Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (3) 1985, S. 269–276

# Vergleichende Betrachtungen zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens mehrdimensionaler Laplace-Gauß-Integrale

H. Birndt und W.-D. Richter

Für gewisse in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen interessierende Borelmengen mit gegen Unendlich strebendem Abstand vom Koordinatenursprung wird das asymptotische Verhalten ihres Gaußmaßes untersucht. Dazu werden verschiedene Methoden des Studiums von Laplace-Gauß-Integralen miteinander verglichen. Einige neue Aussagen werden durch zahlreiche Beispiele illustriert.

Изучается асимптотическое поведение гауссовской меры для некоторых борелевских множеств, интересующих в теории вероятностей больших уклонений и расстояние которых от начала координат стремится к бесконечности. Для этого сравниваются различные методы изучения интегралов Лапласа-Гаусса. Некоторые новые результаты иллюстрируются разными примерами.

The asymptotic behaviour of the Gaussian measure is investigated for some Borel sets in which one is interested in the theory of probabilities of large deviations and the distance of which from the origin tends to infinity. To that end, various methods for studying Laplace-Gaussintegrals are compared. Some new assertions are illustrated by many examples.

## 1. Einleitung

In der Summationstheorie zufälliger Vektoren und insbesondere beim Studium sogenannter großer Abweichungen entsteht die Frage nach dem asymptotischen ($x \to \infty$) Verhalten der Wahrscheinlichkeit $P(Z_B \in xA)$ dafür, daß ein Gauß'scher Zufallsvektor $Z_B$ mit Mittelwert $\mathfrak{o} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^k$ ($k \geqq 2$) und regulärer Kovarianzmatrix $B$ in die Menge $xA = \{(xz_1, \ldots, xz_k) : z = (z_1, \ldots, z_k) \in A\}$ fällt, wobei $A$ einer gewissen Klasse $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ von Borelmengen angehört. Bezeichnet $\Phi(\cdot)$ die Verteilung von $Z_B$ und $B^{-1}$ die Inverse von $B$, so gilt

$$P(Z_B \in xA) = \Phi(xA)$$
$$= x^k \int_A \left((2\pi)^k \det B\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} zB^{-1}z^T\right\} dz.$$

Dieses Integral wollen wir als Laplace-Gauß-Integral bezeichnen. Dem Studium solcher und wesentlich allgemeinerer Laplace-Integrale haben sich zahlreiche Autoren (u. a. [1–7, 9]) gewidmet. In der vorliegenden Arbeit sollen verschiedene sowohl bekannte als auch neue Methoden des Studiums von Laplace-Gauß-Integralen miteinander verglichen werden. Im Zusammenhang mit der Arbeit [7][1]) wird hierbei ein Überblick über derzeit praktizierte Vorgehensweisen angestrebt.

[1]) Das ist der vorangegangene Beitrag dieses Heftes.

In Abschnitt 2 wollen wir zunächst einige grundlegende Aussagen über das grobe Verhalten von $\Phi(xA)$, d. h. über das Verhalten von $\ln \Phi(xA)$ für $x \to \infty$ darstellen, welche aus den Arbeiten von V. P. Maslov und M. V. Fedorjuk [5: Satz 1] und W.-D. Richter [6: Theorem 1] folgen. Daran schließen sich dann genauere Betrachtungen über $\Phi(xA)$ an: Im Abschnitt 3 werden die Untersuchungen aus [5: Satz 2] fortgeführt, und insbesondere wird eine der in [5] an den Rand $\partial A$ der Menge $A$ gestellten Bedingungen (siehe (6) unten) diskutiert. Die Ordnung, mit der $\Phi(xA)$ für $x \to \infty$ gegen Null strebt, kann aus den Resultaten dieses Abschnittes auch noch nicht vollständig bestimmt werden, jedoch schon wesentlich besser als im Abschnitt 2. Im Abschnitt 4 schließlich wird eine Anwendung der Resultate der klassischen Laplace-Methode (siehe z. B. die Monographie [4] von M. V. Fedorjuk) demonstriert. Unter Ausnutzung im allgemeinen schärferer Voraussetzungen als in den vorangegangenen Abschnitten können sowohl die Ordnung von $\Phi(xA)$ für $x \to \infty$ als auch die zugehörige asymptotisch echte Konstante exakt bestimmt werden. Im Hinblick auf Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie werden diese Betrachtungen sofort für den Fall durchgeführt, daß die Kovarianzmatrix $B$ von $x$ abhängen kann, jedoch für $x \to \infty$ gegen eine reguläre Matrix strebt.

Es sei darauf hingewiesen, daß die in der Arbeit [7] dargelegte Methode es prinzipiell gestattet, unter den vergleichsweise schwächsten Voraussetzungen an $\partial A$ die Genauigkeit der mit der Laplace-Methode erzielten Aussagen zu erreichen. Das gelingt, indem das Ausgangsproblem auf geeignete elementar-geometrische Betrachtungen zurückgeführt wird (siehe auch [9]).

Zum Schluß der Einleitung führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Es seien $S = \{z \in \mathbf{R}^k : \|z\| = 1\}$ die Oberfläche der Einheitskugel bezüglich der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$; $\bar{A}$ die Abschließung, $\mathring{A}$ das Innere und $A^c$ das Komplement einer Menge $A \subset \mathbf{R}^k$. Zu jedem Punkt $z \in \mathbf{R}^k$ mit $\|z\| = r > 0$ existiert bekanntlich ein eindeutig bestimmtes $f = (f_1, \ldots, f_{k-1})$ aus $\mathfrak{B} := \left(\bigtimes_1^{k-2} [0, \pi)\right) \times [0, 2\pi)$ derart, daß gilt $z/r = (\cos f_1, \sin f_1 \cos f_2, \ldots, \sin f_1 \ldots \sin f_{k-1})$. Die Schreibweise $z = z[f, r] = r \cdot z[f, 1]$ symbolisiert also die Darstellung eines Punktes durch verallgemeinerte Kugelkoordinaten. Im weiteren wollen wir sagen, daß eine Menge $A$ zu einer Teilklasse $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ von Borelmengen mit "glattem Rand" gehört, wenn sie die Eigenschaften ($\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 1) bis ($\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 3) besitzt:

$$o \in A^c. \tag{$\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 1}$$

Auf einer (eindeutig bestimmten) endlichen Vereinigung $\mathfrak{B}(A)$ offener Teilintervalle von $\mathfrak{B}$ ist eine Funktion $R_A$ so definiert, daß gilt

$$\mathring{A} = \{z[f, r] : r > R_A(f),\ f \in \mathfrak{B}(A)\}. \tag{$\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 2}$$

$R_A$ ist positiv und stetig auf $\overline{\mathfrak{B}(A)}$ und besitzt auf $\mathfrak{B}(A)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich aller Argumente. ($\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 3)

Diese Klasse wurde unter anderem in [6] und [8] betrachtet. Im Falle $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{B}$ beinhaltet ($\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 3) die Bedingung ($B$ 1) aus [6]. Wir wollen auch die dort eingeführte Bezeichnungsweise

$$z(f, r) = z[f, R_A(f)\, r]$$

verwenden.

## 2. Grobe Aussagen

Es seien

$$H(f) = \begin{cases} (\sin f_1)^{k-2} \dots \sin f_{k-2} & \text{für} \quad k \geqq 3 \\ 1 & \text{für} \quad k = 2 \end{cases}$$

die Funktionaldeterminante der den Übergang von verallgemeinerten Kugelkoordinaten zu kartesischen Koordinaten vermittelnden Abbildung,

$$g(f) = z(f, 1)\, B^{-1} z^T(f, 1), \qquad f \in \mathfrak{B}(A),$$

$$h(f) = \big(R_A(f)\big)^k\, |H(f)|/g(f), \qquad f \in \mathfrak{B}(A),$$

$$\theta_0 = \int_{\mathfrak{B}(A)} h(f)\, df,$$

$$F(x) = \int_{\mathfrak{B}(A)} h(f) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\, g(f)\right\} df$$

und

$$a = \inf\{zB^{-1}z^T : z \in A\}.$$

Aus den Resultaten in [6] folgt für $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$

$$\Phi(xA) = \big((2\pi)^k \det B\big)^{-1/2} x^{k-2} F(x) \big(1 + O(1/x^2)\big), \qquad x \to \infty. \tag{1}$$

Im Falle der zusätzlichen Erfüllung der (zur Bedingung ($B$ 2) aus [6] äquivalenten) Bedingung

$$\mathfrak{B}_0 = \{f \in \mathfrak{B}(A) : g(f) = a\} \text{ hat das Lebesguemaß Null in } \mathfrak{B}(A) \tag{$\mathfrak{B}$ 2}$$

gilt überdies $F(x) = o(1) \exp\{-x^2 a/2\}$, $x \to \infty$. Das legt es nahe, (1) in der Form

$$\Phi(xA) = \big((2\pi)^k \det B\big)^{-1/2} \theta_0 x^{k-2} \exp\{-x^2 d(x)/2\} \big(1 + O(1/x^2)\big) \tag{2}$$

zu schreiben, wobei die Funktion $d$ als Lösung der Gleichung

$$\theta_0 \exp\{-x^2 d(x)/2\} = F(x) \tag{3}$$

definiert ist. Sie genügt den Ungleichungen

$$a \leqq d(x) \leqq a + 2\big(\gamma + \ln\theta_0 - \ln\theta_1(\gamma)\big)/x^2 \tag{4}$$

für beliebige $x > 0$, $\gamma > 0$, wobei $\theta_1(\gamma) = \int h(f)\, df$ und das Integrationsgebiet des letzten Integrales $\mathfrak{B}_{2\gamma/x^2}$ ist, mit

$$\mathfrak{B}_c = \{f \in \mathfrak{B}(A) : a \leqq g(f) \leqq a + c\}, \qquad c \geqq 0.$$

Außerdem gilt unter den Voraussetzungen $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und ($\mathfrak{B}$ 2) für $x \to \infty$ die Beziehung $x^2\big(d(x) - a\big) \to \infty$. Aus (1), (3) und (4) läßt sich unschwer ableiten, daß für $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ gilt [5]

$$\lim_{x\to\infty} 2 \ln F(x)/x^2 = -a. \tag{5}$$

## 3. Präzisierungen

Die im folgenden aus technischen Gründen verwendete Voraussetzung

$$H(f_0) \neq 0, \qquad f_0 \in \mathfrak{B}_0 \tag{$\mathfrak{B}$ 3}$$

läßt sich gegebenenfalls durch eine geeignete Umorientierung des zugrunde gelegten Koordinatensystems erfüllen, insbesondere im Falle der Erfüllung der weiter unten getroffenen Voraussetzung

$$\operatorname{card} \mathfrak{B}_0 = N < \infty. \tag{$\mathfrak{B}$ 4}$$

Mit $\mu^{(k)}$ bezeichnen wir das Lebesguemaß im $\mathbf{R}^k$ und setzen $V(c) = \mu^{(k-1)}(\mathfrak{B}_c)$. Aus [5] folgt, daß für $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ unter den Voraussetzungen ($\mathfrak{B}$ 3) und

$$\text{es existiert } \lim_{c \to 0} \ln V(c)/\ln c =: \alpha > 0 \tag{6}$$

für $x \to \infty$ gilt:

$$\ln F(x) = -ax^2/2 - \alpha \ln (x^2/2) + o(1) \ln (x^2/2). \tag{7}$$

Hieraus und aus (1) folgt somit, daß unter den Voraussetzungen $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$, ($\mathfrak{B}$ 3) und (6) für $x \to \infty$ gilt

$$\Phi(xA) = x^{k-2(1+\alpha)+o(1)} \exp \{-ax^2/2\}. \tag{8}$$

Sieht man sich den Beweis der Aussage (7) in [5] an, so entsteht der Eindruck, daß auf der Grundlage der dort verwendeten Methode eine weitere Präzisierung der Konvergenzordnung in (8) nur schwer zu erreichen sein wird. Zur anschaulichen Interpretation der Bedingung (6) verweisen wir auf eine korrespondierende Bedingung in [8: Theorem 1]. Wir bemerken, daß (6) die Erfüllung der Bedingung ($\mathfrak{B}$ 2) nach sich zieht, weil im Falle der Verletzung von ($\mathfrak{B}$ 2) nämlich $\alpha = 0$ gilt. Da aus [5] keine hinreichend allgemeinen Bedingungen an $\partial A$ ableitbar sind, unter denen die Voraussetzung (6) erfüllt ist, wollen wir uns im folgenden dieser Frage widmen. Dazu führen wir zunächst die folgende Verschärfung der Voraussetzung ($\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ 3) ein:

In $\mathfrak{B}(A)$ existiert die Matrix $g''(f)$ stetiger gemischter partieller Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $g(f)$, und es ist $g''(f_0)$ positiv definit für alle $f_0 \in \mathfrak{B}_0$. ($\mathfrak{B}$ 5)

(Im Falle $k = 2$ handelt es sich bei $g''(f)$ natürlich einfach um die zweite Ableitung der Funktion $g(f)$, $f \in (0, 2\pi)$.)

Satz 1: *Für jede Menge $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$, welche den Voraussetzungen ($\mathfrak{B}$ 4) und ($\mathfrak{B}$ 5) genügt, existiert der Grenzwert* (6), *und es gilt $\alpha = (k-1)/2$. Es ist also für $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ mit* ($\mathfrak{B}$ 3)—($\mathfrak{B}$ 5)

$$\Phi(xA) = x^{-1+o(1)} \exp \{-ax^2/2\}, \quad x \to \infty. \tag{9}$$

Beweis: Es sei zunächst $N = 1$. Das einzige Element von $\mathfrak{B}_0$ bezeichnen wir mit $f_0$. Wegen $\operatorname{grad} g(f_0) = \mathfrak{o}$ gilt

$$g(f) = g(f_0) + (f - f_0)\, g''(f_0)\, (f - f_0)^T/2 + o(1)\, \|f - f_0\|^2$$

für $f \to f_0$. Im Falle $c \to 0$ streben wegen der Stetigkeit der Funktion $g$ alle $f \in \mathfrak{B}_c$ zu $f_0$. Es gilt dann also

$$\mathfrak{B}_c = \{f \in \mathfrak{B}(A)\colon 0 \leqq (f - f_0)\, [g''(f_0) + o(1)\, I]\, (f - f_0)^T/2 \leqq c\}$$

mit $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Das heißt, $V(c) \asymp c^\alpha$.

Im Falle $N > 1$ folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar aus der Beziehung $\ln \big(NV(c)\big)/\ln c \sim \ln V(c)/\ln c \to \alpha$, $c \to 0$ ∎

Aus allem Gesagten wird ersichtlich, daß für das Vorliegen der Beziehung (6) (und damit (7)) die Eigenschaften der Menge $\mathfrak{B}_0$ eine wichtige Rolle spielen. Der folgende Satz widmet sich einer weiteren diesbezüglichen Charakterisierung.

Satz 2: *Es sei $k \geqq 3$, und die Menge $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ genüge der Voraussetzung* ($\mathfrak{B}$ 5). *Für ein $r \in \{1, \ldots, k-2\}$ und alle $c \geqq 0$ gelte $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{B}_c(r) \times \mathfrak{B}_c(k-1-r)$, wobei $\mu^{(k-1-r)}\big(\mathfrak{B}_0(k-1-r)\big) > 0$ und* card $\mathfrak{B}_0(r) < \infty$ *ist. Außerdem seien die kleinsten Eigenwerte der Matrizen $\left(\frac{\partial^2}{\partial f_i\, \partial f_j} g(f)\right)_{1 \leqq i,j \leqq r}$ für alle $(f_{r+1}, \ldots, f_{k-1}) \in \mathfrak{B}_0(k-1-r)$ gleichmäßig nach unten durch eine positive Konstante beschränkt. Dann existiert $\alpha = \lim\limits_{c \to 0} \ln V(c)/\ln c$, und es gilt $\alpha = r/2$. Es ist also für $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ mit* ($\mathfrak{B}$ 3)–($\mathfrak{B}$ 5)

$$\Phi(xA) = x^{k-2-r+o(1)} \exp\{-ax^2/2\}, \qquad x \to \infty. \tag{10}$$

Beweis: Wegen $\ln \mu^{(k-1-r)}\big(\mathfrak{B}_c(k-1-r)\big)/\ln c \to 0$ für $c \to 0$ und $\ln V(c) = \ln \mu^{(k-1-r)}\big(\mathfrak{B}_c(k-1-r)\big) + \ln \mu^{(r)}\big(\mathfrak{B}_c(r)\big)$ ist das Problem auf die Aussage von Satz 1 zurückgeführt ∎

Für die Betrachtung der folgenden Beispiele setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß $B$ mit der jeweiligen Einheitsmatrix übereinstimmt und $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ gilt.

Beispiel 1: Im Falle $\partial A = \{z \in \mathbf{R}^2 : \max(|z_1|, |z_2|) = 1\}$ ergibt sich $g(f) = R^2(f)$, $\mathfrak{B}_0 = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, $a = 1$. Wir betrachten ohne Einschränkung der Allgemeinheit im weiteren nur noch eine Umgebung von $f_0 = \pi/2$: $R(f) = 1/\sin f$ für $\pi/4 \leqq f \leqq 3\pi/4$, $g''(f_0) = 2$. Aus Satz 1 folgt $\alpha = 1/2$ und (9).

Beispiel 2: Im Falle $\partial A = \{z \in \mathbf{R}^3 : \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|) = 1\}$ gilt wieder $g(f) = R^2(f)$, $a = 1$. Wir betrachten $f_0 = (\pi/2, \pi/2) \in \mathfrak{B}_0$: $R(f) = 1/\sin f_1 \sin f_2$ für $\pi/4 \leqq f_i \leqq 3\pi/4$, $i = 1, 2$, $g''(f_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Aus Satz 1 folgt wiederum (9).

Beispiel 3: Es sei $\partial A = \{z \in \mathbf{R}^3 : -2 \leqq z_1 \leqq 2, z_2^2 + z_3^2 = 1\} \cup \{z \in \mathbf{R}^3 : |z_1| = 2, z_2^2 + z_3^2 \leqq 1\}$. Dann ist $\mathfrak{B}_0 = \{\pi/2\} \times [0, 2\pi)$, $a = 1$ und $g(f) = 1$ für $f \in \mathfrak{B}_0$. Ist $f_1 \neq \pi/2$ und $|f_1 - \pi/2| < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$, so wird $g(f) = R^2(f) = (\sin f_1)^{-2}$, $0 \leqq f_2 < 2\pi$. Weiter gilt $g''(\pi/2, f_2) = 2$ für alle $f_2 \in [0, 2\pi)$. Nach Satz 2 folgt mit $r = 1$, daß $\Phi(xA) = x^{o(1)} \exp\{-x^2/2\}$, $x \to \infty$ ist.

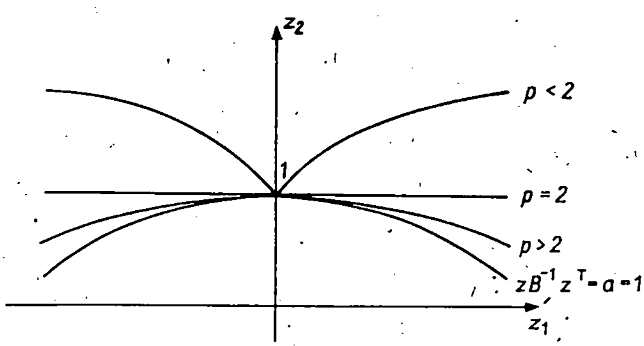


Abb.: Verlauf von $\partial A = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2 : z_1^2 + z_2^2 = 1 + |z_1|^p\}$ in $U = U((0, 1))$ für verschiedene $p > 0$.

Beispiel 4 (s. Abb.): Sei $N = 1$, und für eine Umgebung $U = U\big((0, 1)\big)$ des Punktes $(0, 1)$ gelte $U \cap \partial A \subseteq \mathfrak{M}_p = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2 : z_1^2 + z_2^2 = 1 + |z_1|^p\}$ für ein $p > 0$. Bezeichnet $(z_1^c, z_2^c)$ den Schnittpunkt der Kurven $\mathfrak{M}_p$ und $\{(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2:$

$zB^{-1}z^T = 1 + c\}$ für $z_1{}^c > 0$, $z_2{}^c > 0$, so ergibt sich $V(c) = 2 \arctan (z_1{}^c/z_2{}^c)$ und $\alpha = \lim_{c\to 0} \ln V(c)/\ln c = \lim_{c\to 0} \ln (2 \arctan \{c^{1/p}/(1 - c^{2/p} + c)^{1/2}\})/\ln c = 1/p$. Das heißt, es gilt

$$\Phi(xA) = x^{-2/p+o(1)} \exp \{-x^2/2\}, \qquad x \to \infty. \tag{11}$$

## 4. Weitere Präzisierungen mittels der Laplace-Methode

Eigentlich stellt ($\mathfrak{B}$ 5) aus Abschnitt 3 bereits eine für die Laplace-Methode typische Bedingung dar. In den Sätzen 1 und 2 ist die in ($\mathfrak{B}$ 5) enthaltene Information jedoch noch nicht hinreichend ausgewertet. Dies soll in Satz 3 geschehen.

Wir betrachten eine Familie $\{A(x)\}_{x>0}$ von Mengen $A(x)$ aus $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und eine Familie $\{B(x)\}_{x>0}$ von symmetrischen und regulären Matrizen, die im Hinblick auf wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen die Eigenschaft

$$B(x)^{-1} = \big(1 + o(1)\big)\, B^{-1}, \qquad x \to \infty \tag{$\mathfrak{L}$ 1}$$

besitzen sollen, wobei $B$ eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Die in den Abschnitten 1 und 2 eingeführten Bezeichnungen $R_A(f)$, $z(f, r)$, $g(f)$, $h(f)$, $a$, $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}(A)$ verwenden wir im folgenden völlig sinngemäß für jede Menge $A(x) \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und versehen sie zur Unterscheidbarkeit mit dem Index $x$: $R_x(f)$, $z_x(f, r)$, $g_x(f)$, $h_x(f)$, $a_x$, $\mathfrak{B}_{0x}$ und $\mathfrak{B}_x\big(A(x)\big)$. Mit Hilfe dieser Größen formulieren wir nun weitere Voraussetzungen.

$$H(f_{0x}) \neq 0 \text{ für alle } f_{0x} \in \mathfrak{B}_{0x} \text{ und alle } x > 0. \tag{$\mathfrak{L}$ 2}$$

$$\operatorname{card} \mathfrak{B}_{0x} = N < \infty \text{ für alle } x > 0. \tag{$\mathfrak{L}$ 3}$$

Diese Bedingungen stellen natürliche Verallgemeinerungen von ($\mathfrak{B}$ 3) und ($\mathfrak{B}$ 4) dar.

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, daß in $U(\mathfrak{B}_{0x}) = \{f \in \mathfrak{B}_x\big(A(x)\big) : \|f - f_{0x}\| < \varepsilon$ für ein $f_{0x} \in \mathfrak{B}_{0x}\} \subseteqq \mathfrak{B}_x\big(A(x)\big)$ die Matrix $g_x''(f)$ der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $g_x(f)$ existiert für alle $x > 0$. ($\mathfrak{L}$ 4)

Es seien $\delta$ und $\varrho$ reelle Funktionen auf $[0, \infty)$ mit $\delta(x) \to 0$, $\varrho(x) \to \infty$ und $\delta^2(x)\,\varrho(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Für jedes $x > 0$ bezeichne $\lambda_x(f)$ den kleinsten Eigenwert der Matrix $g_x''(f)$, $f \in U(\mathfrak{B}_{0x})$. (Im Falle $k = 2$ gilt $\lambda_x(f) = g_x''(f)$.)

$$\lambda_x(f) \geqq \varrho(x) \ln x/x^2, \text{ für alle } f \in \mathfrak{B}_{0x}, \quad x \geqq x_0. \tag{$\mathfrak{L}$ 5}$$

Es seien $\tilde{g}_x(f)$ die symmetrische, positiv definite Matrix mit

$$\tilde{g}_x(f)\, \tilde{g}_x{}^T(f) = g_x''(f), \qquad f \in U(\mathfrak{B}_{0x}), \qquad x > 0$$

und

$$\Omega(f_{0x}) = \big\{f \in \mathfrak{B}_x\big(A(x)\big) : \|(f - f_{0x})\, \tilde{g}_x(f)\| \leqq \lambda_x(f)^{1/2}\, \delta(x)\big\}$$

für $f_{0x} \in \mathfrak{B}_{0x}$, $x > 0$.

Für alle $f_{0x} \in \mathfrak{B}_{0x}$ gilt gleichmäßig bezüglich $f \in \Omega(f_{0x})$

$$g_x''(f) = \big(1 + o(1)\big)\, g_x''(f_{0x}), \qquad x \to \infty. \tag{$\mathfrak{L}$ 6}$$

Die Bedingungen ($\mathfrak{L}$ 4)—($\mathfrak{L}$ 6) gemeinsam verallgemeinern ($\mathfrak{B}$ 5).

$$g_x(f) \geqq a_x + 2(k + 2) \ln x/x^2 \quad \text{für} \quad f \in \mathfrak{B}_x\big(A(x)\big) \setminus U(\mathfrak{B}_{0x}), \quad x > 0. \tag{$\mathfrak{L}$ 7}$$

Zur Veranschaulichung dieser Bedingung sei an das oben angeführte Beispiel 4 erinnert. Der dort auftretende Parameter $p > 0$ kann zwar beliebig groß sein, darf aber nicht (ohne weitere Betrachtungen anzustellen) gemeinsam mit $x$ gegen Unendlich streben. Bedingung ($\mathfrak{L}$ 7) schließt dies jedoch in gewissen Grenzen nicht aus.

Satz 3: *Genügen eine Familie $\{A(x)\}_{x>0}$ von Mengen aus $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und eine Familie symmetrischer, positiv definiter Matrizen $\{B(x)\}_{x>0}$ den Bedingungen ($\mathfrak{L}$ 1)–($\mathfrak{L}$ 7), so gilt*

$$\Phi\big(xA(x)\big) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi} \det B} 2^{k/2-1} \sum_{\mathfrak{B}_{0x}} \frac{h_x(f_{0x})}{\sqrt{\det g_x''(f_{0x})}} x^{-1} \exp\{-x^2 a_x/2\}, \quad x \to \infty. \tag{12}$$

Aus diesem Satz folgt, daß unter sehr allgemeinen Bedingungen an $\partial A(x)$ für $x \to \infty$ die Größe $\Phi\big(xA(x)\big)$ mit der gleichen Ordnung $x^{-1} \exp\{-x^2 a_x/2\}$ gegen Null strebt, wie das entsprechende Gaußmaß eines Halbraumes mit Abstand $xa_x^{1/2}$ vom Koordinatenursprung. Der Einfluß der Dimension $k$ auf die entsprechende asymptotisch echte Konstante ist in (12) explizit angegeben.

Beweis von Satz 3: Der Einfachheit halber sei $N = 1$, $\mathfrak{B}_{0x} = \{f_{0x}\}$. Analog zu (1) erhält man für $x \to \infty$

$$\Phi\big(xA(x)\big) = \big((2\pi)^k \det B(x)\big)^{-1/2} x^{k-2} F(x) \big(1 + O(x^{-2})\big),$$

wobei

$$F(x) = \int_{\mathfrak{B}_x(A(x))} h_x(f) \exp\{-x^2 g_x(f)/2\}\, df$$

ist. Mit $I_{1x}$, $I_{2x}$ bzw. $I_{3x}$ bezeichnen wir Integrale mit dem gleichen Integranden und den Integrationsgebieten $\Omega(f_{0x})$, $\big(\mathfrak{B}_x(A(x)) \setminus \Omega(f_{0x})\big) \cap U(\mathfrak{B}_{0x})$ bzw. $\big(\mathfrak{B}_x(A(x)) \setminus \Omega(f_{0x})\big) \setminus U(\mathfrak{B}_{0x})$. Dann gilt $F(x) = I_{1x} + I_{2x} + I_{3x}$.

Aus ($\mathfrak{L}$ 7) folgt

$$I_{3x} \leqq \exp\{-x^2 a_x/2 - (k+1) \ln x\} \int_{\mathfrak{B}_x(A(x))} h_x(f)\, df$$

und damit

$$I_{3x} = O(1)\, x^{-1-k} \exp\{-x^2 a_x/2\}, \qquad x \to \infty.$$

Wegen $\operatorname{grad} g_x(f) = 0$ für ein $f \in \mathfrak{B}_{0x}$ erhält man nach Taylorentwicklung der Funktion $g_x$

$$I_{2x} = \int h_x(f) \exp\big\{-x^2 a_x/2 - x^2 (f - f_{0x})\, g_x''(f)\, (f - f_{0x})^T \big(1 + o(1)\big)/4\big\}\, df.$$

Für alle $f \in \mathfrak{B}_x\big(A(x)\big) \setminus \Omega(f_{0x})$ gilt $(f - f_{0x})\, g_x''(f)\, (f - f_{0x})^T > \lambda_x(f)\, \delta^2(x)$. Deshalb und wegen $h_x(f) \geqq 0$ gilt

$$I_{2x} \leqq \exp\big\{-x^2 a_x/2 - x^2\big(1 + o(1)\big) \lambda_x(f)\, \delta^2(x)/4\big\} \int h_x(f)\, df.$$

Aus ($\mathfrak{L}$ 5) und den Eigenschaften der Funktionen $\varrho$ und $\delta$ folgt schließlich

$$I_{2x} = o(1)\, x^{-1-k} \exp\{-x^2 a_x/2\}, \qquad x \to \infty.$$

Aus ($\mathfrak{L}$ 1), ($\mathfrak{L}$ 2) und ($\mathfrak{L}$ 6) folgt, daß gleichmäßig bezüglich $f \in \Omega(f_{0x})$ gilt $h_x(f) = h_x(f_{0x})\big(1 + o(1)\big)$, $x \to \infty$. Das gestattet es, [4: Satz 4.6] anzuwenden, wobei die dort auftretende Funktion $\mu$ in der Form $\mu(x) = \delta(x)\big(x^2 \lambda_x(f)/2\big)^{1/2}$ gewählt werden kann. Es ergibt sich damit für $x \to \infty$

$$\Phi\big(xA(x)\big) = \big(1 + O(1/x^2)\big)\big((2\pi)^k \det B(x)\big)^{-1/2} x^{k-2} I_{1x},$$

wobei

$$I_{1x} = (1 + o(1)) \frac{\pi^{(k-1)/2}\, 2^{k-1}\, h(f_{0x})}{(\det g_x''(f_{0x}))^{1/2}}\, x^{1-k} \exp\{-x^2 a_x/2\}$$

ist ∎

In dem Spezialfall, daß sowohl $R_x(\cdot)$ als auch $B(x)$ nicht von $x$ abhängen, sind die Voraussetzungen von Satz 1, d. h. $A \in \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ mit ($\mathfrak{B}$ 3)—($\mathfrak{B}$ 5) hinreichend für die Erfüllung der Voraussetzungen von Satz 3. In den oben angeführten Beispielen 1 und 2 ist dies der Fall, und aus Satz 3 folgen für diese Beispiele die Beziehungen

$$\Phi(xA) = (1 + o(1)) \cdot 2 \cdot (2/\pi)^{1/2}\, x^{-1} \exp\{-x^2/2\}, \quad x \to \infty$$

bzw.

$$\Phi(xA) = (1 + o(1)) \cdot 3 \cdot (2/\pi)^{1/2}\, x^{-1} \exp\{-x^2/2\}, \quad x \to \infty,$$

welche Präzisierungen von (9) hinsichtlich der Potenz von $x$ und der Konstanten darstellen.

## LITERATUR


[1] ELLIS, R. S., and J. S. ROSEN: Laplace's method for Gaussian integrals with an application to Statistical Mechanics. Ann. Prob. **10** (1982), 46—66.

[2] ELLIS, R. S., and J. S. ROSEN: Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I: Isolated minimum points. Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 447—481.

[3] ELLIS, R. S., and J. S. ROSEN: Asymptotic analysis of Gaussian integrals. II: Manifold of minimum points. Comm. Math. Phys. **82** (1981), 153—181.

[4] ФЕДОРЮК, М. В.: Метод перевала. Москва: Изд-во Наука 1977.

[5] МАСЛОВ, В. П., и М. В. ФЕДОРЮК: Логарифмическая асимптотика интегралов Лапласа. Мат. заметки **30** (1981), 763—768.

[6] RICHTER, W.-D.: Moderate deviations in special sets of $\mathbf{R}^k$. Math. Nachr. **113** (1983), 339—354.

[7] RICHTER, W.-D.: Laplace-Gauss-integrals, Gaussian measure asymptotic behaviour and probabilities of moderate deviations. Z. Anal. Anw. **4** (1985), 257—267.

[8] RICHTER, W.-D.: Remark on moderate deviations in the multi-dimensional central limit theorem. Math. Nachr. (in print).

[9] РИХТЕР, В.-Д.: Интеграл Лапласа и вероятности умеренных уклонений в $\mathbf{R}^k$. В сб.: Труды III-ей Ферганской конф. по теории вероятн. и мат. стат. (в печати).


Manuskripteingang: 15. 11. 1983; in revidierter Fassung: 17. 04. 1984

VERFASSER:

HARTMUT BIRNDT und Dr. WOLF-DIETER RICHTER
Sektion Mathematik der Technischen Universität
DDR-8027 Dresden, Mommsenstr. 13