Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (3) 1985, S. 201–205

Über die Struktur maximaler Ideale in LMC*-Algebren

M. Fritzsche

Es wird für die einfachsten Beispiele nichtkommutativer LMC*-Algebren die Struktur der dichten maximalen Linksideale vollständig beschrieben. Ferner wird gezeigt, daß die Zuordnung „dichte maximale Linksideale → extremale Zustände des beschränkten Teils, die sich nicht stetig auf die ganze Algebra fortsetzen lassen" zwar eindeutig, aber im Gegensatz zum kommutativen Fall nicht eineindeutig ist.

Описывается структура плотных максимальных левых идеалов для простейших примеров некоммутативных LMC*-алгебр. Далее доказывается, что соответствие „плотные максимальные левые идеалы → состояния ограниченной части алгебры, не имеющиеся непрерывного продолжения на всю алгебру" хотя однозначно, но в противоположность коммутативному случаю не взаимнооднозначно.

We describe the structure of dense maximal left ideals for the simplest non-commutative LMC*-algebras. Further we show, for these examples, that the correspondence "dense maximal left ideals → extremal states of the bounded part of the algebra, not extendable to continuous states of the whole algebra" is not one-to-one as in the commutative case.

Diese Note ist eine Ergänzung zu [4]. Dort wurde gezeigt, daß in LMC*-Algebren aus der Existenz unbeschränkter Elemente die Existenz dichter Ideale folgt. Offen blieb die Frage nach der Struktur der dichten maximalen Ideale und nach ihrem Zusammenhang mit maximalen Idealen des beschränkten Teils der Algebra für den nichtkommutativen Fall. Wir beantworten diese Frage für die einfachsten Beispiele nichtkommutativer LMC*-Algebren, für Algebren matrixwertiger Folgen.

Zunächst geben wir die Definition einer LMC*-Algebra. Die wesentlichen Eigenschaften dieser eng mit C*-Algebren „verwandten" Objekte findet man in [6].

Definition: Eine LMC*-*Algebra* ist eine vollständige lokal-konvexe*-Algebra $\mathcal{A}[\tau]$ mit Einselement e, deren Topologie τ durch ein System Γ^τ von Halbnormen p mit folgenden Eigenschaften gegeben werden kann:

(i) $p(xy) \leq p(x)\,p(y)$ und
(ii) $p(x^*x) = p(x)^2$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}_b = \left\{x \in \mathcal{A} \mid \sup_{p\in\Gamma^\tau} p(x) < \infty\right\}$ heißt *beschränkter Teil von* $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_b$ ist τ-dicht in $\mathcal{A}$ und mit der Norm $\|x\| = \sup_{p\in\Gamma^\tau} p(x)$ eine C^*-Algebra [6].

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{B}$ eine lokalkonvexe Algebra mit stetigem Inversen, $C(X, \mathcal{B})$ bezeichne die Algebra aller stetigen $\mathcal{B}$-wertigen Funktionen auf X mit punktweise erklärten algebraischen Operationen und der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X, $C_b(X, \mathcal{B})$ sei die Unteralgebra aller beschränkten Funktionen aus $C(X, \mathcal{B})$ und $C_c(X, \mathcal{B})$ die Unteralgebra aller Funktionen mit relativ-kompaktem Wertebereich, beide versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf X.

In [1] findet man Resultate zur Beschreibung abgeschlossener (insbesondere maximaler abgeschlossener) Ideale in $C(X, \mathcal{B})$ bzw. $C_c(X, \mathcal{B})$ und in gewissen Unteralgebren. Wir benutzen daraus den folgenden

Satz 1 [1]: *Sei X ein vollständig-regulärer T_1-Raum, $\mathcal{B}$ eine lokalkonvexe Algebra mit stetigem Inversen. Dann bestimmt jedes maximale abgeschlossene Linksideal $\mathcal{M}$ in $C_c(X, \mathcal{B})$ eindeutig ein $x \in \beta X$ und ein maximales abgeschlossenes Linksideal M in $\mathcal{B}$, so daß*

$$\mathcal{M} = \{f \in C_c(X, \mathcal{B}) \mid f^\beta(x) \in M\}$$

ist. Dabei bezeichnet βX die Stone-Čech-Kompaktifikation von X und f^β die stetige Fortsetzung von $f \in C_c(X, \mathcal{B})$ auf βX.

N bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen versehen mit der diskreten Topologie, M_n die C*-Algebra aller komplexwertigen $n \times n$-Matrizen mit der Operatornorm $\|\cdot\|$. Wir betrachten die Algebra $C(\mathrm{N}, M_n)$. Ihre Topologie wird gegeben durch Halbnormen der Form

$$p_F(\{a_i\}_{i\in \mathrm{N}}) = \max_{i \in F} \|a_i\|,$$

wobei F alle endlichen Teilmengen von N durchläuft. Damit ist $C(\mathrm{N}, M_n)$ eine LMC*-Algebra. ($C(\mathrm{N}, M_n)$ ist natürlich nichts anderes als das topologische Produkt von abzählbar vielen Exemplaren M_n.) Da M_n endlich-dimensional ist, hat man $C_b(\mathrm{N}, M_n) = C_c(\mathrm{N}, M_n)$. Dies ist gerade der beschränkte Teil von $C(\mathrm{N}, M_n)$.

$Z(M_n)$ bezeichne den Zustandsraum der Algebra M_n, ex $Z(M_n)$ die Menge der extremalen Zustände. Die Zustände auf M_n haben bekanntlich die Form $\omega(a) = \mathrm{Spur}\,(ta)$, wobei t eine positive $n \times n$-Matrix mit Spur 1 ist. Diese Zuordnung liefert einen affinen Isomorphismus des Zustandsraumes $Z(M_n)$ auf die Menge solcher Matrizen, die sich als konvexer Körper im $\mathbf{R}^{n^2-1}$ auffassen läßt. So wird z. B. jeder Zustand $\omega \in Z(M_2)$ durch eine positive 2×2-Matrix

$$t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \xi & \eta + i\zeta \\ \eta - i\zeta & \frac{1}{2} - \xi \end{pmatrix},$$

gegeben, wobei Det $(t) \geqq 0$ äquivalent $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq \frac{1}{4}$ ist. Also läßt sich $Z(M_2)$ als Kugel im $\mathbf{R}^3$ auffassen.

Die in [5] beschriebene eineindeutige Korrespondenz zwischen normabgeschlossenen Linksidealen einer C*-Algebra und w*-abgeschlossenen Extremalmengen ihres Zustandsraumes liefert für die Algebren M_n folgendes

Lemma (s. z. B. [2: S. 103]): *Die Extremalmengen von $Z(M_n)$ sind affin isomorph zu Zustandsräumen $Z(M_k)$ für $k = 1, \ldots, n-1$. Mithin hat $Z(M_n)$ echte Extremalmengen der Dimensionen $k^2 - 1$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und keine anderen.*

Es sei noch daran erinnert, daß die maximalen (damit automatisch abgeschlossenen) Linksideale einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ gerade die Linkskerne extremaler Zustände von $\mathcal{A}$ sind, d. h., sie haben die Form $\{a \in \mathcal{A} \mid \sigma(a^*a) = 0\}$ mit $\sigma \in \mathrm{ex}\, Z(\mathcal{A})$.

Kehren wir zurück zur Algebra $C(\mathrm{N}, M_n)$. Für diesen Fall besagt Satz 1, daß ein maximales Linksideal $\mathcal{M}$ in $C_b(\mathrm{N}, M_n)$ durch einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ in N und ein

$\sigma \in \operatorname{ex} Z(M_n)$ charakterisiert ist:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{F},\sigma},$$

wobei das Ideal $\mathcal{M}_{\mathcal{F},\sigma}$ genau aus denjenigen Elementen $\{a_i\}_{i\in N} \in C_b(N, M_n)$ besteht, für die zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $F \in \mathcal{F}$ mit $\sigma(a_i{}^*a_i) < \varepsilon$ für alle $i \in F$ existiert. Wir erinnern daran, daß ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ in einer Grundmenge X *trivial* heißt, wenn es ein $x \in X$ gibt, so daß $\mathcal{F}$ aus allen Teilmengen F von X mit $x \in F$ besteht. Anderenfalls heißt ein Ultrafilter *frei*. Zu den trivialen Ultrafiltern korrespondieren die abgeschlossenen maximalen Linksideale in $C(N, M_n)$ — sie haben die Form

$$\mathcal{J}_{k,\sigma} = \left\{\{a_i\}_{i\in N} \in C(N, M_n) \mid \sigma(a_k{}^*a_k) = 0\right\},$$

wobei $k \in N$ und $\sigma \in \operatorname{ex} Z(M_n)$ ist [3].

Satz 2: *Sei $\mathcal{F}$ ein freier Ultrafilter in N, $\varphi: i \to \sigma_i$ eine Abbildung von N in $\operatorname{ex} Z(M_n)$. Dann ist*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F},\varphi} := \left\{\{a_i\}_{i\in N} \mid \exists F \in \mathcal{F} \quad mit \quad \sigma_i(a_i{}^*a_i) = 0 \ \forall i \in F\right\}$$

ein dichtes maximales Linksideal in $C(N, M_n)$.

Der einfache Beweis wurde in [3] für einen etwas allgemeineren Fall gegeben.

Bemerkung: Es genügt, φ auf einer Teilmenge $F_0 \in \mathcal{F}$ vorzugeben.

Satz 3: *Dem Ideal $\mathcal{J}_{\mathcal{F},\varphi}$ ist eindeutig ein maximales Linksideal in $C_b(N, M_n)$ zugeordnet.*

Beweis: Die Abbildung $\varphi: i \to \sigma_i$ von N in den kompakten Raum $\operatorname{ex} Z(M_n)$ ist stetig. Nach dem Satz von Stone-Čech existiert eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von φ auf βN, also $\varphi^\beta(\mathcal{F}) = \sigma \in \operatorname{ex} Z(M_n)$. Das eindeutig zugeordnete maximale Linksideal des beschränkten Teils ist mithin $\mathcal{M}_{\mathcal{F},\sigma}$ ∎

Folgerung: Satz 2 und Satz 3 zeigen, daß im betrachteten Fall die Zuordnung „maximale dichte Linksideale $\mathcal{J}_{\mathcal{F},\varphi} \to$ maximale Linksideale $\mathcal{M}_{\mathcal{F},\sigma}$ des beschränkten Teils" nicht eineindeutig ist: zu gleichem freien Ultrafilter $\mathcal{F}$ wird jedem Ideal $\mathcal{J}_{\mathcal{F},\varphi}$ mit $\lim\limits_{\mathcal{F}} \varphi(i) = \sigma$ das gleiche Ideal $\mathcal{M}_{\mathcal{F},\sigma}$ zugeordnet. Zwei Ideale $\mathcal{J}_{\mathcal{F},\varphi}$ und $\mathcal{J}_{\mathcal{F},\psi}$ sind genau dann gleich, wenn es eine Menge $F \in \mathcal{F}$ gibt, so daß $\varphi(i) = \psi(i)$ für alle $i \in F$ ist. In diesem Falle nennen wir die Abbildungen φ und ψ bez. $\mathcal{F}$ *äquivalent*. Die Struktur der Zustandsräume $Z(M_n)$ sichert die Existenz nichtstationärer konvergenter Folgen extremaler Zustände und damit die Existenz nicht äquivalenter Abbildungen φ, ψ mit $\lim\limits_{\mathcal{F}} \varphi(i) = \lim\limits_{\mathcal{F}} \psi(i)$. Als Beispiel halte man sich den als Kugel im $\mathbf{R}^3$ realisierten Zustandsraum $Z(M_2)$ vor Augen und betrachte Folgen extremaler Zustände, die längs verschiedener Großkreise gegen den gleichen extremalen Zustand konvergieren.

Wir zeigen schließlich, daß sich dank der einfachen Struktur des Zustandsraumes $Z(M_n)$ die maximalen dichten Linksideale in $C(N, M_n)$ vollständig charakterisieren lassen.

Satz 4: *Jedes maximale dichte Linksideal in $C(N, M_n)$ hat die im Satz 2 beschriebene Struktur.*

Beweis: Sei $\mathcal{J}$ ein maximales dichtes Linksideal in $C(N, M_n)$. Für $x \in C(N, M_n)$ und $k \in N$ definiert man

$$S_k(x) := \{\sigma \in Z(M_n) \mid \sigma(x_k{}^*x_k) = 0\}.$$

Das ist diejenige Extremalmenge von $Z(M_n)$, die dem von x_k in M_n erzeugtem Linksideal zugeordnet ist. Für $F(x) := \{k \in \mathrm{N} \mid S_k(x) \neq \Phi\}$ ist dann $\mathcal{F} = \{F(x) \mid x \in \mathcal{J}\}$ ein freier Ultrafilter in N (der einfache Beweis dazu wurde in [3] für eine etwas allgemeinere Situation gegeben). Setzt man $F_l(x) := \{k \in \mathrm{N} \mid \dim S_k(x) = l^2 - 1\}$, so führt das zu $F(x) = \bigcup_{l=1}^{n} F_l(x)$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gehört für jedes $x \in \mathcal{J}$ genau eine der Mengen $F_l(x)$ zu $\mathcal{F}$.

Wir zeigen nun die Existenz eines $y \in \mathcal{J}$, so daß $F_1(y) \in \mathcal{F}$ ist. Dazu setzen wir

$$l_0 = \min_{x \in \mathcal{J}} \{l \mid F_l(x) \in \mathcal{F}\} \tag{1}$$

und wählen ein $y \in \mathcal{J}$ mit $F_{l_0}(y) = \{k \in \mathrm{N} \mid \dim S_k(y) = l_0^2 - 1\} \in \mathcal{F}$. Für jedes $x \in \mathcal{J}$ ist

$$G(x) := \{k \in F_{l_0}(y) \mid S_k(x) \supseteq S_k(y)\} \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

Anderenfalls wäre $F_{l_0}(y) \setminus G(x) \in \mathcal{F}$ und damit für $x^*x + y^*y \in \mathcal{J}$ und alle $k \in F_{l_0}(y) \setminus G(x)$ auch

$$\dim S_k(x^*x + y^*y) = \dim \big(S_k(x) \cap S_k(y)\big) < l_0^2 - 1\,,$$

gäbe es also ein $l' < l_0$ mit $F_{l'}(x^*x + y^*y) \in \mathcal{F}$ im Widerspruch zu (1). Die Annahme $l_0 > 1$ liefert einen Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{J}$. Um dies einzusehen, fixiert man für $k \in F_{l_0}(y)$ jeweils ein $\sigma_k \in \operatorname{ex} Z(M_n) \cap S_k(y)$ und betrachtet

$$\mathcal{Y} = \{x \in C(\mathrm{N}, M_n) \mid \exists F \in \mathcal{F} \quad \text{mit} \quad \sigma_k(x_k^*x_k) = 0 \;\forall k \in F\}.$$

Mit (2) folgt $\mathcal{J} \subsetneqq \mathcal{Y} \subsetneqq C(\mathrm{N}, M_n)$. Also ist $l_0 = 1$. Die das Ideal charakterisierende Abbildung φ ist damit auf $F_{l_0}(y) \in \mathcal{F}$ festgelegt: $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathcal{F},\varphi}$ ∎

S c h l u ß b e m e r k u n g e n: 1. Die Aussagen der Sätze 2 bis 4 lassen sich analog für die Algebren $C(X, M_n)$ (X ein vollständig-regulärer T_1-Raum) formulieren und beiweisen.

2. Wesentlich für den Beweisgang war die einfache Struktur des Zustandsraumes $Z(M_n)$, weshalb die Übertragung der Beweisgedanken auf den Fall $C(\mathrm{N}, \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ eine beliebige C*-Algebra mit Identität ist, nicht möglich ist.

3. Einige Resultate über den Zusammenhang zwischen der Idealstruktur einer beliebigen LMC*-Algebra und der „geometrischen" Struktur ihres Zustandsraumes und über ihre Beziehungen zu den entsprechenden Objekten des beschränkten Teils stützen die Vermutung, daß auch im allgemeinen Fall eine eindeutige Zuordnung der maximalen dichten Ideale der Algebra zu maximalen Idealen des beschränkten Teils besteht. Der Beweis steht jedoch noch aus.

LITERATUR

[1] Абель, М. А.: Описание замкнутых идеалов в алгебрах непрерывных векторнозначных функций. Мат. заметки 30 (1981), 775—785.

[2] ALFSEN, E. M., and F. W. SHULTZ: Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets. Mem. Amer. Math. Soc. 172 (1976).

[3] FRITZSCHE, M.: Zur Idealtheorie topologischer *-Algebren. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Univ. 1978.

[4] FRITZSCHE, M.: On the existence of dense ideals in LMC*-algebras. Z. Anal. Anw. 1 (1982) 3, 81–84.
[5] PROSSER, R. T.: On the ideal structure of operator algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 45 (1963).
[6] SCHMÜDGEN, K.: Über LMC*-Algebren. Math. Nachr. 68 (1975), 167–181.

Manuskripteingang: 20. 07. 1983

VERFASSER:

Dr. MARLEN FRITZSCHE
Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht“
DDR-1500 Potsdam, Am Neuen Palais