\alpha_s, l_s', n_s, m, e, \tau) : e \in \bar{e}(t),\ t \in \Delta,\ \alpha_s \geqq 0,\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s = 1,$$
$$l_s \in \partial\Phi_s[e],\ -\mathbf{k}_0 \leqq n_s \leqq (l_s, \Phi_s, [e]),\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{su_1} + B_1{}^*(e)\, m = 0\Big\}.$$

Отсюда в свою очередь следует, что

6.10 $$\Lambda \subset \partial\mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}\big(x(t), \tau\big) = \max_{\hat{\Theta}} \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_{sx}x(t) + n_s\tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\}.$$

Согласно [4] функционалы пространства $C_{\hat{\Theta}}$ (непрерывных на $\hat{\Theta}$ функций), опорные к $\max\limits_{\hat{\Theta}} \xi(\cdot)$, образуют множество мер Радона ϑ, сосредоточенных на $\hat{\Theta}$ и выполняющих $d\vartheta \geqq 0$, $\|\vartheta\| = 1$. Поскольку оператор

$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_{sx}x(t) + n_s\tau\big) = m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)$$

отображает пространство $\mathfrak{X}$ в $C_{\hat{\Theta}}$, то согласно теореме о композиции [4] $\partial\mathbf{P}$ состоит из функционалов

$$\int \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_s x(t) + n_s\tau\big) + m\big(B_0(e)\, x(t) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\}\, d\vartheta.$$

Таким образом доказана следующая

Лемма 6.4: *Каждый функционал $\int x\, d\nu + \varrho\tau \in \Lambda$ допускает представление*

$$\int x\, d\nu + \varrho\tau = \int \Big\{ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_{sx}x(t) + n_s\tau\big) + m\big(B_0(e) + b_0(e)\, \tau\big)\Big\}\, d\vartheta,$$

$$d\vartheta \geqq 0, \quad \vartheta \parallel \hat{\Theta}, \quad \|\vartheta\| = 1.$$

§ 7. Принцип максимума экстремального значения J_0 функционала J

Введем множество Θ при помощи соглашения

7.1 $$\Theta = \Big\{(\alpha_s, l_s, m, e, t) : t \in \Delta,\ \alpha_s \geqq 0,\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s = 1,\ e \in \bar{e}(t),$$
$$l_s \in \partial\Phi_s[e],\ \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{su_1} + B_1{}^*(e)\, m = 0\Big\}.$$

Очевидно Θ компакт пространства всех векторов (α_s, l_s, m, e, t).

Теорема 7.1: *Для того, чтобы число* $\overset{\circ}{J}_0$, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, *было экстремальным значением функционала* J *необходимо и достаточно существование принципа максимума этого значения функционала* J.

Определение 7.1: Строка $\pi = (c, \chi_0, \chi_i, \beta_0, \beta_i, b_s, l_s, m, m_0, \psi, \sigma)$ называется *принципом максимума* значения J_0, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, функционала J, если выполнены следующие группы условий:

Условия существования и принадлежности:

7.2 а) $c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$, $\quad (\chi_0, \chi_i) \in \mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)}$, $\quad \beta_0, \beta_i \in \mathbf{R}^1$,

$$(b_s, l_s, m, m_0) \in L^1_{1,\triangle} \times L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\triangle} \times L^{d(b_0)}_{\infty,\triangle} \times L^1_{1,\triangle},$$

$\sigma \parallel \Theta$ — мера Радона,

б) $\chi_0 \in \partial J$, $\quad \chi_i \in \partial\varphi_i$; $\quad \beta_0, \beta_i \geqq 0$, $\quad b_s(t)\,(\geqq)\,0$,

$l_s(t)\,(\in)\,\partial\Phi_s[e(t)]$, $\quad d\sigma \geqq 0$, $\quad c \in \mathbf{E}$,

ψ — функция ограниченной вариации $\psi\colon \triangle \to \mathbf{R}^{d(x)}$.

Условия критичности значения J_0 *функционала* J:

в) $$-d\psi(t) = \Big[A_0^*\big(e(t)\big)\,\psi(t) - B_0^*\big(e(t)\big)\,m(t) - \sum_{s \leqq d(\Phi)} b_s(t)\,l_{sx}(t)\Big]\,dt - d\nu,$$

где ν векторная мера Радона, определенная на $\triangle$ при помощи соглашения:

$$\int x\,d\nu = \int \Big(\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + B_0^*(e)\,m\Big)\,x\,d\sigma \text{ для всех } x \in C^{d(x)}_{\triangle},$$

$$\psi_r(t_0) = \nu(t_0) + R_0^* c + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i \chi_{i0} + \beta_0 \chi_{00},$$

$$\psi_l(t_1) = -\nu(t_1) - R_1^* c - \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i \chi_{i1} - \beta_0 \chi_{01}.$$

г) $$A_1^*\big(e(t)\big)\,\psi(t)\,(=)\,B_1^*\big(e(t)\big)\,m(t) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} b_s(t)\,l_{su_1}(t).$$

д) $$m_0(t) - \psi(t)\,A_2\big(e(t)\big)\,u_2(t)\,(\geqq)\,0 \quad \text{для всех} \quad u_2 \in \Xi.$$

е) $$-\int \psi(t)\,a_0\big(e(t)\big)\,dt + c r_0 + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big) + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i)$$

$$+ \int m(t)\,b_0\big(e(t)\big)\,dt + \varrho + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\,n\big(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\big)\,dt = 0,$$

$$\varrho = \int \Big(\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s(t)\,n(l_s, \Phi_s[e]) + m b_0(e)\Big)\,d\sigma.$$

Условие нетривиальности:

ж) $$|c| + \|\sigma\| + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i + \beta_0 + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\,dt > 0.$$

Прежде чем проводить доказательство теоремы 7.1 установим справедливость двух предложений.

Предложение 7.1: *В принципе максимума 7.2 условие* ж) *равносильно выполнению каждого из двух условий:*

7.2ж^0) *Для каждого полного индекса* $\alpha \in K$ *найдется хотя бы одна функция* $u_2^j \in a$ *такая, что*

$$\|m_0 - \psi A_2(e)\, u_2^j\|_{L^1_{1,\Delta}} + \|\sigma\| + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\, dt + \beta_0 + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i > 0.$$

ж^{00}) *Существует по крайней мере одна функция* $u_2 \in \Xi$ *такая, что*

$$\|m_0 - \psi A_2(e)\, u_2\|_{L^1_{1,\Delta}} + \|\sigma\| + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\, dt + \beta_0 + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i > 0.$$

Доказательство: ж) $\Rightarrow$ ж^0): Допустим, что эта импликация неверна. Тогда $\|\sigma\| = 0$, $b_s(t)\ (=)\ 0$, $\beta_i = 0$, $\beta_0 = 0$, $|c| > 0$ и найдется полный индекс $a \in K$ такой, что для всех $u_2^j \in a$

1а) $\quad m_0(t)\ (=)\ \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, u_2^j(t)$.

Поэтому из условий, связывающих компоненты принципа максимума, будет следовать

1б) $\quad -\dot\psi(t)\ (=)\ A_0^*\big(e(t)\big)\,\psi(t) - B_0^*\big(e(t)\big)\, m(t), \quad \psi(t_0) = R_0^* c, \quad \psi(t_1) = -R_1^* c,$

в) $\quad A_1^*\big(e(t)\big)\,\psi(t)\ (=)\ B_1^*\big(e(r)\big)\, m(t)$.

Пусть $w = (x, u_1, \alpha)$ некоторая точка из L_a. Тогда

2а) $\quad \dot x(t)\ (=)\ A_0\big(e(t)\big)\, x(t) + A_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + A_2\big(e(t)\big) \sum_{j \leqq d(a)} \alpha^j(t)\, u_2^j(t)$.

Умножая это на ψ, 1б) на x, вычитая из первого равенства второе и интегрируя по отрезку Δ, получим

2б)
$$x(t)\,\psi(t)\big|_{t_0}^{t_1} = \int_\Delta \Big\{A_1^*\big(e(t)\big)\,\psi(t)\, u_1(t) + m(t)\, B_0\big(e(t)\big)\, x(t) + \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big) \sum_{j \leqq d(a)} \alpha^j(t)\, u_2^j(t)\Big\}\, dt.$$

Это, с учетом краевых условий в 1б) и равенства 1в), приводится к виду

2в)
$$-cRp = \int_\Delta \Big\{m(t)\big(B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t)\big) + \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big) \sum_{j \leqq d(a)} \alpha^j(t)\, u_2^j(t)\Big\}\, dt.$$

Заменяя в этом $\psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, u_2^j(t)$ на $m_0(t)$ (это возможно в силу 1а)) получим

3.
$$-cRp = \int_\Delta \Big\{m(t)\big(B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t)\big) + m_0(t) \sum_{j \leqq d(a)} \alpha^j(t)\Big\}\, dt.$$

По условию точка $w = (x, u_1, \alpha)$ содержится в L_a. Следовательно, правая часть равенства 3 равна нулю. Таким образом $cRp = 0$ для всех $w \in L_a$. Согласно определению оператора T_a имеем $T_a w = Rp$. Поэтому $cT_a w = 0$ всюду на L_a. А так как индекс a полный, то отсюда следует, что $c \perp T_a L_a = \mathrm{E}$. В силу условий принадлежности 7.2а) $c \in E$. Следовательно $c = 0$. Последнее невозможно так как $|c| > 0$.

ж) $\Rightarrow$ ж^{00}): Это сразу следует из импликации ж) $\Rightarrow$ ж^0).

ж^{00} $\Rightarrow$ ж): Если допустить, что эта импликация неверна, то $\|\sigma\| = 0$, $c = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = 0$, $b_s(t)\ (=)\ 0$ и для некоторой функции $\bar{u}_2 \in \Xi$ имеет место неравенство

$$4. \qquad \int\limits_{\Delta} \big(m_0(t) - \psi(t)\, A_2(e(t))\, \bar{u}_2(t)\big)\, dt > 0.$$

При этом, как и выше, из условий, связывающих компоненты принципа максимума, следуют равенства

$$5а) \qquad -\dot{\psi}(t)\ (=)\ A_0{}^*\big(e(t)\big)\, \psi(t) - B_0{}^*\big(e(t)\big)\, m(t), \qquad \psi(t_0) = \psi(t_1) = 0.$$

$$б) \qquad A_1{}^*\big(e(t)\big)\, \psi(t)\ (=)\ B_1{}^*\big(e(t)\big)\, m(t).$$

$$в) \qquad \int\limits_{\Delta} \psi(t)\, a_0(t)\, dt = -\int\limits_{\Delta} m_0(t)\, dt + \int\limits_{\Delta} m(t)\, b_0\big(e(t)\big)\, dt.$$

Пусть $u_1 \in L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ произвольная функция, а x решение системы

$$6. \qquad \dot{x}(t)\ (=)\ A_0\big(e(t)\big)\, x(t) + A_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + A_2\big(e(t)\big)\, \bar{u}_2(t) + a_0\big(e(t)\big).$$

Умножая ее на ψ, 5в) на x, вычитая из первого равентсва второе и интегрируя по отрезку Δ получим

$$x(t)\, \psi(t)|_{t_1}^{t_0} = \int\limits_{\Delta} \Big\{\psi(t)\, A_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, \bar{u}_2(t)$$
$$+ \psi(t)\, a_0\big(e(t)\big) + m(t)\, B_0\big(e(t)\big)\, x(t)\Big\}\, dt.$$

Учитывая 5б) и краевые условия в 5а) приходим к тождеству

$$7. \qquad \int\limits_{\Delta} m(t)\, \big(B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t)\big)\, dt$$
$$+ \int\limits_{\Delta} \psi(t)\, a_0\big(e(t)\big)\, dt + \int\limits_{\Delta} \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, \bar{u}_2(t)\, dt = 0.$$

Отсюда, в силу 5в), вытекает

$$8. \qquad \int\limits_{\Delta} m(t)\, \big(B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t) + b_0(e(t))\big)\, dt$$
$$+ \int\limits_{\Delta} \psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, \bar{u}_2(t)\, dt = 0.$$

Согласно 1.14 $\operatorname{vrai\,min}\limits_{\Delta} \det B_1\big(e(t)\big)\, B_1{}^*\big(e(t)\big) > 0$. Поэтому среди решений системы 6. найдутся такие пары (x, u_1), для которых $B_0\big(e(t)\big)\, x(t) + B_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + b_0\big(e(t)\big)\ (=)\ 0$. Следовательно, из 8. вытекает $\int\limits_{\Delta} \big(\psi(t)\, A_2(e(t))\, \bar{u}_2(t) - m_0(t)\big)\, dt = 0$. Последнее противоречит 4.

ж^0) $\Rightarrow$ ж): Это сразу следует из импликация ж^{00}) $\Rightarrow$ ж) ∎

Введем обозначение: Если J_0 некоторое число, то через $\mathfrak{r}(J_0)$ будем обозначать совокупность всех последовательностей $\{(x^n, u^n)\}$, допустимых ограничениями

1.1, 1.2 и удовлетворяющих условиям

а) $J(p^n) \to J_0$,

б) $u_2^n \in \Xi$ для всех n.

Ясно, что $\tau(J_0) \subset \hat{\tau}(J_0)$.

Предложение 7.2: *В принципе максимума* 7.2 *условие* е) *эквивалентно каждому из трех требований:*

7.2e⁰) $$\int x^n\,d\nu + \varrho \to 0, \quad b_s\big(l_s(x^n, u_1^n) + n(l_s, \Phi_s[e])\big) \xrightarrow[L^1_{1,\Delta}]{} 0,$$

$$m_0 - \psi A_2(e)\,u_2^n \xrightarrow[L^1_{1,\Delta}]{} 0,$$

$$\beta_0\big(\chi_0 p^n + n(\chi_0, J) - J_0\big) \to 0, \quad \beta_i\big(\chi_i p^n + n(\chi_i, \varphi_i)\big) \to 0$$

для каждой последовательности $\{(x^n, u^n)\} \in \hat{\tau}(J_0)$.

e⁰⁰) *Требавание* e⁰) *выполнено хотя бы для одной последовательности* $\{(x^n, u^n)\} \in \hat{\tau}(J_0)$.

e⁰⁰⁰) $$\int \psi(t)\,a_0\big(e(t)\big)\,dt + cr_0 + \sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big) + \varrho$$

$$+ \int m(t)\,b_0\big(e(t)\big)\,dt - \int m_0(t)\,dt + \sum_{s \leq d(\Phi)} \int b_s(t)\,n\big(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\big)\,dt \geqq 0,$$

где $$\varrho = \int \Big(\sum_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s n(l, \Phi_s[e]) + m b_0(e)\Big)\,d\sigma.$$

Доказательство: При доказательстве этого предложения и теоремы 7.1 нам потребуется одна конструкция. Пусть $\hat{u}_1$ некоторая функция. Введем компакт

1. $$\Theta[\hat{u}_1] := \Big\{(\alpha_s, l_s, m, e, t, v_1) : t \in \Delta,\ \alpha_s \geqq 0,\ \sum_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s = 1,$$
$$(e, v_1) \in \overline{(e, u_1)}\,(t),\ l_s \in \partial\Phi[e],\ \sum_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s l_{sv_1} + B_1{}^*(e)\,m = 0\Big\}.$$

Очевидно, пространство C_Θ функций, непрерывных на Θ, является подпространством $C_{\Theta[\hat{u}_1]}$ функций, непрерывных на $\Theta[\hat{u}_1]$. Поэтому каждая мера $\sigma \parallel \Theta$, $d\sigma \geqq 0$, в силу теоремы Банаха о продолжении может быть ,,поднята'' в некоторую меру $\sigma_{\hat{u}_1} \parallel \Theta[\hat{u}_1]$, $d\sigma_{\hat{u}_1} \geqq 0$, так, что $\int f\,d\sigma = \int f\,d\sigma_{\hat{u}_1}$ для всех функций $f \in C_\Theta$. Из этих свойств меры $\sigma_{\hat{u}_1}$ следует, что $\|\sigma\| = \|\sigma_{\hat{u}_1}\|$ и для всех ограниченных на Θ борелевских функций f имеет место равенство $\int f\,d\sigma = \int f\,d\sigma_{\hat{u}_1}$.

Приступим к доказательству предложения 7.2. Согласно лемме 5.1 сопряженное уравнение 7.2в) допускает следующую эквивалентную запись:

2. $$cRp + \beta_0\chi_0 p + \sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i\chi_i p + \int_\Delta \psi(t)\,\big(\dot{x}(t) - A_0(e(t))\,x(t)\big)\,dt$$
$$+ \int_\Delta m(t)\,B_0\big(e(t)\big)\,x(t)\,dt + \sum_{s \leq d(\Phi)} \int_\Delta b_s(t)\,l_{sx}(t)\,x(t)\,dt$$
$$+ \int_\Delta \Big[\sum_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big]\,x(t)\,d\sigma = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in C^{d(x)}_\Delta.$$

Пусть (x^*, u^*) произвольная траектория, допустимая ограничениями **1.1**, **1.2** и такая, что $u_2^* \in \Xi$. Обозначим через $\Theta[u_1^*]$ компакт, отвечающий компоненте

$u_1{}^*$ управления u^*, а через $\sigma_{u_1{}^*}$ позитивную меру, сосредоточенную на $\Theta[u_1{}^*]$ и такую, что $\int f\,d\sigma = \int f\,d\sigma_{u_1{}^*}$ для всех борелевских функций f, ограниченных на Θ. Поскольку в 7.2 и 2. содержатся лишь такие интегралы по мере σ, у которых подынтегральные функции борелевские и ограниченные на Θ, то в них σ можно заменить на $\sigma_{u_1{}^*}$. В результате получим два равенства:

3а) $$cRp + \beta_0\chi_0 p + \sum_{i\leqq d(\Phi)} \beta_i\chi_i p + \int \psi(t)\big(\dot x(t) - A_0(e(t))\,x(t)\big)\,dt$$
$$+ \int m(t)\,B_0\big(e(t)\big)\,x(t)\,dt + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\,l_{sx}(t)\,x(t)\,dt$$
$$+ \int \Big(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)\,x(t)\,d\sigma_{u_1{}^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in C_\Delta^{d(x)}.$$

б) $$\varrho = \int \Big[\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e] + mb_0(e))\Big]\,d\sigma_{u_1{}^*}.$$

Наша цель показать, что в 7.2 будет е) $\sim$ е^0) е $\sim$ е^{00}) $\sim$ е^{000}). Положим

$$d^* := -\int \psi(t)\,a_0\big(e(t)\big)\,dt + cr_0 + \sum_{i\leqq d(\Phi)} \beta_i n(\chi_i, \varphi_i) + \beta_0\big(n(\chi_0, J) - J_0\big)$$
$$+ \int m(t)\,b_0\big(e(t)\big)\,dt + \varrho + \sum_{s\leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\,n\big(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\big)\,dt - \int m_0(t)\,dt$$
$$\Big(\varrho = \int \Big[\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e]) + mb_0(e)\Big]\,d\sigma_{u_1{}^*}\Big).$$

Тогда требуемая эквивалентность будет установлена, если мы покажем, что условие $d_* \geqq 0$ равносильно каждому из требований 7.2е)—е^{000}). Именно это и будет доказано.

На $\Theta[u_1{}^*]$ выполняется $\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{su_1} + B_1{}^*(e)\,m = 0$. Поэтому

3в) $$\int \Big(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{su_1} + B_1{}^*(e)\,m\Big)\,u_1\,d\sigma_{u_1{}^*} = 0.$$

И далее, из 7.2г)—д) следует

3г) $$\int \Big[m(t)\,B_1\big(e(t)\big) + \sum_{s\leqq d(\Phi)} b_s(t)\,l_{su_1}(t) - \psi(t)\,A_1\big(e(t)\big)\Big]\,u_1{}^*(t)\,dt \geqq 0,$$

д) $$\int \big[m_0(t) - \varphi(t)\,A_2\big(e(t)\big)\,u_2{}^*(t)\big]\,dt \geqq 0.$$

Подставляя в 3а) вместо x элемент x^* и прибавляя 3а)—д) к равенству, полученному из 7.2е) заменой в правой части нуля на d_*, получим

4. $$\underline{(cRp^* + r_0)} + \beta_0\big(\chi_0 p^* + n(\chi_0, J) - J_0\big) + \sum_{i\leqq d(\varphi)} \beta_i\big(n(\chi_i, \varphi_i) + \chi_i p^*\big)$$
$$\underline{+ \int \psi(t)\big(\dot x^*(t) - A_0(e(t))\,x^*(t) - A_1(e(t))\,u_1{}^*(t) - A_2(e(t))\,u_2{}^*(t) - a_0(e(t))\big)\,dt}$$
$$\underline{+ \int m(t)\big(B_0(e(t))\,x^*(t) + B_1(e(t))\,u_1{}^*(t) + b_0(e(t))\big)\,dt}$$
$$+ \sum_{s\leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\big(l_s(t)\,(x^*(t), u_1{}^*(t)) + n_s(t)\big)\,dt$$
$$+ \int m\big(B_0(e)\,x^*(t) + B_1(e)\,u_1 + b_0(e)\big)\,d\sigma_{u_1{}^*}$$
$$+ \int \sum_{s\leqq d(\Phi)} \big(\alpha_s l_s(x^*(t), u_1) + n(l_s, \Phi_s[e])\big)\,d\sigma_{u_1{}^*}$$
$$= \int \big[m_0(t) - \psi(t)\,A_2\big(e(t)\big)\,u_2{}^*(t)\big]\,dt + d_* \geqq d_*.$$

Поскольку траектория (x^*, u^*) допустима ограничениями **1.1**, **1.2** задачи **А**, то все подчеркнутые слагаемые в 4. равны нулю. Из условий принадлежности **7.2б)** вытекает, что

5а) $\chi_i p^* + n(\chi_i, \varphi_i) \leqq \varphi_i(p^*) \leqq 0, \quad \chi_0 p^* + n(\chi_0, J) - J_0 \leqq J(p^*) - J_0,$

$l_s(t)\left(x^*(t), u_1{}^*(t)\right) + m\left(l_s(t), \Phi_s[e(t)]\right) (=) \Phi_s\left(x^*(t), u_1{}^*(t), e(t)\right) (\leqq) 0.$

Кроме того из определения компакта $\Theta[u_1{}^*]$ следует

5б) $B_0(e)\, x^* + B_1(e)\, u_1 + b_0(e) = 0.$

Таким образом все слагаемые левой части 4., исключая $\beta_0\left(\chi_0 p^* + n(\chi_0, J) - J_0\right)$, неположительны. Поэтому

6. $$\beta_0[J(p^*) - J_0] + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i \varphi_i(p^*) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\, \Phi_s\left(x^*(t), u_1{}^*(t), e(t)\right)$$

$$\geqq \int \left[m_0(t) - \psi(t)\, A_2\left(e(t)\right) u_2{}^*(t)\right] dt + d_* \geqq d_*.$$

Пусть $\{(x^n, u^n)\} \in \hat{\tau}(J_0)$. Так как $m_0(t) - \psi(t)\, A_2\left(e(t)\right) u_2{}^n(t)\, (\geqq)\, 0$ для всех n и $J(p^n) \to J_0$, то согласно 4. и 6. неравенство $d_* \geqq 0$ эквивалентно как тому, что все слагаемые левой части 4. и $\int \left[m_0(t) - \psi(t)\, A_2\left(e(t)\right) u_2{}^n(t)\right] dt$ при $n \to \infty$ имеют своим пределом нуль так и условию $d_* = 0$. То есть $d_* \geqq 0$ эквивалентно как системе предельных соотношений

7а) $\beta_0[\chi_0 p^n + n(\chi_0, J) - J_0] \to 0, \qquad \beta_i[\chi_i p^n + n(\chi_i, \varphi_i)] \to 0,$

б) $b_s\left(l_s(x^n, u_1{}^n) + n_s\right) \xrightarrow[L^1_{1.\Delta}]{} 0,$

в) $m_0 - \psi A_2(e)\, u_2 \xrightarrow[L^1_{1.\Delta}]{} 0,$

г) $\int \left[\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_s(x^n, u_1) - n(l_s, \Phi_s[e])\right] d\sigma_{u_1{}^n} \to 0$

так и условию **7.2е)**. В силу 5б) $B_0(e)\, x^n + B_1(e)\, u_1 + b_0(e)\, (= \sigma_{u_1{}^n})\, 0$. Поэтому левая часть в 7г) допускает представление

8. $$\int \left\{\left[\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + m B_0(e)\right] x^n + \left[\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e]) + m b_0(e)\right]\right\} d\sigma_{u_1{}^n} \to 0.$$

Функция $\sum \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e])$ — борелевская и ограниченная на Θ. Поэтому в 8. можно $d\sigma_{u_1{}^n}$ заменить на $d\sigma$. Сравнивая результат с определениями $d\nu$ и ϱ, содержащимися в **7.2в)—е)** получим $\int x^n d\nu + \varrho \to 0$. Итак 7а)—г) равносильно каждому из условий **7.2е)—е^{000})** ∎

Из соотношений **7.2е^0)** следуют условия дополняющей нежесткости. А именно, в силу 5а) из 7а)—г) вытекает

Предложение 7.3: *Для любой последовательности* $\{(x^n, u^n)\} \in \hat{\tau}(J_0)$ *выполняются следующие условия:*

$$\beta_i \varphi_i(p^n) \to 0, \quad \alpha_s \Phi_s(x^n, u_1, e) \to 0$$

в

$$L_1{}^1(\sigma_{u_1{}^n}), \quad b_s \Phi_s(x^n, u_1{}^n, e) \to 0 \quad \text{в} \quad L^1_{1.\Delta}.$$

При доказательстве предложения 7.2 установлено еще одно свойство строки **7.2**, которое заслуживает отдельной формулировки.

Предложение 7.4: *Пусть π принцип максимума экстремального значения J_0 функционала J. Тогда для любой траектории (x^*, u^*), допустимой ограничениями* **1.1**, **1.2** *и такой, что $u_2^* \in \Xi$ имеет место неравенство*

$$\beta_0\big(J(p^*) - J_0\big) + \sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i \varphi_i(p^*) + \sum_{s \leq d(\Phi)} \int b_s(t)\, \Phi_s\big(x^*(t), u_1^*(t), e(t)\big)\, dt \geqq 0.$$

Доказательство: Оно прямо следует из формулы 6., установленной при доказательстве предложения 7.2, и из условия 7.2e) ∎

Доказательство теоремы 7.1: *Достаточность*. В силу теоремы 5.2 она будет установлена, если мы покажем, что каждая пара ϱ, $d\nu$, содержащаяся в строке π, допускает представление

$$\int x\, d\nu + \varrho \leqq \sum_{s \leq d(\Phi)} \nu_s\big(l_x x + n(l, \Phi_s[e])\big) + \mu\big(B_0(e)\, x + b_0(e)\big),$$

$$0 \leqq \nu_s \in L_\infty^{1'}(\sigma_s), \quad \sum_{s \leq d(\Phi)} \|\nu_s\| = \|\sigma\|, \qquad \mu \in L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)'},$$

$$\sum_{s \leq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1) + \mu\big(B_1(e)\, u_1\big) = 0 \quad \text{для всех} \quad u_1.$$

В [1] было показано, что если φ выпуклый непрерывный функционал банахова пространства $\mathfrak{Z}$, $H \subset \mathfrak{Z}$ подпространство, λ_H — линейный функционал, опорный к φ на H, $n_H(\lambda_H, \varphi) = \inf\limits_H \{\varphi(\mathfrak{z}) - \lambda_H(\mathfrak{z})\}$, то существуют линейные функционалы λ и μ_H пространства $\mathfrak{Z}$, $\lambda \in \partial\varphi$ и $\mu_H \in H^*$, такие, что $\lambda_H = \lambda + \mu_H$, $n_H(\lambda_H, \varphi) = n(\lambda, \varphi)$. (Здесь через H^* обозначается совокупность всех линейных функционалов, исчезающих на H.) Из этого следует, что если $\Gamma \subset \mathfrak{Z}$ гиперплоскость (сдвинутое подпространство) и λ_Γ линейный функционал, опорный к φ на Γ, то существуют линейные функционалы λ, $\mu_\Gamma \in \mathfrak{Z}'$, $\lambda \in \partial\varphi$, $\mu_\Gamma \in \Gamma^*$ такие, что

1. $\quad \lambda_\Gamma = \lambda + \mu_\Gamma, \qquad n_\Gamma(\lambda_\Gamma, \varphi) = n(\lambda, \varphi) - \mu_\Gamma(\Gamma).$

Γ^* — совокупность всех линейных функционалов, принимающих на Γ постоянное значение; $\mu_\Gamma(\Gamma)$ — значение μ_Γ в точках рассматриваемой гиперплоскости Γ; $n_\Gamma(\lambda_\Gamma, \varphi) = \inf\limits_\Gamma \{\varphi(\mathfrak{z}) - \lambda_\Gamma(\mathfrak{z})\}$.

Исходя из этих формул мы можем показать, что пара ϱ, $d\nu$, содержащаяся в строке π, принадлежит $\|\sigma\|\,\Lambda$ и, следовательно, допускает указанное выше представление. Пусть $\bar{u}_1^* \in L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}$ некоторая фиксированная функция. Тогда

$$\int x\, d\nu + \varrho = \int \left\{ \sum_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s\big(l_{sx} x + n(l_s, \Phi_s[e])\big) + m\big(B_0(e)\, x + b_0(e)\big) \right\} d\sigma.$$

Из определения компакта $\Theta[u_1^*]$ следует, что на нем

$$l_s(x, u_1) + n(l_s, \Phi_s[e]) \leqq \Phi_s(x, u_1, e) \leqq \operatorname{vrai}\max_\Delta \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big)$$

и $\sum\limits_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s l_{su_1} + B_1^*(e)\, m = 0$. Поэтому

2. $$\int x\, d\nu + \varrho \leqq \|\sigma\| \max_s \operatorname{vrai}\max_\Delta \Phi_s\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) + \int m\big(B_0(e)\, x + B_1(e)\, u_1 + b_0(e)\big)\, d\sigma_{u_1^*}.$$

Обозначим через $\mathscr{L}$ гиперплоскость пространства $C_{\Delta}^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}$, состоящую из точек (x, u_1), для которых $B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t) + b_0(e(t))\ (=)\ 0$. Пусть $(x_1^*, u_1^*) \in \mathscr{L}$. Тогда на $\Theta[u_1^*]$ будет $B_0(e)\, x^* + B_1(e)\, u_1 + b_0(e) = 0$. Поэтому из 2. вытекает, что на $\mathscr{L}$ функционал $\int x\, d\nu + \varrho$ является опорным к выпуколму функционалу

$$\hat{\Phi}(x, u_1) = \|\sigma\| \max_s \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t)),$$

причем имеет место неравенство $\varrho \leqq n_{\mathscr{L}}(\int x\, d\nu, \hat{\Phi}(x, u_1))$. Отсюда в силу 1. следует существование функционалов $\mu_{\mathscr{L}} \in \mathscr{L}^*$ и $\lambda \in \partial\hat{\Phi}$ таких, что

3. $\quad \int x\, d\nu = \lambda(x, u_1) + \mu_{\mathscr{L}}(x, u_1), \qquad \varrho \leqq n_{\mathscr{L}}(\int x\, d\nu, \hat{\Phi}) = n(\lambda, \hat{\Phi}) - \mu_{\mathscr{L}}(\mathscr{L}).$

Каждая линейная функция, постоянная на $\mathscr{L}$, исчезает на множестве решений уравнения $B_0(e(t))\, x(t) + B_1(e(t))\, u_1(t)\ (=)\ 0$ и поэтому допускает представление $\mu(B_0(e)\, x + B_1(e)\, u_1)$, где μ произвольный функционал пространства $L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)}$. Следовательно

$$\mu_{\mathscr{L}}(x, u_1) = \mu(B_0(e)\, x + B_1(e)\, u_1) \quad \text{и} \quad \mu_{\mathscr{L}}(\mathscr{L}) = -\mu(b_0(e)).$$

Остается найти общий вид функционалов λ пространства $C_{\Delta}^{d(x)} \times L_{\infty,\Delta}^{d(u_1)}$, опорных к выпуклому функционалу $\hat{\Phi}(x, u_1)$. Согласно [1] каждый такой функционал допускает представление

$$\lambda(x, u_1) = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s \lambda_s(x, u_1),$$

$$\alpha_s \geqq 0, \quad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s = 1, \quad \lambda_s \in \partial \left\{ \|\sigma\| \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t)) \right\},$$

$$n(\lambda, \hat{\Phi}) = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s n\left(\lambda_s, \|\sigma\| \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))\right).$$

Далее, каждый функционал λ_s, опорный к $\|\sigma\| \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))$, согласно формуле 4.10 допускает представление

$$\lambda_s(x, u_1) = \eta_s(l(x, u_1)), \qquad 0 \leqq \eta_s \in L_{\infty}^{1\prime}(\sigma_s),$$

$$n\left(\lambda_s, \|\sigma\| \operatorname{vrai}\max_{\Delta} \Phi_s(x(t), u_1(t), e(t))\right) = \eta_s(n(l, \Phi_s[e])), \qquad \|\eta_s\| = \|\sigma\|.$$

Таким образом

$$\lambda(x, u_1) = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l(x, u_1)), \qquad 0 \leqq \nu_s \in L_{\infty}^{1\prime}(\sigma_s), \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| = \|\sigma\|,$$

$$n(\lambda, \hat{\Phi}) = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(n(l, \Phi_s[e])).$$

Поэтому из 3. вытекает существование представления

4. $\quad \int x\, d\nu = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l(x, u_1)) + \mu(B_0(e)\, x + B_1(e)\, u_1),$

$$\varrho \leqq \varrho^* = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(n(l, \Phi_s[e])) + \mu(b_0(e)),$$

$$0 \leqq \nu_s \in L_{\infty}^{1\prime}(\sigma_s), \qquad \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\| = \|\sigma\|, \qquad \mu \in L_{\infty,\Delta}^{d(b_0)\prime}.$$

Покажем, что строка $(c, \chi_0, \chi_i, \beta_0, \beta_i, b_s, l_s, m, m_0, \nu_s, \mu, \psi)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.2. Поскольку согласно 4. для функционалов ν_s, μ выполнено тождество

$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} \nu_s(l_{u_1} u_1) + \mu\big(B_1(e)\, u_1\big) = 0 \quad \text{при всех} \quad u_1 \in L^{d(u_1)}_{\infty, \Delta};$$

то остается установить, что для рассматриваемой строки имеет место неравенство 5.14ж). А это неравенство непосредственно следует согласно 7.2е) из 4. и из того что $\varrho^* \geqq \varrho$. Следовательно строка $(c, \chi_0, \chi_i, \beta_0, \beta_i, b_s, l_s, m, m_0, \nu_s, \mu, \psi)$ удовлетворяет условиям 5.14. В силу теоремы 5.2 отсюда следует экстремальность значения J_0 функционала J.

Необходимость. Пусть J_0 экстремальное значение функционала J. В силу теоремы 5.2 существует строка $(c, \chi_0, \chi_i, \beta_0, \beta_i, b_s, l_s, m, m_0, \nu_s, \mu, \psi)$, удовлетворяющая условиям 5.14. Согласно лемме 6.4 существует мера $\hat{\sigma} \parallel \hat{\Theta}$, $d\hat{\sigma} \geqq 0$, $\|\hat{\sigma}\| = \sum_{s \leqq d(\Phi)} \|\nu_s\|$ такая, что

$$\int x\, d\nu + \hat{\varrho} = \int \Big[\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\, x + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s n_s + mb_0(e)\Big]\, d\hat{\sigma}$$

для всех $x \in C^{d(x)}_{\Delta}$. Согласно определению компакта $\hat{\Theta}$ имеем $n_s \leqq n(l_s, \Phi_s[e])$. Поэтому

5. $$\hat{\varrho} \leqq \varrho = \int \Big[\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e]) + mb_0(e)\Big]\, d\hat{\sigma}.$$

Подынтегральная функция правой части 5. является борелевской и ограниченной на Θ. Поэтому $\hat{\sigma}$ можно заменить на меру σ, являющуюся сужением $\hat{\sigma}$ на Θ. Выше отмечалось, что $d\sigma \geqq 0$, $\|\hat{\sigma}\| = \|\sigma\|$. Рассмотрим строку $\pi = (c, \chi_0, \chi_i, \beta_0, \beta_i, b_s, l_s, m, m_0, \sigma, \psi)$. Она удовлетворяет условиям 7.2а)—д), е^{00}), ж). Согласно предложению 7.2 имеем в них е^{00}) $\sim$ е). Поэтом строка π удовлетворяет условиям 7.2 и следовательно, является принципом максимума значения J_0 функционала J ∎

Следствия из существования принципа максимума значения J_0

Теорема 7.2: *Если в принципе максимума значения J_0, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, составляющая β_0 строго положительна, то J_0 является оптимальным значением функционала J.*

Доказательство: Действительно, для любой допустимой ограничениями задачи **А** траектории (x, u) согласно предложению 7.3 имеет место неравенство $\beta_0\big(J(p) - J_0\big) \geqq 0$. Так как $\beta_0 > 0$, то $J(p) \geqq J_0$ ∎

Аналогично доказываются теоремы 7.3, 7.4.

Теорема 7.3: *Если в принципе максимума значения J_0 функционала J будет $\beta_{i_*} > 0$ или $\|b_{s_*}\|_{L^1_{1,\Delta}} > 0$ или $\|\sigma\| > 0$, то не существует траектории (x, u), допустимой ограничениями задачи* **А**, *для которой*

$$\varphi_{i_*}(p) < 0, \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_{s_*}\big(x(t), u_1(t), e(t)\big) < 0,$$

$$\max_s \operatorname*{vrai\,max}_{\Delta} \Phi_s\big(\dot{x}(t), u_1(t), e(t)\big) < 0,$$

соответственно.

Теорема 7.4: *Если в принципе максимума значения J_0, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, функционала J будет*

$$\beta_0 + \sum_{i \leqq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s \leqq d(\Phi)} \int b_s(t)\, dt + \|\sigma\| > 0,$$

то J_0 стационарное значение этого функционала.

Теорема 7.5: *Если все индексы задачи* **A** *полные, то из существования принципа максимума значения J_0 функционала J, $\tau(J_0) \neq \emptyset$, следует стационарность этого значения функционала.*

Доказательство: Оно следует из того, что принцип максимума значения J_0 функционала J эквивалентен критичности его во всех полных индексах, а так как все индексы полные, то отсюда следует стационарность значения J_0 ▮

В частности, если среди ограничений задачи **A** не содержится включения $u_2(t)\ (\in)\ \mathbf{Z}(t)$ или множества $\mathbf{Z}(t)$ одноэлементные, то существование принципа максимума значения J_0 эквивалентно его стационарности.

О связи с классической формой записи принципа максимума

Пусть π принцип максимума значения J_0 функционала J и $\{(x^n, u^n)\} \in \hat{\tau}(J_0)$. В силу **7.2e⁰)** имеем

7.3 $$\psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, u_2{}^n(t) - m_0(t)\ (=)\ -\delta_n{}^1(t)\ (\leqq)\ 0 \quad \text{для всех} \quad n,$$

$$\delta_n{}^1 \to 0 \quad \text{в} \quad L^1_{1,\Delta}\,;$$

Так как согласно **7.2д)** выполняется $\psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\, u_2(t) - m_0(t)\ (\leqq)\ 0$ для всех $u_2 \in \Xi$, то из **7.3** следует, что

7.4 $$\psi(t)\, A_2\big(e(t)\big)\big(u_2(t) - u_2{}^n(t)\big)\ (\leqq)\ \delta_n{}^1(t)$$

как только $u_2 \in \Xi$. Далее, согласно **7.2г)** будет

7.5 $$\psi(t)\, A_1\big(e(t)\big)\ (=)\ m(t)\, B_1\big(e(t)\big) + \sum_{s \leqq d(\Phi)} b_s(t)\, l_{u_1}(t)\,.$$

Пусть функция $u_1 \in L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}$ такова, что

7.6 $$\Phi_s\big(x^n(t), u_1(t), e(t)\big)\ (\leqq)\ 0,$$

$$B_0\big(e(t)\big)\, x^n(t) + B_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) + b_0\big(e(t)\big)\ (=)\ 0.$$

Тогда в силу **7.5** получаем

7.7 $$\psi(t)\, A_1\big(e(t)\big)\, u_1(t) - \big(u_1{}^n(t)\big)\ (=)\ \sum_{s \leqq d(\varphi)} b_s(t)\, l_{su_1}(t)\,\big(u_1(t) - u_1{}^n(t)\big).$$

Поскольку

$$0\ (\geqq)\ b_s(t)\, \Phi_s\big(x^n(t), u_1(t), e(t)\big)\ (\geqq)\ b_s(t)\,\big(l_s(t)\,(x^n(t), u_1(t)) + n_s(t)\big),$$

$$0\ (\geqq)\ b_s(t)\, \Phi_s\big(x^n(t), u_1{}^n(t), e(t)\big)\ (\geqq)\ b_s(t)\,\big(l_s(t)\,(x^n(t), u_1{}^n(t)) + n_s(t)\big)$$

и, в силу **7.2e⁰)**,

$$\sum_{s \leqq d(\Phi)} b_s(t)\,\big(l_s(t)\,(x^n(t), u_1{}^n(t)) + n_s(t)\big)\ (=)\ -\delta_n{}^2(t)\ (\leqq)\ 0 \quad \text{для всех} \quad n,$$

$$\delta_n{}^2 \to 0 \quad \text{в} \quad L^1_{1,\Delta}\,,$$

то из 7.7 следует, для всех $u_1 \in \Xi$ удовлетворяющих 7.6, что

7.8 $\psi(t)\, A_1\big(e(t)\big)\big(u_1(t) - u_1^n(t)\big)\,(\leqq)\,\delta_n^2(t)$.

Сравнивая это с 7.8 заключаем, что каждое управление $u \in L^{d(u)}_{\infty,\Delta}$, у которого составляющая u_2 содержится в Ξ и для u_1 выполняется 7.6, удовлетворяет неравенству

7.9 $\psi(t)\, A\big(e(t)\big)\big(u(t) - u^n(t)\big)\,(\leqq)\,\delta_n(t)\,(=)\,\delta_n^1(t) + \delta_n^2(t)$.

Поскольку $\delta_n(t)$ не зависит от управлений $u(t)$, удовлетворяющих 7.6 и таких, что $u_2(t) \in \Xi$, то 7.9 является прямым обобщением классического принципа максимума.

Итак, принцип максимума экстремального значения J_0 допускает запись в двух эквивалентных формах: 7.2а)—д), е), ж) и 7.2а)—д), е^0), ж). Первая из них обобщает принцип максимума линейных задач со смешанными ограничениями неравенства, который был получен в [2]. Вторая — классический принцип максимума Понтрягина.

О принципе максимума экстремальной траектории

Определение 7.2: Мы скажем, что траектория (x^0, u^0) *экстремальна* в задаче **A** (является *экстремалью* задачи **A**), если

1. (x^0, u^0) допустима ограничениями **1.1**, **1.2**,
2. компонента u_2^0 управления u^0 принадлежит Ξ и
3. число $J_0 = J(p_0)$ является экстремальным значением функционала J.

Напомним, что определение экстремальности числа J_0 (определение 3.2) содержит два требования:

а) J_0 должно быть критическим в каждой из задач $\mathbf{A}_a$, отвечающих полным индексам $a \in K$, и

б) $\tau(J_0) \neq \emptyset$.

Определение 7.3: Строка $\pi = (c, \beta_0, \beta_i, \chi_0, \chi_i, b_s, l_s, m, \psi, \sigma)$ называется *принципом максимума* экстремали (x^0, u^0), если выполнены следующие условия:

Условия существования и принадлежности:

7.10а) $c \in \mathbf{R}^{d(r_0)}$, $\beta_0, \beta_i \in \mathbf{R}^1$, $(\chi_0, \chi_i) \in \mathbf{R}^{d(x)+d(u_1)}$, $b_s \in L^1_{1.\Delta}$, $m \in L^{d(b_0)}_{1.\Delta}$,

ψ — функция ограниченной вариации со значениями в $\mathbf{R}^{d(x)}$,

σ — мера Радона, $\sigma \parallel \Theta[u_1^0, x^0]$,

$\Theta[u_1^0, x^0] = \big\{(\alpha_s, l_s, m, e, v_1, t) \in \Theta[u_1^0]\colon l_s \in \partial\Phi\big(x^0(t), v_1, e\big),$

$\alpha_s\Phi_s\big(x^0(t), v_1, e\big) = 0\big\}$

(множество $\Theta[u_1^0]$ было определено при доказательстве предложения 7.2).

б) $c \in \mathbf{E}$, $\beta_0, \beta_i \geqq 0$, $\chi_0, \chi_i \in \partial J(p^0) \times \partial\varphi_i(p^0)$, $b_s(t)\,(\geqq)\,0$,

$l_s(t)\,(\in)\,\partial\Phi_s\big(x^0(t), u_1^0(t), e(t)\big)$.

Условия критичности:

7.10в) $-d\psi(t) = \left(A_0^*(e(t))\right)\psi(t) - \sum_{s \leq d(\Phi)} b_s(t)\, l_{sx}(t) - B_1^*(e(t))\, m(t)\, dt - d\nu,$

$\psi_r(t_0) = \nu(t_0) + R_0^* c + \beta_0\chi_{00} + \sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i \chi_{i0},$

$\psi_l(t_1) = -\nu(t_1) - R_1^* c - \beta_0\chi_{01} - \sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i \chi_{i1},$

$d\nu$ — мера Радона, определенная условием

$\int x\, d\nu = \int \left(\sum_{s \leq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + m\dot{B}_0(e)\right) x\, d\sigma$ для всех $x \in C_\Delta^{d(x)}$

(*сопряженная система*).

г) $A_1^*(e(t))\,\psi(t) - B_1^*(e(t))\, m(t) - \sum_{s \leq d(\Phi)} b_s(t)\, l_{su_1}(t)\ (=)\ 0$

(*локальный принцип максимума*).

д) $\psi(t)\, A(e(t))\left(u^0(t) - u(t)\right)(\geqq 0)$ для всех $u \in L_{\infty,\Delta}^{d(u)}$, удовлетворяющих условиям

$u_2 \in \Xi, \quad B_0(e(t))\, x^0(t) + B_1(e(t))\, u_1(t) - b_0(e(t))\ (=)\ 0,$

$\Phi_s(x^0(t), u_1(t), e(t))\ (\leqq)\ 0$

(*принцип максимума*).

е) $\beta_i \varphi_i(p_0) = 0, \qquad b_s(t)\, \Phi_s(x^0(t), u_1^0(t), e(t))\ (\leqq)\ 0$

(*условия дополняющей нежесткости*).

Условие нетривиальности:

ж) $|c| + \beta_0 + \sum_{i \leq d(\varphi)} \beta_i + \sum_{s \leq d(\Phi)} \int b_s(t)\, dt + \|\sigma\| > 0.$

Теорема 7.6: *Пусть траектория* (x^0, u^0) *удовлетворяет условиям* **1.1**, **1.2**, $u_2^0 \in \Xi$ *и* $\tau(J(p^0)) \neq \emptyset$. *Для того, чтобы* (x^0, u^0) *была экстремалью необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялся принцип максимума* **7.10**.

Доказательство: *Необходимость*. Пусть траектория (x^0, u^0) является экстремалью. Тогда число $J_0 = J(p^0)$ является экстремальным значением функционала J, и согласно теореме 7.1 существует принцип максимума 7.2 этого значения. То есть существует строка $\pi = (c, \chi_0, \chi_i, \beta_0, \beta_i, b_s, l_s, m, m_0, \psi, \sigma)$, удовлетворяющая условиям **7.2**. Принцип максимума **7.10** будет получен преобразованием строки **7.2**.

Согласно условиям **7.2** е^0) имеем

1а) $\beta_0(\chi_0 p^0 + n(\chi_0, J) - J_0) = 0,$

б) $\beta_i(\chi_i p^0 + n(\chi_i, \varphi_i)) = 0,$

в) $b_s(t)\left(l_s(t)\,(x^0(t), u_1^0(t)) + n(l_s(t), \Phi_s[e(t)])\right)(=)\ 0.$

При этом в силу условий принадлежности **7.2б)** будет

2а) $\chi_0 \in \partial J,$

б) $\chi_i \in \partial\varphi_i,$

в) $l_s(t)\ (\in)\ \partial\Phi_s[e(t)].$

Из 1а), 2а) следует, что $\beta_0\chi_0(p-p^0) \leqq \beta_0 J(p) - \beta_0 J(p^0)$ при всех $p \in \mathbf{R}^{d(p)}$. Поэтому $\beta_0\chi_0 \in \partial\beta_0 J(p^0)$. Следовательно, если $\beta_0 \neq 0$, то $\chi_0 \in \partial J(p^0)$. Если же $\beta_0 = 0$, то ни одно из условий 7.2 не нарушается, если мы заменим χ_0 на элемент из $\partial J(p^0)$. Итак, в условиях принадлежности 7.2б) можно считать, что $\chi_0 \in \partial J(p^0)$.

И далее, из условий 1б), 2б) следует, что $\beta_i\chi_i(p-p^0) \leqq \beta_i\varphi_i(p)$. А так как $\beta_i\varphi_i(p^0) \leqq 0$, то при всех $p \in \mathbf{R}^{d(p)}$ будет $\beta_i\chi_i(p-p^0) \leqq \beta_i\varphi_i(p) - \beta_i\varphi_i(p^0)$. Поэтому $\beta_i\varkappa_i \in \partial\beta_i\varphi_i(p^0)$. Следовательно, если $\beta_i > 0$, то $\chi_i \in \partial\varphi_i(p^0)$. Если же $\beta_i = 0$, то ни одно из условий 7.2 не нарушится при замене χ_i на элемент субградиента $\partial\varphi_i(p^0)$. Итак в условиях принадлежности 7.2б) можно считать, что $\chi_0 \in \partial J(p^0)$, $\chi_i \in \partial\varphi_i(p^0)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что в 7.2б) всегда можно считать, что $l_s(t)\ (\in)\ \partial\Phi_s\big(x^0(t), u_1{}^0(t), e(t)\big)$. Согласно формулам 7.2 выполняется $\beta_i\varphi_i(p^0) = 0$, $b_s(t)\ \Phi_s\big(x^0(t), u_1{}^0(t), e(t)\big)\ (=)\ 0$. Таким образом, для принципа максимума π выполнены условия дополняющей нежесткости 7.10е). В силу формулы 7.9 для строки π выполняется условие 7.10д).

Остается показать, что мера $d\nu$, содержащаяся в строке π, допускает представление

$$\int x\,d\nu = \int \Big(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)\, x\, d\bar\sigma, \quad \bar\sigma\ \|\Theta[u_1{}^0, x^0],\quad d\bar\sigma \geqq 0,\quad \|\bar\sigma\| = \|\sigma\|.$$

Положим

$$\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0] = \big\{(\alpha_s, l_s, m, e, v_1, t) \in \Theta[u_1{}^0]\colon \alpha_s\big(l_s(x^0(t), v_1) + n(l_s, \Phi_s[e])\big) = 0\big\}.$$

В силу условия 7.2е^0) множество $\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$ имеет полную меру на $\Theta[u_1{}^0]$. Установим компактность $\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$. Поскольку $\Theta[u_1{}^0]$ компакт, то для этого достаточно доказать замкнутость $\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$. Пусть $(\alpha_s{}^n, l_s{}^n, m^n, e^n, v_1{}^n, t^n) \to (\bar\alpha_s, \bar l_s, \bar m, \bar e, \bar v_1, \bar t)$ и $(\alpha_s{}^n, l_s{}^n, m^n, e^n, v_1{}^n, t^n) \in \mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$ для всех n. Ясно, что $(\bar\alpha_s, \bar l_s, \bar m, \bar e, \bar v_1, \bar t) \in \Theta[u_1{}^0]$. Убедимся в выполнении равенства $\bar\alpha_s\big(\bar l_s(x^0(\bar t), \bar v_1) + n(\bar l, \Phi_s[\bar e])\big) = 0$. Если $\bar\alpha_s = 0$, то это очевидно. Пусть $\bar\alpha_s > 0$. Тогда для всех достаточно больших n имеем

3. $\quad l_s{}^n\big(x^0(t^n), v_1{}^n\big) + n\big(l_s{}^n, \Phi_s[e^n]\big) = 0.$

Поскольку $l_s{}^n \in \partial\Phi_s[e^n]$ и $\Phi_s\big(x^0(t^n), v_1{}^n, e^n\big) \leqq 0$, то из 3. следует, что

4. $\quad l_s{}^n \in \partial\Phi_s\big(x^0(t^n), v_1{}^n, e^n\big)$ и $\Phi_s\big(x^0(t^n), v^n, e^n\big) = 0.$

В силу непрерывности функции x^0 из этого вытекает $\bar l_s \in \partial\Phi_s\big(x^0(\bar t), \bar v_1, \bar e\big)$ и $\Phi_s\big(x^0(\bar t), \bar v_1, \bar e\big) = 0$. Таким образом $\bar l_s\big(x^0(\bar t), \bar v_1\big) + n(\bar l_s, \Phi_s[\bar e]) = 0$. Замкнутость множества $\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$ доказана.

Выше показано, что $\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$ имеет полную $\sigma_{u_1{}^0}$ — меру на $\Theta[u_1{}^0]$. Поэтому

5. $$\int x\,d\nu = \int \Big(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)\, x\, d\sigma = \int \Big(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)\, x\, d\sigma_{u_1{}^0}$$
$$\leqq \max_{\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]} \Big(\sum_{s\leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)\, x(t).$$

Убедимся, что максимум достигается и на $\Theta[u_1{}^0, x^0]$. Действительно, пусть $(\bar\alpha_s, \bar l_s, \bar m, \bar u_1, \bar e, \bar t)$ точка $\mathring{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$, в которой функция $\big(\sum \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\big)\, x(t)$ достигает наибольшего значения. Покажем, что изменением некоторых из l_s, можно прийти к точке $\Theta[u_1{}^0, x^0]$, в которой рассматриваемая функция принимает прежнее значение. Разобьем множество индексов $s \leqq d(\Phi)$ на два подмножества $I_0 = \{s\colon \bar\alpha_s = 0\}$ и $I_+ = \{s\colon \bar\alpha_s > 0\}$. Если $s' \in I_0$, то величина функции $\big(\sum \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\big)\, x^0(t)$ не изменится при замене $\bar l_{s'}$ некоторым элементом из $\partial\Phi_{s'}\big(x^0(\bar t), \bar v_1, \bar e\big)$. Таким образом можно считать, что $l_{s'} \in \partial\Phi_{s'}\big(x^0(\bar t), \bar v_1, \bar e\big)$ для всех $s' \in I_0$. Ясно, что для этих s' будет $\bar{\alpha}_{s'}\Phi_{s'}(x^0(\bar{t}), \bar{v}_1, \bar{e}) = 0$. Если же $s' \in I_+$, то из определения множества I_+ следует, что $\bar{l}_{s'}(x^0(\bar{t}), \bar{v}_1) + n(\bar{l}_{s'}, \Phi_{s'}[\bar{e}]) = 0$, $\Phi_{s'}(x^0(\bar{t}), \bar{v}_1, \bar{e}) \leqq 0$. Так как $\bar{l}_{s'} \in \partial\Phi_{s'}[\bar{e}]$, то отсюда вытекает $\Phi_{s'}(x^0(\bar{t}), \bar{v}_1, \bar{e}) = 0$. Итак доказано, что максимум функции $\left(\sum \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\right) x(t)$ по компекту $\dot{\Theta}[u_1{}^0, x^0]$ не превосходит ее максимума по $\Theta[u_1{}^0, x^0]$. Поэтому из 5. следует неравенство

6. $$\int x\, d\nu \leqq \max_{\Theta[u_1{}^0, x^0]} \left(\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\right) x(t).$$

Известно, что каждый линейный функционал пространства $C_{\Theta[u_1{}^0, x^0]}$, опорный к сублинейному функционалу $\|\sigma\| \max_{\Theta[u_1{}^0, x^0]} f(\cdot)$, задается мерой Радона $\bar{\sigma} \parallel \Theta[u_1{}^0, x^0]$, $d\bar{\sigma} \geqq 0$, $\|\bar{\sigma}\| = \|\sigma\|$. Поэтому в силу теоремы о композиции функционал $\int x\, d\nu$ допускает представление

$$\int x\, d\nu = \int \left(\sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\right) x\, d\bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} \parallel \Theta[u_1{}^0, x^0], \quad d\bar{\sigma} \geqq 0, \quad \|\bar{\sigma}\| = \|\sigma\|.$$

Строка $\bar{\pi} = (c, \beta_0, \beta_i, \chi_0, \chi_i, b_s, l_s, m, \psi, \bar{\sigma})$ удовлетворяет условиям **7.10** и, следовательно, является принципом максимума экстремали (x^0, u^0). Тем самым необходимость доказана.

На самом деле мы установили большее. А именно показали, что каждый принцип максимума значения $J_0 = J(p^0)$ функционала J пересчитывается в некоторый принцип максимума экстремалм (x^0, u^0). При этом компоненты $c, \beta_0, \beta_i, \chi_0, \chi_i, b_s, l_s, m, \psi$ остаются прежними. Этот пересчет неоднозначен поскольку мера $\bar{\sigma}$ определяется, вообще говоря, по мере σ неоднозначно.

Достаточность: Пусть (x^0, u^0) траектория, допустимая ограничениями **1.1**, **1.2**, **3.9** и удовлетворяющая принципу максимума **7.10**: То есть существует строка $\bar{\pi} = (c, \beta_0, \beta_i, \chi_0, \chi_i, b_s, l_s, m, \psi, \bar{\sigma})$. Убедимся, что $J_0 = J(p^0)$ является экстремальным значением функционала J. Введем функцию $m_0(t) = \psi(t) A_2(e(t))\, u_2{}^0(t)$ и меру Радона $\sigma \parallel \Theta$, являюпцуюся сужением на Θ меры Радона $\bar{\sigma}$. Тогда $d\sigma \geqq 0$. Ясно, что $m_0 \in L^1_{\infty, \Delta}$ и для всех функций из C_Θ имеем $\int f(\vartheta)\, d\sigma = \int f(\vartheta)\, d\bar{\sigma}$. Отсюда следует, что $\|\sigma\| = \|\bar{\sigma}\|$, и для всех борелевских функций, ограниченных на Θ, будет также $\int f(\vartheta)\, d\sigma = \int f(\vartheta)\, d\bar{\sigma}$.

Убедимся, что $\pi = (c, \beta_0, \beta_i, \chi_0, \chi_i, b_s, l_s, m, m_0, \sigma, \psi)$ является принципом максимума значения J_0 функционала J. Сравнивая определения **7.10** и **7.2** замечаем, что нам достаточно проверить выполнение условий **7.2д)** и **7.2е^{00})**. Согласно **7.10д)** имеем $\psi(t)\, A_2(e(t)) \left(u_2{}^0(t) - u_2(t)\right) (\geqq)\, 0$ для всех $u_2 \in \Xi$. Следовательно строка π удовлетворяет условию **7.2д)**. Проверим теперь выполнение условий **7.2е^{00})**. Из определения J_0 и условий принадлежности **7.10б)** следует, что $J(p) - J_0 \geqq \varkappa_0(p - p^0)$. Иоэтому $n(\chi_0, J) = J_0 - \chi_0 p^0$. Следовательно $n(\varkappa_0, J) + \varkappa_0 p^0 - J_0 = 0$. Таким образом имеем

7. $$\beta_0\left(\chi_0 p^0 + n(\chi_0, J) - J_0\right) = 0.$$

Покажем, что

8. $$\beta_i\left(\chi_i p^0 + n(\chi_i, \varphi_i)\right) = 0.$$

Если $\beta_i = 0$, то это очевидно выполняется. Если же $\beta_i > 0$, то из увловий **7.10б), д)** вытекает, что $\varphi_i(p^0) = 0$ и $\varphi_i(p) \geqq \chi_i(p - p^0)$ для всех $p \in \mathbf{R}^{d(p)}$. Поэтому $n(\chi_i, \varphi_i) = -\chi_i p^0$. Следовательно $n(\chi_i, \varphi_i) + \chi_i p^0 = 0$. Этим справедливость 8. доказана. Аналогично устанавливается

9. $$b_s(t) \left(l_s(t)\, (x^0(t), u_1{}^0(t)) + n(l_s(t), \Phi_s[e(t)])\right) (=)\, 0.$$

Остается показать, что

10. $\int x^0\,d\nu + \varrho = 0, \qquad \varrho = \int \Big(\sum_{s\le d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e]) + mb_0(e)\Big)\,d\sigma.$

Имеем

$$\int x^0\,d\nu + \varrho = \int \Big\{\Big(\sum_{s\le d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)x^0 + \Big(\sum_{s\le d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e]) + mb_0(e)\Big)\Big\}\,d\sigma.$$

Поскольку подынтегральная функция справа является ограниченной и борелевской на Θ, то

11. $$\int x^0\,d\nu + \varrho = \int_{\Theta[u_1^0, x^0]} \Big\{\Big(\sum_{s\le d(\Phi)} \alpha_s l_{sx} + mB_0(e)\Big)x^0 + \Big(\sum_{s\le d(\Phi)} \alpha_s n(l_s, \Phi_s[e]) + mb_0(e)\Big)\Big\}\,d\bar\sigma.$$

На $\Theta[u_1^0, x^0]$ имеем $\sum \alpha_s l_{su_1} + mB_1(e) = 0$ и $B_0(e)\,x^0(t) + B_1(e)\,v_1 + b_0(e) = 0$. Поэтому 11. можно преобразовать к виду

12. $\int x^0\,d\nu + \varrho = \int \Big(\sum_{s\le d(\Phi)} \alpha_s\big(l_s(x^0(t), v_1) + n(l_s, \Phi_s[e])\big)\Big)\,d\bar\sigma.$

Покажем, что $\alpha_s\big(l_s(x^0(t), v_1) + n(l_s, \Phi_s[e])\big) = 0$ в каждой точке $\Theta[u_1^0, x^0]$. Действительно, обозначим через I_0 совокупность всех индексов s, для которых $\alpha_s = 0$, а через I_+ — тех индексов s, для которых $\alpha_s > 0$. Для $s \in I_0$ наше утверждение очевидно. Пусть $s \in I_+$. Согласно определению множества $\Theta[u_1^0, x^0]$ имеем $l_s \in \partial\Phi_s\big(x^0(t), v_1, e\big)$ и $\Phi_s\big(x^0(t), v_1, e\big) = 0$. Поэтому $n(l_s, \Phi_s[e]) = -l_s\big(x^0(t), v_1\big)$. Следовательно $\alpha_s[n(l_s, \Phi_s[e]) + l_s\big(x^0(t), v_1\big) = 0$. Итак показано, что функция, содержащаяся в правой части в 12., обращается в нуль всюду на $\Theta[u_1^0, x^0]$. Следовательно $\int x^0\,d\nu + \varrho = 0$. Таким образом строка π удовлетворяет всем условиям 7.2 ∎.

Принцип максимума 7.10 экстремали (x^0, u^0) совпадает с принципом максимума, полученным в [6]. Подчеркнем, однако, что из [6] следует существование принципа максимума не для любой экстремали (x^0, u^0), а лишь для такой, у которой u_2^0 является выборкой из $\mathbf{Z}(t)$.

Следствие: *Если задача* **A** *обладает экстремалью* (x^0, u^0), *то есть траекторией, допустимой ограничениями* **1.1, 1.2, 3.9**, *для которой* $J_0 = J(p^0)$ *является экстремальным значением функционала* J, *то при выводе принципа максимума этой экстремали (или значения* J_0) *можно отказаться от предположения* **1.4г)**.

Доказательство: Пусть (x^0, u^0) экстремаль задачи **A**. Положим $\mathbf{D} = \|x^0\|_{L^{d(x)}_{\infty,\Delta}} + \|u^0\|_{L^{d(u_1)}_{\infty,\Delta}} + 1$. Рассмотрим задачу $\bar{\mathbf{A}}$, полученную из $\bar{\mathbf{A}}$ заменой функций Φ_s на функцию

$$\bar\Phi_s(\xi, v_1, e) = \max_{\substack{(\xi^*, v_1^*)\in 0_{\mathbf{D}} \\ l_s\in\partial\Phi_s(\xi^*, v_1^*, e)}} \{l_s(\xi - \xi^*, v_1 - v_1^*) + \Phi_s(\xi^*, v_1^*; e)\}$$

и прибавлением ограничения $\bar\Phi_0(\xi, v_1, e) \leqq 0$, $\bar\Phi_0(\xi, v_1, e) = |\xi| + |v_1| - \mathbf{D}$. Нетрудно убедиться, что в этих формулах max достигается и функции $\bar\Phi_s(\xi, v_1, e)$

при $(\xi, v_1) \in O_D$ совпадают с функциями $\Phi_s(\xi; v_1, e)$, $s = 1, \ldots, d(\Phi)$. Ясно, что для функций $\overline{\Phi}_s$ условие **1.4г)** выполняется. Непосредственно усматривается, что (x^0, u^0) является экстремалью задачи $\bar{A}$ и в силу теоремы 7.6 обладает принципом максимума. В силу условий дополняющей нежесткости из неравенства $\overline{\Phi}_0(x^0(t), u_1{}^0(t), e(t))\ (\leqq) -1$ следует, что $b_0(t)\ (=)\ 0$. Из этого же неравенства вытекает, что множество

$$\Theta[u_1{}^0, x^0] = \Big\{(\alpha_s, l_s, m, e, v_1, t) : t \in \Delta, \quad \alpha_s \geqq 0, \sum_{s \leqq d(\Phi)} \alpha_s = 1,$$

$$\sum_{0 \leqq s \leqq d(\Phi)} \alpha_s l_{sv_1} + m B_1(e) = 0,$$

$$(v_1, e) \in \overline{(u_1{}^0, e)}\,(t),\ l_s \in \partial\overline{\Phi}_s(x^0(t), v_1, e), \alpha_s \overline{\Phi}_s(x^0(t), v_1, e) = 0\Big\}$$

состоит из точек, у которых $\alpha_0 = 0$, $l_s \in \partial\Phi_s(x^0(t), v_1, e)$, $\alpha_s\Phi_s(x^0(t), v_1, e) = 0$. Следовательно, экстремаль (x^0, u^0) обладает принципом максимума **7.10** в исходной задаче **A** ∎

Это следствие можно сформулировать в следующей форме:

Если J_0 экстремальное значение функциобала J и среди последовательностей, содержащихся в $\tau(J_0)$, найдется хотя бы одна ограниченная в метрике $L^{d(x)+d(u_1)}_{\infty,\Delta}$, то при выводе принципа максимума этого значения функционала J можно отказаться от требования **1.4г)**.

Действительно, из линейности ограничений равенства и слабой замкнутости Ξ следует, что в рассматриваемом случае существует экстремаль (x^0, u^0), на которой функционал принимает значение J_0. Следовательно существует принцип максимума π экстремали, который можно пересчитать в принцип максимума значения J_0 функционала J ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитин, Е. С., Милютин, А. А., и Н. П. Осмоловский: Условия высших порядков локального мниимума в задачах с ограничениями. Успехи мат. наук **33** (1978) 6, 85—148.

[2] Дубовицкий, А. Я., и А. А. Милютин: Необходимые условия слабого экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями. Препринт. Черноголовка: Ин-т химич. Физики Акад. Наук СССР 1976.

[3] Ляпунов, А. А.: О вполне аддитивных вектор-функциях I. Изв. Алад. Наук СССР, Сер. мат. **5** (1940), 465—478.

[4] Дубовицкий, А. Я., и А. А. Милютин: Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства. Ж. выч. мат. и мат. физики **8** (1968), 725—779.

[5] Дубовицкий, А. Я., и А. А. Милютин: Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. выч. мат. и мат. физики **5** (1965), 395—453.

[6] Дубовицкий, А. Я., и А. А. Милютин: Теория принципа максимума. В. сб.: Методы экстремальных задач в экономике. Москва: Изд-во Наука 1981.

[7] Дубовицкий, А. А., и Я. А. Милютин: Принцип максимума для задач оптимального управления со смешанными ограничениями равенства и неравенства в классе вариаций, малых по абсолютной величине. Докл. Акад. Наук. СССР **189** (1969), 1567—1571.

[8] Дубовицкий, А. Я., и А. А. Милютин: Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. Москва: Изд-во Наука 1971.
[9] Дмитрук, А. В.: К обоснованию метода, скользящих режимов для задач оптимального управления со смешанными ограничениями. Функц. анализ. 10 (1976) 3, 39—40.

Manuskripteingang: 8. 12. 1983

VERFASSER:

Проф. д-р Абраам Яковлевич Дубовицкий и Проф. д-р Алексей Алексеевич Милютин
СССР-142432 Московская область, Ночинск п/о Черноголовка Институт Химической Физики АН СССР, Математический отдел