Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (3) 1985, S. 215–224

Das Poincarésche Randsteuerproblem bei elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

D. Oestreich

Es wird das Poincarésche Randsteuerproblem bei elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sowie ein kombiniertes Riemann-Hilbertsches Steuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen betrachtet, wobei die Steuerung nicht linear in die Koeffizienten der Randbedingung bzw. auch der Differentialgleichung eingeht. Für diese Probleme werden Existenzsätze bewiesen für den Fall, daß die Kostenfunktionale Integrale darstellen, und daß Nebenbedingungen und Zusatzbedingungen gegeben sind.

Рассматриваются краевая задача управления Пуанкаре эллиптическими дифференциальными уравнениями второго порядка и смешанная задача управления Римана-Гильберта для обобщенно-аналитических функций, причем управление входит не линейно в коэффициенты краевого условия или тоже дифференциального уравнения. Для этих задач доказываются теоремы существования для случая, когда функции стоимости являются интегралами и заданы ограничения и дополнительные условия.

There are considered the Poincaré boundary control problem for elliptic differential equations of second order and a mixed Riemann-Hilbert control problem with generalized analytic functions, where the control occurs non-linearly in the coefficients of the boundary condition or the differential equation too. Existence theorems are proved for these problems with integral cost functions, constraints and additional conditions.

Existenzsätze für optimale Steuerprobleme bei (in komplexer Form geschriebenen) elliptischen Differentialgleichungen wurden bisher von v. Wolfersdorf [12, 13] sowie von C. und Cl. Simionescu [8] aufgestellt. Dabei wurde in der Regel angenommen, daß die Steuerung nur in die Koeffizienten der Differentialgleichung, jedoch nicht in die der Randbedingung eingeht. In einer Arbeit [11] betrachtete v. Wolfersdorf darüber hinaus ein Riemann-Hilbert-Problem, in dem die rechte Seite der Randbedingung linear von der Steuerfunktion abhängt. Daran anknüpfend untersuchte der Autor [5] verschiedene Steuerprobleme, bei denen die Steuerung in allen Koeffizienten der Randbedingung — und zwar im allgemeinen nicht linear — auftritt. Dabei wurden insbesondere Existenzsätze für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem bei analytischen und verallgemeinerten analytischen Funktionen bewiesen. Die Untersuchungen werden in dieser Arbeit für das Poincarésche Randsteuerproblem fortgeführt. Dieses Problem unterscheidet sich von den bisher betrachteten grundlegend dadurch, daß in die Zustandsgleichung nicht nur die Ableitungen der gesuchten Zustandsfunktion eingehen, sondern diese Funktion auch selbst auftritt (bei dem früher untersuchten Problem der Richtungsableitung war $C(x, y) \equiv 0$). Dadurch bedingt lassen sich die Lösungen der entsprechenden Randwertaufgaben hier nicht mehr explizit angeben bzw. sind auch anderweitig keine Aussagen über deren Kompaktheitseigenschaften unmittelbar möglich. Das entsprechende Poincarésche Randwertproblem wird daher in eine Fredholmsche Integralgleichung überführt. Mit Hilfe der von Anselone [1] entwickelten Theorie der kollektiv-kompakten Operatoren läßt sich schließlich der Existenzsatz für das Poincarésche Randsteuerproblem beweisen. Außerdem brauchen wir dazu einen Existenzsatz für ein kombiniertes Riemann-Hilbertsches Steuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen, das eine Verallgemeinerung des in [5] betrachteten Riemann-Hilbertschen Randsteuerproblems darstellt. Dieses kombinierte Steuerproblem besitzt auch selbständiges theoretisches Interesse, da hier die Steuerung nicht linear sowohl in die Koeffizienten der Differentialgleichung als auch der Randbedingung eingeht.

Das kombinierte Riemann-Hilbertsche Steuerproblem gestattet Anwendungen auf einige Fragen der Theorie des momentefreien Spannungszustandes von Schalen ([7] vgl. auch [9, 10]). Das Poincarésche Randsteuerproblem läßt sich prinzipiell auf gewisse Aufgaben der Elastizitätstheorie [4] anwenden.

§ 1. Das kombinierte Riemann-Hilbertsche Steuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen

Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$, das von einer geschlossenen Ljapunow-Kurve Γ berandet wird [9: Kap. IV, § 1].

Problemstellung: Gesucht werden eine Zustandsfunktion $W = W(z)$ und ein Steuervektor $(u, v) \in U \times V$, die die Differentialgleichung

$$\partial_{\bar z} W + A(z, v(z))\, W + B(z, v(z))\, \overline{W} = F(z, v(z)) \quad \text{in } G \tag{1}$$

und die Randbedingung

$$\begin{aligned} &a(t, u(t)) \operatorname{Re} W(t) + b(t, u(t)) \operatorname{Im} W(t) \\ &\equiv \operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(t, u(t))\, W}\right] = c(t, u(t)) \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

erfüllen, den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &M_k^1(z, W(z), v(z)) \leqq 0 \quad \text{für alle } z \in G,\ k \in K_1^1, \\ &M_k^2(t, W(t), u(t)) \leqq 0 \quad \text{für alle } t \in \Gamma,\ k \in K_1^2, \\ &N_k^1 = \iint_G n_k^1(z, W(z), v(z))\, dx\, dy \leqq 0 \quad \text{für alle } k \in K_2^1, \\ &N_k^2 = \int_\Gamma n_k^2(t, W(t), u(t))\, dt \leqq 0 \quad \text{für alle } k \in K_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

genügen und[1]) das Kostenfunktional

$$J = J_1 + J_2 \tag{4}$$

mit

$$J_1 = \iint_G F_1(z, W(z), v(z))\, dx\, dy, \tag{4.1}$$

$$J_2 = \int_\Gamma F_2(t, W(t), u(t))\, dt \tag{4.2}$$

---

[1]) Falls in den Nebenbedingungen oder Kostenfunktionalen Funktionen mit komplexen Argumenten auftreten, verstehen wir darunter stets (reellwertige) Funktionen dieser Argumente und der komplex-konjugierten Werte, also z. B. $M_k^1(z, W(z), v(z)) = M_k^1(\bar z, z, W(z), \overline{W(z)}, v(z), \overline{v(z)})$.

minimieren. Dabei sind A, B, F bzw. a, b, c; M_k^i, n_k^i, F_i $(i = 1, 2)$ vorgegebene komplex- bzw. reellwertige Funktionen und K_i^j $(i, j = 1, 2)$ beliebige Indexmengen.

Wir machen folgende Voraussetzungen:

1. Die Menge der Randsteuerungen U bzw. die Menge der verteilten Steuerungen V sind in $H_\mu(\Gamma)$ bzw. $C_\mu(\bar{G})$, $0 < \mu < 1$,[2]) beschränkt und in $C(\Gamma)$ bzw. $C(\bar{G})$ abgeschlossen mit den Steuerbereichen Ω bzw. Ω', die in $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ abgeschlossene und beschränkte Mengen darstellen.

2. Es gilt $a(t, u), b(t, u), c(t, u) \in H_{\mu,1}(\Gamma \times \Omega)$.

3. M_k^1, n_k^1, F_1 bzw. M_k^2, n_k^2, F_2 sind stetig bezüglich (W, v) bzw. (W, u) für alle $z \in G$ bzw. $t \in \Gamma$ und summierbar bezüglich $z \in G$ bzw. $t \in \Gamma$ für alle (W, v) bzw. (W, u).

4. $A(z, v)$, $B(z, v)$ und $F(z, v)$ sind Funktionen aus $L_p(G)$, $p > 2$ für jedes fixierte $v \in \Omega'$, wobei gilt

$$|A(z, v)| \leqq E_1(z), \quad |B(z, v)| \leqq E_2(z), \quad |F(z, v)| \leqq E_3(z) \quad \text{für alle} \quad v \in \Omega'. \tag{5}$$

Außerdem genügen sie Hölder-Bedingungen in v der Gestalt

$$\begin{aligned} |A(z, v_1) - A(z, v_2)| &\leqq M_1(z)\, |v_1 - v_2|^\mu, \\ |B(z, v_1) - B(z, v_2)| &\leqq M_2(z)\, |v_1 - v_2|^\mu, \\ |F(z, v_1) - F(z, v_2)| &\leqq M_3(z)\, |v_1 - v_2|^\mu \end{aligned} \tag{6}$$

mit $M_i \in L_p(G)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Weiterhin genüge die Koeffizientenfunktion $\lambda = a + ib$ für alle $(t, u) \in \Gamma \times \Omega$ der *Normalitätsbedingung*

$$\lambda(t, u) \neq 0. \tag{7}$$

Wir bezeichnen mit

$$n(u) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \lambda\big(t, u(t)\big)\right]_\Gamma \tag{8}$$

den *Index* des zu $u(\cdot) \in U$ gehörigen Riemann-Hilbertschen Randwertproblems. Falls $n \geqq 0$ ist, stellen wir an die Zustandsfunktion W, um die eindeutige Lösbarkeit des entsprechenden Randwertproblems zu gewährleisten, folgende Zusatzbedingungen (vgl. [5: § 1] bzw. [9: Kap. IV, § 6]):

$$\operatorname{Im} \left[\overline{\lambda\big(t_k, u(t_k)\big)}\, W(t_k)\right] = h_k(u, v), \qquad k = 1, \ldots, 2r + 1, \tag{9.1}$$

wobei $0 \leqq r \leqq n$ eine fest vorgegebene ganze Zahl, t_k $(k = 1, \ldots, 2r + 1)$ fest vorgegebene Punkte auf Γ und h_k vorgegebene reellwertige auf $C(\Gamma, \bar{G})$ stetige Funktionale sind. Im Falle $n > 0$ und $r < n$ gelte weiterhin

$$W(z_l) = g_l(u, v), \qquad l = 1, \ldots, n - r, \tag{9.2}$$

wobei z_l $(l = 1, \ldots, n - r)$ fest vorgegebene Punkte im Innern von G und g_l komplexwertige auf $C(\Gamma, \bar{G})$ stetige Funktionale darstellen.

Satz 1: *Der Index $n = n(u)$ sei konstant für alle $u(\cdot) \in U$. Falls $n \geqq 0$ seien die Zusatzbedingungen* (9) *erfüllt. Dann hat das kombinierte Riemann-Hilbertsche Steuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen unter den Voraussetzungen*

---

[2]) Im weiteren bezeichnen wir reelle Hölderräume mit dem Exponenten μ durch H_μ und komplexe durch C_μ.

1—4, *falls es mindestens eine zulässige Lösung besitzt, (mindestens) eine optimale Lösung* $(u^0, v^0, W^0) \in H_\mu(\Gamma) \times C_\mu(\bar{G}) \times C_\nu(\bar{G})$, $\nu = \min\left(\mu, \frac{p-2}{p}\right)$.

Der Beweis erfolgt nach demselben Prinzip wie in [5: § 2], d. h., das Problem wird auf Grundlage der bekannten (impliziten) Darstellung verallgemeinerter analytischer Funktionen [9: Kap. IV, § 1] auf das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem bei analytischen Funktionen zurückgeführt. Die im vorliegenden Fall hierzu erforderlichen Abschätzungen für die Lösungen des homogenen bzw. inhomogenen Problems (vgl. [5: § 2]) lassen sich aus entsprechenden Eigenschaften der Zustandsfunktionen ([9: S. 127] bzw. [9: Kap. III, § 8]) und Voraussetzung 4 gewinnen.

Anmerkung: Falls keine Nebenbedingungen der Form (3) gegeben sind, kann für $n \geqq 0$ die Forderung, daß das kombinierte Steuerproblem eine zulässige Lösung besitzt, entfallen.

Der obige Existenzsatz läßt sich in leicht modifizierter Form auch für Probleme mit stückweise Hölder-stetigen Koeffizienten auf stückweise Ljapunow-Kurven in der Randbedingung und für zweifach zusammenhängende Gebiete, die von derartigen Kurven berandet werden [5: § 3; 7], sowie für den Fall, daß keine Zusatzbedingungen gegeben sind [6, 7], aufstellen.

§ 2. Das Poincarésche Randsteuerproblem: Problemstellung

Wir wollen annehmen, daß das Gebiet G den Einheitskreis $|z| < 1$ $(z = x + iy)$ und die Berandung Γ den Kreis $|z| = 1$ darstellen.[3]) Das Poincarésche Randsteuerproblem besteht im folgenden:

Gesucht sind eine Zustandsfunktion $w = w(x, y)$, die der Differentialgleichung

$$\Delta w + A(x, y)\, w_x + B(x, y)\, w_y + \alpha C(x, y)\, w = F(x, y), \tag{10}$$

$\left(A, B, C, F \in L_p(G), p > 2\right)$ im Gebiet G genügt, und eine Hölder-stetige Steuerfunktion $u(\cdot) \in U$, die die Randbedingung

$$a\big(t, u(t)\big)\, w_x - b\big(t, u(t)\big)\, w_y + \alpha c\big(t, u(t)\big)\, w = f\big(t, u(t)\big) \quad \text{auf } \Gamma \tag{11}$$

erfüllen, den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &M_k^1(x, y, w, w_x; w_y) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in G,\ k \in K_1^1, \\ &M_k^2(t, w, w_x, w_y, u) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \Gamma,\ k \in K_1^2, \\ &N_k^1 = \iint_G n_k^1(x, y, w, w_x, w_y)\, dx\, dy \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2^1, \\ &N_k^2 = \int_\Gamma n_k^2(t, w, w_x, w_y, u)\, dt \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

genügen und das Kostenfunktional

$$J = J_1 + J_2 \tag{13}$$

---

[3]) Der allgemeinere Fall, wenn $G \in C_\sigma^1$ $(0 < \sigma \leqq 1)$ ist, läßt sich mittels konformer Abbildung stets darauf zurückführen, vgl. [5: § 1].

mit

$$J_1 = \iint\limits_G F_1(x, y, w, w_x, w_y)\, dx\, dy, \tag{13.1}$$

$$J_2 = \int\limits_\Gamma F_2(t, w, w_x, w_y, u)\, dt \tag{13.2}$$

minimieren. Dabei sind a, b, c, f auf Γ vorgegebene reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbf{R}$ ein konstanter Parameter.

Wie üblich bezeichne Ω den Steuerbereich. Die Koeffizientenfunktion $\lambda = a + ib$ erfülle für alle $(t, u) \in \Gamma \times \Omega$ die *Normalitätsbedingung*

$$\lambda(t, u) \neq 0. \tag{14}$$

Es kann angenommen werden, daß $|\lambda(t, u)| = 1$ ist. Mit

$$n(u) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \lambda\big(t, u(t)\big)\right]_\Gamma$$

bezeichnen wir den *Index* des zu $u(\cdot) \in U$ gehörigen Poincaréschen Randwertproblems.

Im weiteren halten wir eine beliebige Steuerung $u(\cdot) \in U$ fest und betrachten das zugehörige Randwertproblem. Wir suchen die Lösung im verallgemeinerten Sinne. Sie gehört zu den Klassen $C^1(\overline{G})$ und $D_{2,p}(G)$, $p > 2$ [9: S. 260]. Mittels der Substitution

$$W(z) = w_x - iw_y \tag{15}$$

können wir das Ausgangsproblem in das folgende Randwertproblem überführen [9: Kap. IV, § 8, Pkt. 3]:

$$\delta_{\bar z} W + A^* W + B^* \overline{W} + \frac{1}{2} \alpha C w = \frac{1}{2} F, \tag{16.1}$$

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda\big(t, u(t)\big)}\, W\right] + \alpha c\big(t, u(t)\big)\, w = f\big(t, u(t)\big) \tag{16.2}$$

mit $A^* = \frac{1}{4}(A + iB)$, $B^* = \frac{1}{4}(A - iB)$.

Im Falle $n \geqq 0$ ist das Randwertproblem (16) und somit auch das Ausgangsproblem folgender Integralgleichungen äquivalent [9: Kap. IV, § 8, Pkt. 4]:

$$w - \alpha \hat{P} w = g(z) \tag{17}$$

mit

$$g(z) = P\hat{W}(z) + d_0 + \sum_{i=1}^{2n+1} d_i P W_i(z). \tag{18}$$

Dabei ist $\hat{P} = PP'$ ein Operator in $C(\overline{G})$. Für den Operator P gilt

$$P\varphi = \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_G \left[\frac{\overline{e^{-\chi(\zeta, u(\zeta))}\varphi(\zeta)}}{\zeta - z} - \frac{z\, e^{-\chi(\zeta, u(\zeta))}\varphi(\zeta)}{1 - \bar\zeta z}\right] d\xi\, d\eta\right\}, \tag{19}$$

mit $\zeta = \xi + i\eta$ und

$$\chi\big(z, u(t)\big) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \left[-\arg \lambda\big(t, u(t)\big) + n \arg t\right] \frac{t + z}{t - z} \frac{dt}{t}. \tag{20}$$

Der Operator P' ist ebenfalls ein Integraloperator, der sich auch in der Form

$$P'w = e^{-\widehat{\chi(z,u(t))}}W \tag{21}$$

darstellen läßt [9: Kap. IV, § 7, 8]. Hierbei bezeichnet W die allgemeine Lösung des folgenden Riemann-Hilbertschen Randwertproblems für verallgemeinerte analytische Funktionen [9: Kap. IV, § 8, Pkt. 3, 4]:

$$\delta_{\bar z} W + A^* W + B^* \overline{W} = -\frac{1}{2} Cw \quad \text{in } G, \tag{22.1}$$

$$\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda(t, u(t))\, W}\right] = -c(t, u(t))\, w \quad \text{auf } \Gamma, \tag{22.2}$$

wobei die Funktion w auf den rechten Seiten als bekannt angesehen wird. Desweiteren gilt in (18)

$$\hat W(z) = e^{\chi(z,u(t))} \widetilde W(z) \tag{23}$$

bzw.

$$W_i(z) = e^{\chi(z,u(t))} \widetilde W_i(z), \qquad i = 1, \ldots, 2n+1. \tag{24}$$

Dabei bezeichnen $\widetilde W(z)$ eine spezielle Lösung des Riemann-Hilbertschen Randwertproblems

$$\delta_{\bar z} W + A^* W + B^* \overline{W} = \frac{1}{2} F \quad \text{in } G, \tag{25.1}$$

$$\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda(t, u(t))}\, W\right] = f \quad \text{auf } \Gamma \tag{25.2}$$

und die Funktionen $\widetilde W_1(z), \ldots, \widetilde W_{2n+1}(z)$ ein System linear unabhängiger Lösungen des zu (25) gehörigen homogenen Randwertproblems. Schließlich sind d_i ($i = 0; 1, \ldots, 2n+1$) willkürliche reelle Konstanten, wobei $d_1, \ldots, d_{2n+1}$ aus dem zu (25) gehörigen homogenen Problem bestimmt werden können. Um diese Konstanten eindeutig festzulegen, sollen analoge Zusatzbedingungen wie in § 1 vorgegeben sein. Bei der Substitution (15) nehmen sie für das Ausgangsproblem die folgende Gestalt an:

$$a(t_k, u(t_k))\, w_y(t_k) + b(t_k, u(t_k))\, w_x(t_k) = h_k(u), \quad k = 1, \ldots, 2r+1, \tag{26.1}$$

wobei $t_k \in \Gamma$ und r eine vorgegebene ganze Zahl ($0 \leqq r \leqq n$) darstellt, sowie, falls $n > 0$ und $r < n$ ist,

$$w_k(z_l) = g_l^x(u), \qquad w_y(z_l) = g_l^y(u), \qquad l = 1, \ldots, n-r \tag{26.2}$$

mit $z_l \in G$ gilt. Dabei sind h_k, g_l^x, g_l^y reellwertige, auf $C(\Gamma)$ stetige Funktionale. Die Konstante d_0 läßt sich unmittelbar aus der Bedingung

$$w(x_0, y_0) = h^0(u) \tag{26.3}$$

bestimmen, wobei $(x_0, y_0) \in \overline{G}$ und h^0 ein reellwertiges, auf $C(\Gamma)$ stetiges Funktional ist.

Im Falle $n < 0$ ist das Randwertproblem (16) der Integralgleichung (17) und $-2n-1$ wohlbestimmten Lösbarkeitsbedingungen [9: Kap. IV, § 8, Pkt. 5] äquivalent. Die Funktion g hat jetzt die Gestalt

$$g(z) = g_0(z) + d_0, \tag{18'}$$

wobei g_0 eine eindeutig definierte Funktion ist, die sich durch die Lösungen der zu (22) bzw. (25) adjungierten Randwertprobleme ausdrücken läßt. Die Lösbarkeitsbedingungen hängen stetig im Sinne des $C(\Gamma)$ von a, b, c und f ab [9: Kap. IV, § 7, Pkt. 3].

§ 3. Formulierung und Beweis des Existenzsatzes

Wir treffen die folgenden Voraussetzungen:

1. Die Steuermenge U ist eine in $H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$, beschränkte und in $C(\Gamma)$ abgeschlossene Menge mit dem Steuerbereich Ω, der eine in $\mathbf{R}$ abgeschlossene und beschränkte Menge darstellt.

2. Es gilt $a(t, u), b(t, u), c(t, u), f(t, u) \in H_{\mu,1}(\Gamma \times \Omega)$.

3. M_k^1, n_k^1, F_1 bzw. M_k^2, n_k^2, F_2 sind stetig bezüglich (w, w_x, w_y) bzw. (w, w_x, w_y, u) für alle $(x, y) \in G$ bzw. $t \in \Gamma$ und summierbar bezüglich $(x, y) \in G$ bzw. $t \in \Gamma$ für alle (w, w_x, w_y) bzw. (w, w_x, w_y, u).

Dann gilt der folgende Existenzsatz.

Satz 2: *Der Index $n = n(u)$ sei konstant, und α sei kein Eigenwert der Integralgleichung*

$$w - \alpha \hat{P} w = 0 \tag{$\widetilde{17}$}$$

für alle $u(\cdot) \in U$. Weiterhin seien für $n \geqq 0$ die Zusatzbedingungen (26) bzw. für $n < 0$ die Zusatzbedingung (26.3) vorgegeben. Dann hat das Poincarésche Randsteuerproblem, falls es mindestens eine zulässige Lösung besitzt, unter den Voraussetzungen 1—3 (mindestens) eine optimale Lösung $(u^0, w^0) \in \mathring{H}_\mu(\Gamma) \times C^1(\bar{G})$.

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir wesentlich einen Satz aus der Theorie der kollektiv-kompakten Operatoren.

Definition: Die Folge von Operatoren $\tilde{T} = \{T_k\}$, $T_k \in L(X)$, $k = 1, 2, \ldots$ heißt *kollektiv-kompakt* im Banachraum X, wenn die Menge

$$\tilde{T} S_1 = \{T_k x : x \in S_1, k = 1, 2, \ldots\}$$

relativ kompakt in X ist. Hierbei bezeichnet S_1 die Einheitskugel in X und $L(X)$, wie üblich, die Menge der beschränkten linearen Operatoren in X.

Lemma 1 [1: Sec. 1.5, Theorem 1.6]: *Seien $T, T_k \in L(X)$, $k = 1, 2, \ldots$ Wir nehmen an, daß $\{T_k\}$ kollektiv-kompakt ist und punktweise gegen T konvergiert, was durch $T_k \to T$ bezeichnet werden soll. Dann existiert $(I - T)^{-1}$ genau dann, wenn für ein bestimmtes k_0 und alle $k \geqq k_0$ die Operatoren $(I - T_k)^{-1}$ existieren und gleichmäßig beschränkt sind. In diesem Falle gilt $(I - T_k)^{-1} \to (I - T)^{-1}$.*

Diesem Satz genügen insbesondere der in (17) auftretende Operator $\hat{P}$ bzw. der durch (19) definierte Operator P, d. h., es gilt

Lemma 2: *Wir machen die gleichen Annahmen[4]) wie in Satz 2. Dann lassen sich Teilfolgen der Operatorenfolgen $\{P_k\}$ und $\{\hat{P}_k\}$ finden, für die gilt:*

(i) $P_k, \hat{P}_k \in L(C(\bar{G}))$, $k = 1, 2, \ldots$, *und* $P_\infty, \hat{P}_\infty \in L(C(\bar{G}))$.

(ii) $\{P_k\}$ *und* $\{\hat{P}_k\}$ *sind kollektiv-kompakt in* $C(\bar{G})$.

(iii) $P_k \to P_\infty$, $\hat{P}_k \to \hat{P}_\infty$.

Hier bezeichnen P_k und $\hat{P}_k = P_k P_k'$ (bzw. P_∞ und $\hat{P}_\infty = P_\infty P_\infty'$) zu $u_k(\cdot) \in U$, $k = 1, 2, \ldots$ (bzw. $u_\infty(\cdot) \in U$) gehörige Operatoren, wobei $u_k \xrightarrow{C(\Gamma)} u_\infty$ gilt.

Beweis: Aus Voraussetzung 1 und der vollstetigen Einbettung von $H_\mu(\Gamma)$ in $C(\Gamma)$ folgt die Existenz einer Teilfolge $\{u_k\} \subseteqq U$ mit der Eigenschaft $u_k \xrightarrow{C(\Gamma)} u_\infty \in U$.

[4]) Voraussetzung 3 kann entfallen.

(i) wird in [9: Kap. IV, § 7, Pkt. 2 bzw. § 8, Pkt. 4] bewiesen.

(ii): Die Operatoren P_k können wir in der Form

$$P_k\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [T_G(\overline{e^{-\chi_k}\varphi}) - z\tilde{T}_G(e^{-\chi_k}\varphi)] \tag{27}$$

schreiben, wobei folgende Beziehungen gelten:

$$T_G\Phi = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \tag{28.1}$$

$$\tilde{T}_G\Phi = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{1 - \bar{\zeta} z}. \tag{28.2}$$

Sei nun $\varphi \in S_1$, d. h. $\|\varphi\|_{C(\bar{G})} \leqq 1$. Wegen der Voraussetzungen 1 und 2 läßt sich eine Teilfolge $\{\chi_k(\zeta)\}$ finden (vgl. [5]) derart, daß

$$\chi_k \xrightarrow{C(\bar{G})} \chi_\infty. \tag{29}$$

Die Folge $\{\chi_k\}$ ist demnach auch beschränkt in $C(\bar{G})$. Auf der Grundlage von (27) und der entsprechenden Abschätzungen für die Operatoren (28) [9: Kap. I, § 6, Satz 1.20 bzw. 1.24 sowie Kap. IV, § 7] erhalten wir die Abschätzung:

$$\|P_k\varphi\|_{H_{\mu_0}(\bar{G})} \leqq M\, \|e^{-\chi_k}\|_{C(\bar{G})}\, \|\varphi\|_{C(\bar{G})},$$

wobei $\mu_0 = \frac{p-2}{p} > 0$ und $M > 0$ eine von φ und k unabhängige Konstante bezeichnen. Somit ist die Menge $\hat{P}S_1$ beschränkt in $H_{\mu_0}(\bar{G})$ und folglich relativ kompakt in $C(\bar{G})$, die Folge $\{P_k\}$ also kollektiv-kompakt in $C(\bar{G})$.

Für die Operatoren $\{\hat{P}_k\}$ ist es auf Grund deren Definition ausreichend, wenn wir zeigen, daß die Menge

$$\hat{P}'S_1 = \{P_k'w : w \in S_1,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

beschränkt in $C(\bar{G})$ ist. Das ergibt sich aus der Darstellung (21) und der Beschränktheit der Lösungen W_k der entsprechenden Riemann-Hilbertschen Randwertprobleme [5: § 2].

(iii) wird wiederum auf der Grundlage von (27) analog wie (ii) gezeigt ∎

Wir kommen nun zum

Beweis von Satz 2: Sei $u(\cdot) \in U$ fixiert. Dann ist das zugehörige Poincarésche Randwertproblem im Falle $n \geqq 0$ der Integralgleichung (17) bzw. im Falle $n < 0$ der Integralgleichung (17) und gewissen Lösbarkeitsbedingungen äquivalent (vgl. § 2). Da α kein Eigenwert der homogenen Gleichung ($\widetilde{17}$) ist und die Zusatzbedingungen (26) gestellt sind, ist die Lösung der Integralgleichung (17) eindeutig bestimmt.

Wir wählen nun eine Minimalfolge $\{u_k\} \in U$ für das Ausgangsproblem. Dieser Folge entspricht eine Folge von Zustandsfunktionen $\{w_k\}$, die Lösungen der Integralgleichungen

$$w - \alpha\hat{P}_k w = g_k(z) \tag{17*}$$

mit

$$g_k(z) = P_k\hat{W}^{(k)}(z) + d_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{2n+1} d_i^{(k)} P_k W_i^{(k)}(z) \tag{18*}$$

sind. Wegen Voraussetzung 1 gibt es eine Teilfolge $\{u_k\}$ derart, daß

$$u_k \xrightarrow{C(\Gamma)} u_\infty \in U. \tag{30}$$

Auf Grundlage der Ergebnisse für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen [5: § 2] sowie der Beziehungen (23), (24) und (29) folgt weiterhin die Existenz von Teilfolgen, so daß $\hat{W}^{(k)} \xrightarrow{C(\bar{G})} \hat{W}^{(\infty)}$; $W_i^{(k)} \xrightarrow{C(\bar{G})} W_i^{(\infty)}$ $(i = 1, \ldots, 2n + 1)$ sowie $d_i^{(k)} \to d_i^{(\infty)}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n + 1)$ ist. Da es nach Lemma 2 eine Teilfolge von Operatoren $\{P_k\}$ gibt, für die $P_k \to P_\infty$ gilt, erhalten wir für (18*) schließlich $g_k \xrightarrow{C(\bar{G})} g_\infty$. Wir wenden jetzt Lemma 1 auf die Integralgleichungen (17*) an. Nach Lemma 2 genügen die Operatoren $\alpha\hat{P}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $\alpha\hat{P}_\infty$ den Annahmen von Lemma 1. Außerdem existiert wie oben gezeigt $(I - \alpha\hat{P}_\infty)^{-1}$. Folglich sind die Operatoren $(I - \alpha\hat{P}_k)^{-1}$ gleichmäßig beschränkt, und es gilt

$$(I - \alpha\hat{P}_k)^{-1} \to (I - \alpha\hat{P}_\infty)^{-1}.$$

Für die Lösungen w_k und w_∞ der Integralgleichungen (17*) gilt demnach

$$\begin{aligned} \|w_k - w_\infty\|_{C(\bar{G})} &= \|(I - \alpha\hat{P}_k)^{-1} g_k - (I - \alpha\hat{P}_\infty)^{-1} g_\infty\|_{C(\bar{G})} \\ &\leqq \|(I - \alpha\hat{P}_k)^{-1}\| \, \|g_k - g_\infty\|_{C(\bar{G})} \\ &\quad + \|(I - \alpha\hat{P}_k)^{-1} g_\infty - (I - \alpha\hat{P}_\infty)^{-1} g_\infty\|_{C(\bar{G})} \to 0 \text{ für } k \to \infty, \end{aligned}$$

d. h.

$$w_k \xrightarrow{C(\bar{G})} w_\infty. \tag{31}$$

Daher und wegen Voraussetzung 2 läßt sich zeigen (siehe § 1, vgl. auch [5: § 2]), daß für die Lösungen W_k der entsprechenden Randwertprobleme (16)

$$W_k \xrightarrow{C(\bar{G})} W_\infty = \frac{\delta w_\infty}{\delta x} - i\,\frac{\delta w_\infty}{\delta y}$$

gilt, woraus infolge (15) schließlich folgt:

$$\frac{\delta w_k}{\delta x} \xrightarrow{C(\bar{G})} \frac{\delta w_\infty}{\delta x}, \quad \frac{\delta w_k}{\delta y} \xrightarrow{C(\bar{G})} \frac{\delta w_\infty}{\delta y}. \tag{32}$$

Aus (30)—(32) und wegen Voraussetzung 3 erhalten wir somit

$$J[u_k] \to J[u_\infty], \quad \text{also} \quad J[u_\infty] = \inf_{u \in U_{ad}} J[u].$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß das Paar $(u_\infty, w_\infty) = (u^0, w^0) \in H_\mu(\Gamma) \times C^1(\bar{G})$ zulässig ist, folglich stellt es eine optimale Lösung des Poincaréschen Randsteuerproblems dar ∎

LITERATUR

[1] Anselone, P. M.: Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1971.
[2] Michlin, S. G., and S. Prössdorf: Singuläre Integraloperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1980.
[3] Muschelischwili, N. I.: Singuläre Integralgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag 1963.
[4] Muschelischwili, N. I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (transl. from the Russian). Groningen: Noordhoff 1953.

[5] OESTREICH, D.: Existenzsätze für einige Randsteuerprobleme bei verallgemeinerten analytischen Funktionen. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 41–49.
[6] OESTREICH, D.: Existenzsätze für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen. In: Preprint-Reihe Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Preprint **10** (1983), 59–62.
[7] OESTREICH, D.: Existenzsätze für einige Randsteuerprobleme bei analytischen und verallgemeinerten analytischen Funktionen. Dissertation A. Freiberg: Bergakademie 1983.
[8] SIMIONESCU, C., and CL. SIMIONESCU: Complex analysis methods in control theory. Bul. Univ. Brasov, Ser. C: Mat. Fiz. Chim. **19** (1977), 71–88.
[9] VEKUA, I. N.: Verallgemeinerte analytische Funktionen. Berlin: Akademie-Verlag 1963.
[10] VEKUA, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1956.
[11] WOLFERSDORF, L. v.: On some optimal control problems for linear elliptic systems in the plane. Beiträge zur Analysis **17** (1981), 95–98.
[12] WOLFERSDORF, L. v.: A class of coefficients control problems with elliptic systems in the plane. Math. Nachr. **99** (1980), 285–300.
[13] WOLFERSDORF, L. v.: The linear-quadratic control problem for generalized analytic functions. Math. Nachr. **102** (1981), 201–216.

Manuskripteingang: 12. 09. 1983

VERFASSER:

Dr. DIETER OESTREICH
Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg
DDR-9200 Freiberg, Bernhard-v.-Cotta-Str. 2