

Automatische Steuerung freier Ränder bei Stefan-Problemen durch Thermostatkontrollen am festen Rand

K.-H. HOFFMANN, H.-J. KORNSTAEDT und J. SPREKELS

Es wird die automatische Steuerung des freien Randes in Einphasen-Stefan-Problemen durch die Anfangsdaten am festen Rand untersucht. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten zu diesem Gegenstand verfolgt der die Anfangsdaten kontrollierende Thermostat die Temperatur am festen Rand anstatt deren Entwicklung am freien Rand. Das entsprechende parabolische Anfangs-Randwertproblem ist nichtlinear und unstetig. Es wird dessen eindeutige Lösbarkeit gezeigt. Außerdem werden einschlägige numerische Resultate vorgestellt.

Исследуется автоматическое управление свободным концом в однофазовой задаче Стефана через начальные данные на фиксированном конце. Термостат, контролирующий начальные данные, следит в противоположность к прежним работам на эту тему за температурой на фиксированном конце вместо за процессом ее изменения на свободном конце. Соответствующая параболическая начально-краевая задача является нелинейной и прерывной. Доказывается ее однозначная разрешимость и представляются численные результаты.

The automatic control of the free boundary in one-phase Stefan problems via the input data at the fixed boundary is considered. In contrast to previous papers concerned with this subject the thermostat controlling the input data observes the temperature at the fixed boundary instead of the evolution of the free boundary. The corresponding parabolic initial-boundary value system is nonlinear and discontinuous. Unique solvability is shown and numerical results are presented.

1. Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir eine Klasse von Einphasen-Stefan-Problemen für die Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension:

$$u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) = 0 \quad \text{in } \Omega_T(s), \quad (1.1.1)$$

$$u(x, 0) = \Psi(x), \quad x \in [0, b], \quad (1.1.2)$$

$$u_x(0, t) = \Phi(u(0, t), f(t), t), \quad t \in (0, T], \quad (1.1.3)$$

$$u(s(t), t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1.1.4)$$

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t), t), \quad t \in (0, T], \quad (1.2.1)$$

$$s(0) = b. \quad (1.2.2)$$

Dabei ist $b > 0$, $T > 0$ und

$$\Omega_T(s) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < s(t), t \in (0, T]\}.$$

Für Ψ setzen wir voraus:

$$(A1) \quad \Psi \in C^1[0, b], \quad \Psi(b) = \Psi'(b) = 0, \quad \Psi(x) \geq 0, \quad x \in [0, b].$$

Die Gleichungen (1.1), (1.2) stellen ein einfaches Modell für das Schmelzen eines eindimensionalen Solids in $[0; \infty)$ dar. Die Gleichung $x = s(t)$ beschreibt die Position der Grenze zwischen flüssiger und fester Phase. Die Schmelztemperatur ist auf Null normalisiert, so daß u die normalisierte Temperatur der flüssigen Phase ist, während die normalisierte Temperatur der festen Phase als identisch Null angenommen wird. Ψ ist die Anfangstemperaturverteilung; durch (1.1.3) wird der Wärmefluß auf dem Rand $x = 0$ in Abhängigkeit von der Randtemperatur $u(0, \cdot)$, einer Kontrollfunktion f und der Zeit t beschrieben, z. B. in einfachen Fällen in der Form

$$u_x(0, t) = -(f(t) + g(t)), \quad t \in (0, T], \quad (1.3)$$

$$u_x(0, t) = \alpha(t) (u(0, t) - f(t)) - g(t), \quad t \in (0, T], \quad (1.4)$$

$$u_x(0, t) = f(t) (u(0, t) - v(t)) - g(t), \quad t \in (0, T]. \quad (1.5)$$

Dabei ist g ein vorgegebener Anteil des negativen Wärmeflusses, f ein steuerbarer Anteil des negativen Wärmeflusses ((1.3)), die steuerbare Außentemperatur ((1.4)) bzw. der steuerbare Wärmübergangskoeffizient ((1.5)).

Während beim direkten Stefan-Problem zu gegebener Funktion f (die übrigen Daten betrachten wir als fest) ein Paar (u, s) gesucht ist, welches die Gleichungen (1.1.), (1.2) löst, ist beim sog. inversen Stefan-Problem zu einem vorgegebenen idealen Rand $s = s^*$ eine Funktion $f = f^*$ zu finden, so daß $s = s^*$ (zusammen mit einer Temperaturverteilung $u = u^*$) das Problem (1.1), (1.2) löst. Da das letztere Problem bekanntlich inkorrekt gestellt ist, beschränkt man sich häufig darauf, an seiner Stelle das sog. Ansteuerungsproblem zu lösen, in welchem eine Funktion $f = \hat{f}$ zu bestimmen ist, so daß der zugehörige freie Rand $s = \hat{s}$ den idealen Rand s^* im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit approximiert. Damit wird man insbesondere auch den Anforderungen vieler praktischer Probleme gerecht, in denen man in erster Linie an einer guten Approximation des idealen Randes interessiert ist. Eine Übersicht über Methoden zur Behandlung solcher Kontrollprobleme findet man in [5].

Zwei der Autoren (vgl. [6–8]) haben in früheren Arbeiten Real-time-Kontrollen für das Ein- und Zweiphasen-Stefan-Problem (mit Randbedingungen vom Typ (1.3) und (1.4)) beschrieben, bei denen der Wärmefluß bzw. die Außentemperatur durch Heiz- (Kühl-)systeme gesteuert werden, die in Abhängigkeit von direkten Beobachtungen des freien Randes aktiviert werden. In vielen praktischen Problemen, so z. B. beim Stranggießen von Stahl, ist die Beobachtung der Phasengrenze technisch sehr aufwendig, während die Temperatur $u(0, t)$ auf dem festen Rand $x = 0$ einfacher zu messen ist. In dieser Arbeit soll daher untersucht werden, inwieweit es möglich ist, Real-time-Kontrollen in Abhängigkeit von der Temperaturverteilung auf dem festen Rand $x = 0$ zu konstruieren, die eine gute Approximation eines idealen Randes s^* gewährleisten.

Das Vorgehen wird durch die folgenden Monotonie- und Stabilitätseigenschaften des Problems (1.1), (1.2) motiviert (vgl. z. B. [1]):

Bezeichnet $(u(f), s(f))$ eine klassische Lösung des freien Randwertproblems (1.1) (1.2) mit

$$0 \leq h_1(t) \leq u(f; 0, t) \leq h_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.6)$$

$$h_i, u(f; 0, \cdot) \in C[0, T], \quad i = 1, 2,$$

so gilt (unter der Voraussetzung (A 1))

$$s_1(t) \leq s(f; t) \leq s_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.7)$$

und

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq C \|h_1 - h_2\|_\infty, \quad t \in [0, T], \quad (1.8)$$

wobei s_i ($i = 1, 2$) Lösungen des freien Randwertproblems (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4), (1.2) sind, mit den Dirichlet-Bedingungen

$$u(0, t) = h_i(t), \quad t \in (0, T], \quad i = 1, 2. \quad (1.1.3')$$

Die Konstante C hängt dabei nur von $b, T, \|\Psi\|_\infty, \|\Psi'\|_\infty, \|h_i\|_\infty$ ($i = 1, 2$) ab. Für den Abstand von $s(f)$ zu einem idealen Rand $s^* \in [0, T]$ gilt daher

$$\begin{aligned} |s(f; t) - s^*(t)| &\leq |s(f; t) - s_i(t)| + |s_i(t) - s^*(t)| \\ &\leq |s_1(t) - s_2(t)| + |s_i(t) - s^*(t)| \\ &\leq C \|h_1 - h_2\|_\infty + \|s_i - s^*\|_\infty, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

also

$$\|s(f) - s^*\|_\infty \leq C \|h_1 - h_2\|_\infty + \|s_i - s^*\|_\infty, \quad i = 1, 2. \quad (1.9)$$

Im folgenden gehen wir davon aus, daß z. B. auf Grund von Messungen oder theoretischer Überlegungen Temperaturfunktionen $h_i \in C[0, T]$ ($i = 1, 2$) mit $0 \leq h_1(t) \leq h_2(t), t \in [0, T]$, bekannt sind, für welche die Abstände $\|h_1 - h_2\|_\infty$ und $\|s_i - s^*\|_\infty$ „klein“ sind. Wir versuchen eine Kontrollfunktion f so zu konstruieren, daß (1.6) gilt und somit auch der Abstand $\|s(f) - s^*\|_\infty$ klein ist.

2. Real-time-Kontrolle

Wir nehmen im folgenden an, daß die Kontrolle f beschrieben wird durch

$$\beta \dot{f}(t) + f(t) = \xi(t), \quad t \in (0, T], \quad f(0) = 0, \quad (2.1)$$

mit einer festen Konstanten $\beta > 0$ und einer Funktion ξ mit $0 \leq \xi(t) \leq 1, t \in (0, T]$. Letztere hänge in folgender Weise vom „Zustand“ $u(0, \cdot)$ des Systems (1.1), (1.2), (2.1) ab:

Es seien h_1, h_2 zwei Schrankenfunktionen für die Temperatur, welche die Voraussetzung (A 2) erfüllen:

- (A 2) (i) $h_i \in C[0, T], h_i(t) \geq 0, t \in [0, T], i = 1, 2,$
 (ii) $h_2(t) - h_1(t) \geq \sigma > 0, t \in [0, T],$
 (iii) $h_1(0) \geq \Psi(0),$
 (iv) $|h_1(t_1) - h_1(t_2)| \leq C_0 |t_1 - t_2|^{1/2}, t_1, t_2 \in [0, T].$

Wir nehmen an, daß ein Temperaturfühler die Temperatur $u(0, t)$ beobachtet und z. B. den Brenner eines Heizsystems zur Zeit $t = \bar{t}$ in den Zustand

- 0 (gleich „aus“, falls $u(0, \bar{t}) = h_2(\bar{t})$ und der Zustand kurze Zeit vorher „an“ war,
 1 (gleich „an“, falls $u(0, \bar{t}) = h_1(\bar{t})$ und der Zustand kurze Zeit vorher „aus“ war,

schaltet (vgl. Abb. 1).

Man beachte, daß an den mit \bullet markierten Punkten nicht geschaltet wird.

Wir präzisieren dies:

Gesucht ist also eine von der Lösung u des Systems (1.1), (1.2), (2.1) abhängige Funktion ξ der folgenden Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= Z_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (N \in \mathbb{N}_0), \\ Z_k &:= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } k \text{ gerade ist.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei gelte für die endlich vielen Schaltpunkte t_k

$$\begin{aligned}
 0 &=: t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} := T, \\
 t_{k+1} &= \begin{cases} \inf M_{k+1}, & \text{falls } M_{k+1} \neq \emptyset \\ T, & \text{falls } M_{k+1} = \emptyset \text{ ist} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \\
 M_{k+1} &= \left\{ t \in (t_k, T] \mid \bar{u}(\xi; 0, t) = \begin{cases} h_1(t), & k+1 \text{ gerade} \\ h_2(t), & k+1 \text{ ungerade} \end{cases} \right\},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

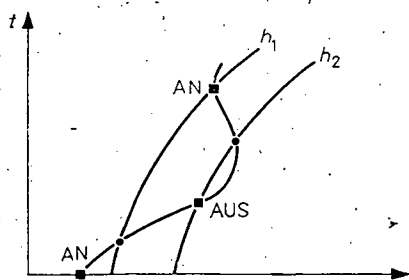


Abb. 1

wobei $u(\xi; \cdot, \cdot)$ Lösung des Problems (1.1), (1.2), (2.1) ist..

Wir zeigen im folgenden, daß die Gleichungen (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) unter noch zu präzisierenden Voraussetzungen genau eine Lösung besitzen.

3. A priori Abschätzungen

In diesem Abschnitt zeigen wir einige a-priori-Abschätzungen. Es sei

$$K_1^+(T) := \{ \xi \in L^\infty(0, T) \mid 0 \leq \xi(t) \leq 1 \text{ f. f. a. } t \in (0, T) \}.$$

Dann besitzt (2.1) für jedes $\xi \in K_1^+(T)$ offenbar genau eine Lösung $f(\xi; \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T)$,

$$f(\xi; t) = \beta^{-1} e^{-t/\beta} \int_0^t e^{s/\beta} \xi(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

und es gilt die Abschätzung

$$0 \leq f(\xi; t) \leq 1 - e^{-t/\beta} \leq 1, \quad t \in [0, T], \quad \xi \in K_1^+(T). \tag{3.1}$$

Für die Abbildung Φ setzen wir nun voraus:

- (A 3)
- (i) $\Phi \in C((-\infty, +\infty) \times [0, 1] \times [0, T])$.
 - (ii) $\Phi(\cdot, z, t)$ ist auf jedem kompakten Intervall $I \subset \mathbf{R}$ lipschitzstetig gleichmäßig bez. $z \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$.
 - (iii) Es gibt Konstanten $\varepsilon_0 \geq 0$ und $\varepsilon_1 \geq 0$, so daß

$$\Phi(y, z, t) \leq -\varepsilon_0 \text{ für alle } y \leq \varepsilon_1, z \in [0, 1] \text{ und } t \in [0, T]$$
 gilt.

(iv) Es gibt Konstanten δ_0 und δ_1 , so daß

$$\Phi(y, z, t) \geq \delta_0 \text{ für alle } y \geq \delta_1, z \in [0, 1] \text{ und } t \in [0, T] \\ \text{gilt.}$$

(A 4) $\Phi(\Psi(0), 0, 0) = \Psi'(0).$

Wir betrachten zunächst das Problem (1.1), (2.1) bei festem Rand $s \in S$,

$$S := \{s \in C^1[0, T] \mid s(0) = b, \dot{s}(t) \geq 0, t \in [0, T]\}.$$

Lemma 3.1: *Es seien die Voraussetzungen (A 1), (A 3), (A 4) erfüllt, und es sei $\xi \in K_1^+(T)$, $s \in S$. Dann gilt für jede klassische Lösung $(u(\xi; s; \cdot, \cdot), f(\xi, s; \cdot))$ des Systems (1.1), (2.1):*

$$0 \leq u(\xi, s; x, t) \leq A, \quad (x, t) \in \overline{\Omega_T(s)}, \tag{3.2}$$

mit

$$A := \begin{cases} \max(\|\Psi\|_\infty, \delta_1), & \delta_0 \geq 0 \\ \max(\|\Psi\|_\infty, \delta_1) - 2\delta_0(T/\pi)^{1/2}, & \delta_0 < 0. \end{cases}$$

Beweis: Unter Berücksichtigung von (3.1) folgt die Behauptung unmittelbar aus den Abschätzungen von FASANO [2] ■

Lemma 3.2: *Über die Voraussetzungen von Lemma 3.1 hinaus sei $u_x(\xi, s; \cdot, \cdot) \in C(\overline{\Omega_T(s)})$. Dann gilt:*

$$|u_x(\xi, s; x, t)| \leq B, \quad (x, t) \in \overline{\Omega_T(s)}, \tag{3.3}$$

mit

$$B := \max(\|\Psi'\|_\infty, B_0), \\ B_0 := \max\{|\Phi(y, z, t)| \mid y \in [0, A], z \in [0, 1], t \in [0, T]\}.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 3.1, wenn man das Maximumprinzip auf u_x anwendet (vgl. auch [3: Cor. 3.2]) ■

Lemma 3.3: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.2 gilt:*

$$|u(\xi, s; 0, t_1) - u(\xi, s; 0, t_2)| \leq C |t_1 - t_2|^{1/2}, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \tag{3.4}$$

mit

$$C := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\max\left(B, \frac{4A}{b}\right) + B_0 \right).$$

Beweis: Auf Grund von Lemma 3.1 und Lemma 3.2 sind die Voraussetzungen von Theorema 4.1 in [3] erfüllt, und es folgt die Behauptung. ■

Man beachte, daß die Konstanten A, B, C unabhängig von $s \in S$, $\xi \in K_1^+(T)$ und ferner explizit berechenbar sind.

Aus diesen a-priori-Abschätzungen folgt

Lemma 3.4: *Es seien die Voraussetzungen (A 1), (A 3) und (A 4) erfüllt. Dann besitzt das System (1.1), (1.2), (2.1) für jedes $\xi \in K_1^+(T)$ genau eine klassische Lösung $(u(\xi; \cdot, \cdot), s(\xi; \cdot), f(\xi; \cdot))$ mit*

$$f(\xi; \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T), \tag{3.5}$$

$$s(\xi; \cdot) \in S, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} u(\xi; \cdot, \cdot), \quad u_x(\xi; \cdot, \cdot) &\in C(\overline{\Omega_T(s)}), \\ u_{xx}(\xi; \cdot, \cdot), \quad u_t(\xi; \cdot, \cdot) &\in C(\Omega_T(s)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Erfüllen die Temperaturfunktionen h_1, h_2 die Voraussetzung (A 2), so oszilliert $u(\xi; 0, \cdot)$ höchstens endlich oft in $[0, T]$.

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung mit (3.5)–(3.7) folgt wie in [4]. Es bleibt die letzte Aussage zu zeigen. Es seien t_1 und t_2 beliebige Punkte aus $[0, T]$ mit der Eigenschaft $u(\xi, 0, t_i) = h_i(t_i)$, $i = 1, 2$. Nach Lemma 3.3 existiert eine (von ξ unabhängige) Konstante $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} C |t_1 - t_2|^{1/2} &\geq |u(\xi; 0, t_1) - u(\xi; 0, t_2)| = |h_1(t_1) - h_2(t_2)| \\ &\geq h_2(t_2) - h_1(t_2) + h_1(t_2) - h_1(t_1) \geq \sigma - C_0 |t_1 - t_2|^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei (A 2) berücksichtigt worden ist. Es folgt

$$|t_1 - t_2| \geq \tau := \left(\frac{\sigma}{C + C_0} \right)^2 > 0, \quad (3.8)$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt ■

Man beachte, daß die Konstante $\tau > 0$ unabhängig von $\xi \in K_1^+(T)$ und ferner explizit angebar ist.

4. Existenz und Eindeutigkeit

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptresultat dieser Arbeit beweisen.

Satz 4.1: *Es seien für $T > 0$ die Voraussetzungen (A 1)–(A 4) erfüllt. Dann hat das System (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) genau eine Lösung (u, s, f, ξ) mit den Eigenschaften (3.5)–(3.7). Die Randtemperatur $u(0, \cdot)$ oszilliert höchstens $[T/\tau] - 1$ mal, wobei die Konstante τ durch (3.8) gegeben ist.*

Beweis: Wir konstruieren die Lösung induktiv. Zunächst betrachten wir das System (1.1), (1.2), (2.1) mit $\xi(t) = \xi_0(t) := 1$, $t \in [0, T]$. Nach Lemma 3.4 existiert genau eine Lösung (u_0, s_0, f_0) mit den Eigenschaften (3.5)–(3.7).

Es sei

$$M_1 := \{t \in (0, T] \mid u_0(0, t) = h_2(t)\}.$$

Ist $M_1 = \emptyset$, so gilt die Behauptung mit $u = u_0, s = s_0, f = f_0, \xi = \xi_0$. Es sei $M_1 \neq \emptyset$. Dann setzen wir

$$t_1 := \inf M_1, \quad Z_1 := 0, \quad \xi_1(t) := \begin{cases} \xi_0(t), & 0 \leq t < t_1 \\ Z_1, & t_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Wegen $u_0(0, 0) = \Psi(0) \leq h_1(0)$ ist $t_1 \geq \tau > 0$. Offenbar ist $\xi = \xi_1 \in K_1^+(T)$, und das System (1.1), (1.2), (2.1) hat nach Lemma 3.4 genau eine Lösung (u_1, s_1, f_1) mit den Eigenschaften (3.5)–(3.7). Sie stimmt mit (u_0, s_0, f_0) bis zum Zeitpunkt t_1 überein.

Es sei nun

$$M_2 := \{t \in (t_1, T) \mid u_1(0, t) = h_1(t)\}.$$

Wiederum löst (u_1, s_1, f_1, ξ_1) im Fall $M_2 = \emptyset$ die Aufgabe. Andernfalls setzen wir

$$t_2 := \inf M_2, \quad Z_2 := 1, \quad \xi_2(t) := \begin{cases} \xi_1(t), & 0 \leq t < t_2 \\ Z_2, & t_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Auf Grund von (3.8) gilt $t_2 - t_1 \geq \tau$, also $t_2 \geq 2\tau$.

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine Folge von Schaltpunkten $t_k \geq k\tau$, Funktionen ξ_k ,

$$\xi_k(t) := \begin{cases} \xi_{k-1}(t), & 0 \leq t < t_k \\ Z_k, & t_k \leq t \leq T, \end{cases}$$

und Lösungen (u_k, s_k, f_k) mit (3.5)–(3.7): Wegen $t_k \geq k\tau$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $t_{k+1} \geq T$ für $(k+1)\tau \geq T$, d. h. für $k \geq T/\tau - 1$; dies bedeutet $M_{k+1} = \emptyset$ für $k \geq T/\tau - 1$. Bezeichnet man die kleinste natürliche Zahl k mit $M_k \neq \emptyset$, aber $M_{k+1} = \emptyset$ mit N , so ist (u_N, s_N, f_N, ξ_N) Lösung des Problems mit den Eigenschaften (3.5)–(3.7). Nach Konstruktion ist ξ_N eindeutig bestimmt. Überdies gilt $N \leq T/\tau - 1$, also $N \leq [T/\tau] - 1$, wobei $[T/\tau]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich T/τ ist ■

5. Beispiele

Zum Abschluß sollen noch einige für die Anwendungen typische Beispiele diskutiert werden und die Wirkungsweise der Real-time-Kontrollen anhand numerischer Beispiele demonstriert werden. In allen Fällen steht $\|\cdot\|$ für die Maximumnorm. Wir betrachten verschiedene Randbedingungen vom Typ (1.3)–(1.5).

Beispiel 5.1: Es sei

$$u_z(0, t) = -(f(t) + g(t))$$

mit $g \in C[0, T]$, $g(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$, d. h., der Fluß am Rand setzt sich aus einem steuerbaren Anteil $-f$ und einem nichtsteuerbaren Anteil $-g$ zusammen. In diesem Fall ist $\Phi(y, z, t) = -(z + g(t))$ unabhängig von y . Es gilt (A 3) mit $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0$, $\delta_0 = -(1 + \|g\|)$, $\delta_1 = 0$, und (A 4) ist für $\Psi'(0) = -g(0)$ erfüllt. In den a-priori-Abschätzungen ist

$$A = \|\Psi'\| + 2(1 + \|g\|) (T/\pi)^{1/2} \quad \text{und} \quad B_0 = 1 + \|g\|.$$

Beispiel 5.2: Es sei

$$u_x(0, t) = \alpha(t) (u(0, t) - f(t)) - g(t)$$

mit $\alpha, g \in C[0, T]$, $\alpha(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$. In diesem Fall ist $\Phi(y, z, t) = \alpha(t) \times (y - z) - g(t)$. Voraussetzung (A 3) ist mit $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0$, $\delta_0 = -\|g\|$, $\delta_1 = 1$ erfüllt, und (A 4) gilt unter der Voraussetzung $\Psi'(0) = \alpha(0) \Psi(0) - g(0)$. In den a-priori-Abschätzungen ist

$$A = \max(1, \|\Psi'\|) + 2\|g\| (T/\pi)^{1/2}, \quad B_0 = \|\alpha\| (1 + A) + \|g\|.$$

Beispiel 5.3: Es sei

$$u_x(0, t) = f(t) (u(0, t) - v(t)) - g(t)$$

mit $v, g \in C[0, T]$, $v(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$. In diesem Fall wird der Wärmefluß mit Hilfe des Wärmeaustauschkoeffizienten f gesteuert, v bezeichnet die Umgebungstemperatur und $-g$ einen nicht steuerbaren Anteil des Wärmeflusses. Es ist also

$\Phi(y, z, t) = z(y - v(t)) - g(t)$, und (A 3) ist mit $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, $\delta_0 = -\|g\|$, $\delta_1 = \|v\|$ erfüllt. (A 4) gilt unter der Voraussetzung $\Psi'(0) = -g(0)$. In den a-priori-Abschätzungen hat man

$$A = \max(\|\Psi\|, \|v\|) + 2\|g\| (T/\pi)^{1/2}, \quad B_0 = A + \|v\| + \|g\|.$$

Für dieses wohl wichtigste Beispiel im Hinblick auf die Anwendungen wurden einige Testrechnungen durchgeführt. Dazu dienen die Daten:

$$b := 1, \quad \Psi(x) := (x - 1)^2 \quad \text{für } x \in [0, 1],$$

$$v(t) \equiv 0, \quad g(t) \equiv 0 \quad \text{für } t \in [0, 2,5].$$

Die Kompatibilitätsbedingung $\Psi'(0) = -g(0)$ ist für diese Daten nicht erfüllt. Bei den numerischen Rechnungen ist das jedoch ohne Belang. Als Schrankenfunktionen

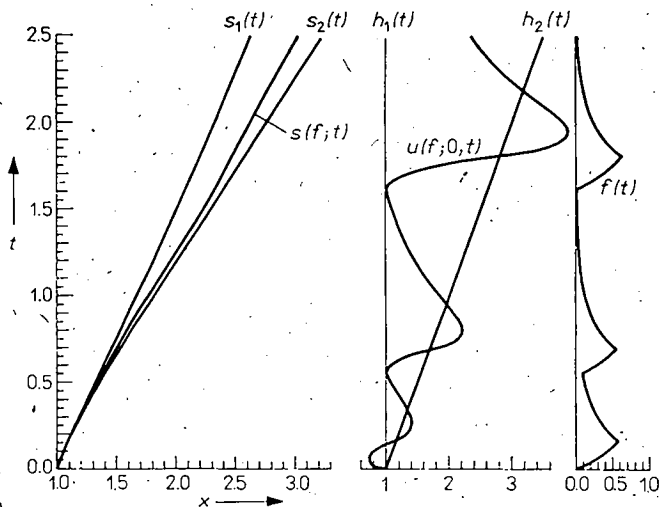


Abb. 2

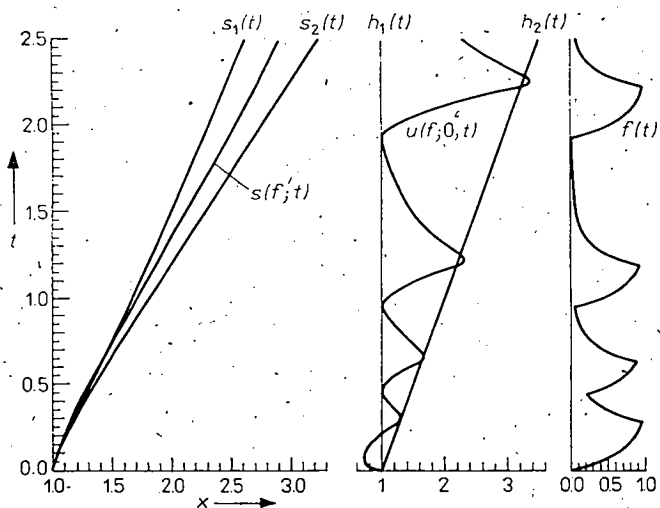


Abb. 3

wurden gewählt:

$$h_1(t) \equiv 1, \quad h_2(t) = 1 + t.$$

Die Wahl des Dämpfungskoeffizienten β in der Differentialgleichung (2.1) beeinflusst entscheidend den Temperaturverlauf $u(0, t)$ auf dem festen Rand. Die nachfolgenden Rechnungen zeigen typische Bilder. Um die Effekte deutlicher sehen zu können, wurde in der Randbedingung mit einem zusätzlichen Skalierungsfaktor $c_f > 0$ gearbeitet. Die Randbedingung lautete also:

$$u_x(0, t) = c_f f(t) u(0, t).$$

Beispiel 5.3.1: Wir wählen $\beta = 0,2$ und $c_f = 4,0$. Ergebnisse: s. Abb. 2.

Beispiel 5.3.2: Wir wählen $\beta = 0,1$ und $c_f = 2,0$. Ergebnisse: s. Abb. 3.

REFERENCES

- [1] CANNON, J. R., and DENSON, C. HILL: Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation. *J. Math. Mech.* **17** (1967), 1–19.
- [2] FASANO, A.: Stime a priori per le soluzioni di un problema di tipo parabolico con condizioni al contorno non lineari. *Rendiconti Inst. Mat. Univ. Trieste* **3, 4** (1971–1972), 218–229.
- [3] FASANO, A., and M. PRIMICERIO: La diffusione del calore in uno strato di spessore variabile in presenza di scambi termici non lineari con l'ambiente — I. *Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova* **50** (1973), 269–330.
- [4] FASANO, A., and M. PRIMICERIO: General free-boundary problems for the heat equation — I. *J. Math. Anal. Appl.* **57** (1977), 694–723.
- [5] HOFFMANN, K.-H., and M. NIEZGÓDKA: Control of parabolic systems involving free boundaries. In: *Free boundary problems: theory and applications*, Vol. II (ed.: A. Fasano and M. Primicerio). Boston—London—Melbourne: Pitman Publ. 1983, 431–453.
- [6] HOFFMANN, K.-H., and J. SPREKELS: Real-time control of the free boundary in a two-phase Stefan problem. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **5** (1982), 47–76.
- [7] HOFFMANN, K.-H., and J. SPREKELS: Real-time control in a free boundary problem connected with the continuous casting of steel. In: *Intern. Ser. Numer. Math.* Vol. 68 (eds.: K.-H. Hoffmann and W. Krabs). Basel—Boston—Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1984.
- [8] SPREKELS, J.: On the automatic control of the free boundary in a one-phase Stefan problem. In: *Applied Nonlinear Functional Analysis* (eds.: R. Gorenflo and K.-H. Hoffmann). Frankfurt/Main—Bérn: Lang 1983, 301–310.

Manuskripteingang: 27. 02. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. K.-H. HOFFMANN und Prof. Dr. J. SPREKELS
Mathematisches Institut der Universität Augsburg
D-8900 Augsburg, Memminger Str. 6

Prof. Dr. H.-J. KORNSTAEDT
Institut für Mathematik III der Freien Universität Berlin
Berlin-West 33, Arnimallee 2