Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (4) 1985, S. 291–303

Approximation durch Lösungen partieller Differentialgleichungen

A. Göpfert, G. Wanka und J. Wanka

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

Fußend auf früheren L_2-Approximationssätzen von H. Beckert und den Autoren werden solche Sätze im Falle der gleichmäßigen Approximation längs einer Oberfläche Γ studiert, welche im Innern des Gebietes eines Randwertproblems einer linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung liegt, die Eigenlösungen im durch Γ berandeten Gebiet hat.

Опираясь на теоремы L_2-аппроксимации, доказанные ранее G. Беккертом и авторами, приводятся подобные теоремы в случае равномерной аппроксимации вдоль поверхности Γ, находящейся внутри области определения краевой задачи линейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, имеющей собственные решения в области с краем Γ.

Remembering earlier L_2-approximation theorems of H. Beckert and the authors such approximations are studied in the uniform sense along a surface Γ, which is lying in the interior of the domain of a boundary value problem of a linear elliptic differential equation of second order, having eigen-solutions in the domain bounded by Γ.

Vor 25 Jahren bewies H. Beckert [1] für eindeutig lösbare Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, daß bei einer hinreichend glatten Randwertaufgabe im Gebiet Ω die durch Variation der Randwerte erzeugte Menge von Lösungen, eingeschränkt auf ein im Innern von Ω liegendes hinreichend glattes Hyperflächenstück Γ (welches Ω nicht zerlegt) dicht liegt im Hilbertraum $L_2(\Gamma)$, also, daß man vom Rande aus jede Funktion $f \in L_2(\Gamma)$ im quadratischen Mittel beliebig genau approximieren kann. Dieses Resultat wird ergänzt durch entsprechende Sätze für die Bipotentialgleichung und durch die Berücksichtigung von Ableitungen von f längs Γ bzw. Approximation durch Normalableitungen der Lösungen. Im folgenden wird auf die weitere Entwicklung in diesem Problemkreis eingegangen (Kap. I) und ein Satz über gleichmäßige Approximation längs Γ bewiesen, wobei Γ das Gebiet Ω zerlegt und Eigenlösungen im Innern des durch Γ beschriebenen Gebietes auftreten (Kap. II). Dieser Fall entzog sich bisher den Betrachtungen.

I.

a)

Die Bedeutung der genannten Sätze für die Mathematik liegt u. a. darin, daß Dichtheitsaussagen für die Erreichbarkeitsmenge gelten, wenn man das genannte Approximationsproblem als Steuerproblem „vom Rande her" auffaßt und die Steuermenge nicht restringiert, daß man das Approximationsproblem aber auch als Optimierungsproblem auffassen kann, und dann interpretiert sich die mit dem Cauchyschen Anfangswertproblem für elliptische Gleichungen zusammenhängende Instabilität im

Hadamardschen Sinne gerade als jene mit der Antwort auf Störungen zusammenhängende Stabilität der Dualitätstheorie der Optimierung, und daß schließlich die drei wesentlichen Beweisideen von H. Beckert, Ausnutzen des Unitätssatzes für ein elliptisches Anfangswertproblem, Ausnutzung der Lösungsdarstellung über Greensche Funktionen und Studium der zur erreichbaren Menge komplementären Menge (im L_2-Sinne) sehr anregend waren zu gehaltvollen Ausdehnungen der Resultate (s. Kap. I. b)).

Besondere Beachtung verdienen die Arbeiten [2] von H. BECKERT und die folgende Dissertation [23] seines Schülers G. SCHMIDT, in denen gezeigt wird, wie mit dem Ideengehalt der Dichtheitssätze die Stabilitätsgrenzen (Eigenwerte) einer dünnen Platte durch Abänderung der in der Plattenebene wirkenden Randkräfte entlang eines beliebig kleinen Randstücks weitgehend gesteuert werden können [2] und wie das Resultat auf dünne elastische flache Schalen ausgedehnt werden kann [23]. Auf den Zusammenhang mit dem Prinzip von St. Venant aus der klassischen linearen Elastizitätstheorie, welches Aussagen macht über die Wirkung von Einflüssen vom Rande her im Innern gewisser elastischer Körper (vgl. etwa [10, 22]) und den Dichtheitssätzen für die linearen elastischen Differentialgleichungen soll nur hingewiesen werden.

b)

Die durch die grundlegende Arbeit [1] von H. BECKERT angeregte Entwicklung bezog zunächst den Fall der Eigenlösungen (über verallgemeinerte Greensche Funktionen) und dann Flächen Γ, die Ω zerlegen, ein. Im letzteren Fall wurden als Beweismittel die Sprungrelationen der Potentialtheorie eingesetzt [11]. Es zeigt sich hier in jüngster Zeit, daß auch das lineare System der Stokes-Gleichungen einbezogen werden kann [15], da für die hydrodynamischen Potentiale ebensolche Sprungrelationen gelten. Eine wesentlich neue Qualität wurde erreicht, als Kontaktaufgaben mit berücksichtigt wurden [26, 29] und die Lösungsdarstellung durch Potentiale (statt durch die Greenschen Funktionen) berücksichtigt wurde. Bei der Verwendung der Potentialansätze muß der gesamte Rand als Variationsgebiet für die Dichten dienen. Dabei gelingt es, die im Beweis notwendige Unität eines Cauchy-Problems über die Betrachtung des entsprechenden Potentials im Außenraum zu ersetzen.

Von besonderem Interesse ist die gleichmäßige Approximation längs Γ. Jetzt müssen Banachräume längs Γ betrachtet werden und die auftretenden Potentiale enthalten Maße (statt L_2-Dichten), so daß keine Sprungrelationen mehr gelten. Die verschiedenen ersten Arbeiten hierzu von G. ANGER, A. GÖPFERT, B. W. SCHULZE und G. WILDENHAIN, G. WANKA sind bei G. WANKA [27] aufgezählt; ihm gelang es [27], die gleichmäßige Approximation bei geschlossenen Flächen zu beweisen. Es mußte dazu der Kapazitätsbegriff der modernen Potentialtheorie herangezogen werden, der die erwähnten Sprungbeziehungen ersetzt. Im Kap. II beziehen wir uns auf seine Arbeit [27] und beweisen einen Satz bei Vorhandensein von Eigenlösungen im Innern des von Γ berandeten Gebietes. Es sei noch hinzugefügt, daß F. E. BROWDER in [3, 4] in Zusammenhang mit der Arbeit [1] von H. BECKERT Approximationssätze etwas anderen Charakters (auch für Gleichungen höherer Ordnung) gewinnt.

In einer Reihe von Arbeiten [31—33] verallgemeinerte G. WILDENHAIN die Fragestellungen auf allgemeine elliptische Randwertprobleme beliebiger Ordnung und bewies entsprechende Approximationssätze. Dabei wird im Unterschied zu den Arbeiten von H. BECKERT [1], A. GÖPFERT [11, 12], J. WANKA [29], G. WANKA [27] die Aufgabenstellung nicht mit dem Cauchy-Problem in Zusammenhang gebracht, sondern mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Lösungen im Kleinen, welche vom adjungierten Operator gefordert wird. Diese besagt, daß aus dem Verschwinden von u in einer nichtleeren offenen Teilmenge $G \subset \Omega$ folgt, daß u dann im ganzen

Gebiet Ω, wo $L^*u = 0$ gilt, verschwindet. Dabei wird die Dichtheit bei Variation der Randbedingungen auf einen Satz zurückgeführt, der die Dichtheit bei Variation der rechten Seite g der Differentialgleichung $Lu = g$ in einem Teilgebiet $G \subset \Omega$ behauptet. Insbesondere in [31] wird die Dichtheit im Sobolewraum $W_2^{2m-1}(\Gamma)$ (L ist Differentialoperator $2m$-ter Ordnung) verifiziert, wobei Γ das Gebiet Ω nicht zerlegt.

In einer neuen Arbeit von U. Hamann und G. Wildenhain [14] gelingt es, die Approximation sogar im Raum $W_p^{2m-1/p}(\Gamma)$, $p > 1$, zu zeigen. Dabei werden als Beweismethodik die funktionalanalytischen Sätze über Spuren (Einschränkung der Lösung auf Γ) und eine geschickte Definition einer Bilinearform zu $W_p^{2m-1/p}$ und dem Dualraum ausgenutzt. Falls Γ das Gebiet Ω zerlegt, wird die Dichtheit in $W_2^{2m-1}(\Gamma)$ gezeigt, wenn die Randdaten bzw. rechten Seiten der Differentialgleichung auf Randteilen bzw. Teilgebieten von $\partial\Omega$ bzw. Ω variiert werden, die teilweise innerhalb und teilweise außerhalb Γ liegen. Demgegenüber werden in [32] und [33] entsprechende Ergebnisse hinsichtlich gleichmäßiger Approximation erzielt und zwar bis zur $(m - 1)$-ten Ableitung auch bei Ω zerlegendem Γ (Dichtheit im Raum $W^{m-1}(\Gamma)$ der Whitney-Taylorfelder).

Die von H. Beckert in [1] aufgeworfene Fragestellung ist auch für parabolische Randanfangswertprobleme anregend. Wir verwenden die Sprechweise bei der Wärmeleitungsgleichung.

Variiert man die Anfangsbedingungen, um zu einem festen Zeitpunkt $t_0 > 0$ eine vorgegebene Temperatur zu approxieren, bzw. variiert man die Randbedingungen (in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$), um in diesem Zeitintervall auf einem im Innern des Lösungszylinders Ω liegenden Hyperflächenstück Γ, welches keine Normalen in t-Richtung hat und Ω nicht zerlegt, eine vorgegebene Temperatur zu approximieren, so kommt man zu Dichtheitssätzen wie im elliptischen Fall. Zu weiteren Sätzen, auch bei parabolischen Gleichungen höherer Ordnung, kommt J. Schmidt in seiner von H. Beckert angeregten Dissertation [24], bei der neben Mitteln der (parabolischen) Potentialtheorie Halbgruppeneigenschaften abgeschlossener Operatoren eingesetzt werden. Als im Hadamardschen Sinne inkorrekte Probleme treten bei den erwähnten parabolischen Problemen das backwardproblem bzw. ein Cauchyproblem längs des Zylinderrandes auf (es gelten entsprechende Unitätssätze von Friedman, Ito-Yamabe; Lions-Malgrange und Mizohata) [8, 24, 19]. Man ist bei der Untersuchung dieser Approximationsprobleme ganz in der Nähe einer in der Steuertheorie sehr oft behandelten Problematik, bei beschränktem Steuerbereich die Temperatur zur Zeit $t_0 > 0$ vom Rande oder Anfang her zu kontrollieren. J. V. Egorov [6], A. Friedman [8], W. Krabs [17], K. Glashoff [9], H. O. Fattorini [7], N. Weck [30] und J. L. Lions [19] seien als Hauptvertreter dieser Arbeitsrichtungen genannt.

Bei den insbesondere aus der Elastizitätstheorie stückweise homogener Körper (vgl. L. Jentsch [16] und J. Maul [20]) bekannten Kontaktaufgaben, bei denen zusätzlich zu den Randbedingungen an der Trennfläche der elastisch homogenen Teilstücke des Körpers Kontaktbedingungen auftreten, ist neben dem Einfluß der Randwertänderungen vor allem der Einfluß von Änderungen der Kontaktbedingungen auf die Lösung der Randkontaktaufgabe von Interesse. G. Wanka [26] und J. Wanka [29] zeigten Dichtheitsaussagen bei elliptischen bzw. parabolischen Randkontaktaufgaben für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung und Kontaktbedingungen der Art, daß auf der Kontakthyperfläche stets die Differenz der Grenzwerte der Funktionswerte und die Differenz der Grenzwerte der Konormalenableitung beiderseits der Trennfläche vorgegeben sind.

Die Variation der Randbedingungen wirkt sich auf die Eigenschaften der Lösung der Randkontaktprobleme in der gleichen Art wie bei den Randwertaufgaben aus. Werden die Randbedingungen festgehalten, so müssen beide Kontaktvorgaben auf einem kleinen Teilstück der Trennflächen variieren, damit die entsprechende Lösungsmenge dicht in L_2 über einem Hyperflächenstück liegt. Läßt man eine Kontaktvorgabe unverändert, so muß die andere entlang der gesamten Trennfläche variieren um eine dichte Lösungsmenge zu erhalten.

II.

In [27] wurde, wie bereits erwähnt, das Problem der gleichmäßigen Approximation bei geschlossener Fläche Γ für einen linearen, elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung betrachtet und die Dichtheit der auf Γ eingeschränkten Lösungen in $C(\Gamma)$ gezeigt, falls das von Γ umschlossene Gebiet Ω_i ($\partial\Omega_i = \Gamma$) keine Eigenlösungen bez. des Dirichletproblems aufweist. Im folgenden soll dargelegt werden, daß beim Vorhandensein von Eigenlösungen bez. des Dirichletproblems für Ω_i die Dichtheit der auf Γ eingeschränkten Lösungen in einem Teilraum $H(\Gamma)$ endlicher Codimension von $C(\Gamma)$, der mit den Eigenlösungen im Zusammenhang steht, vorliegt.

Im Anschluß an die Untersuchungen von G. Wildenhain [31—33] für elliptische Differentialoperatoren höherer Ordnung, wo bez. Ω_i in der Regel eindeutige Lösbarkeit des Dirichletproblems vorausgesetzt und bemerkt wird (vgl. [32: Theorem 5]), daß bei der Existenz von Eigenlösungen für Ω_i keine Dichtheit in den dort betrachteten Räumen vorliegt (bei Variation der Randdaten auf einem Teilstück des Randes, welches ganz außerhalb (analog innerhalb) der Fläche Γ liegt, jedoch bei Aufspaltung des Variationsgebietes in einen innerhalb und einen außerhalb von Γ gelegenen Teil, resultiert auch hier die Dichtheit in $W_2^{2m-1}(\Gamma)$ (vgl. [31: Satz 4]) bzw. in $W^{m-1}(\Gamma)$ (vgl. [33: Theorem 5])), kann auch bei Existenz von Eigenlösungen in Ω_i Dichtheit in gewissen Räumen integrierbarer bzw. stetiger Funktionen über Γ nachgewiesen werden, ohne daß das Variationsgebiet der Randbedingungen derartig aufgespaltet wird [28].

Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ mit

$$\partial\Omega \in C^{(2,\lambda)} \quad (m \geqq 2), \quad x = (x_1, \ldots, x_m),$$

$$Lu(x) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u_{ik}(x)}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)\, u(x),$$

$$a_{ik} \in C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega}), \; b_i \in C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega}), \; c \in C^{(0,\lambda)}(\bar{\Omega}).$$

$\Gamma \in C^{(1,\lambda)}$ sei ein ganz im Inneren von $\bar{\Omega}$ liegendes, Ω zerlegendes $(m-1)$-dimensionales Flächenstück, welches das Gebiet Ω_i berandet ($\partial\Omega_i = \Gamma$). Sei $\Omega_a = \Omega \setminus \bar{\Omega}_i$ das außerhalb Γ liegende Teilgebiet von Ω. Die Normale n sei auf $\partial\Omega$ bzw. Γ in das Äußere von Ω bzw. Ω_i gerichtet. Wir betrachten ein beliebiges offenes (bez. der auf $\partial\Omega$ erzeugten Spurtopologie des euklidischen Raumes $\mathbf{R}^m$) Teilgebiet V von $\partial\Omega$ mit der Absicht, die Randvorgaben (bez. des Dirichletproblems für Ω) auf V beliebig zu variieren, auf $\partial\Omega \setminus V$ festzuhalten und die Möglichkeit zu studieren, auf Γ vorgegebene stetige Funktionen gleichmäßig zu approximieren durch die Lösungen des Dirichletproblems eingeschränkt auf Γ.

Das homogene Dirichletproblem

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

besitze $n \geqq 0$ linear unabhängige Eigenlösungen $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ (je $n+1$ Lösungen seien linear abhängig). Dann hat bekanntlich (vgl. [21]) auch das homogene adjungierte Dirichletproblem

$$L^*v = 0 \text{ in } \Omega, \quad \bar{v}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

n linear unabhängige Eigenlösungen $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$. Die Eigenlösungen seien dabei jeweils orthonormiert in $L_2(\Omega)$ gewählt. Weiter möge das homogene Dirichletproblem bez. Ω_i p ebenfalls orthonormierte (im Sinne des $L_2(\Omega_i)$) Eigenlösungen besitzen: $\tilde{u}^{(1)}, \ldots, \tilde{u}^{(p)}$ Lösungen von

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega_i, \quad u|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

$\tilde{v}^{(1)}, \ldots, \tilde{v}^{(p)}$ Lösungen von

$$L^*v = 0 \text{ in } \Omega_i, \quad v|_\Gamma = 0. \tag{4}$$

Wir führen jetzt den erwähnten Raum $H(\Gamma)$ ein und betrachten dazu auf $C(\Gamma)$ (Raum der stetigen Funktionen auf Γ mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz) die linearen beschränkten Funktionale

$$l_k(h) = \int_\Gamma h(x)\, a(x)\, \frac{d\tilde{v}^{(k)}(x)}{d\nu_x}\, d\sigma(x), \quad k = 1, \ldots, p.$$

ν_x bezeichne die Konormale in x bezüglich Γ, σ sei das Lebesguesche Oberflächenmaß auf Γ,

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \nu_x} = \frac{1}{a(x)} \sum_{i=1}^m \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \sum_{k=1}^m a_{ik} \cos(n, x_k),$$

$$a(x) = \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m a_{ik}(x) \cos(n, x_k)\right)^2\right]^{1/2}.$$

Dann ist der Kern

$$\operatorname{Ker} l_k = \{h \in C(\Gamma) : l_k(h) = 0\}$$

ein Teilraum von $C(\Gamma)$ mit der Codimension 1. Es bezeichne

$$H(\Gamma) := \bigcap_{k=1}^p \operatorname{Ker} l_k, \; H(\Gamma) := C(\Gamma) \quad \text{für} \quad p = 0,$$

und

$$M(\Gamma) = \{u|_\Gamma : Lu = 0 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi\}, \tag{5}$$

wobei $\varphi \in C(\partial\Omega)$ und $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega \setminus V$ ist.

Satz: *Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Linearmannigfaltigkeit $M(\Gamma)$ der Lösungen des Dirichletproblems eingeschränkt auf Γ dicht im Funktionenraum $H(\Gamma)$.*

Bemerkung: Die Dichtheit trifft natürlich auch für das Dirichletproblem mit inhomogener Differentialgleichung $Lu = f$ sowie $\varphi \neq 0$ auf $\partial\Omega \setminus V$ zu, da es sich hierbei nur um eine Translation der Lösungen handelt.

Beweis des Satzes: Seien $M(\Gamma)^\perp$ der Annihilator von $M(\Gamma)$ bezüglich $H(\Gamma)$, $H'(\Gamma)$ der Dualraum der linearen stetigen Funktionale von $H(\Gamma)$:

$$M(\Gamma)^\perp = \{l \in H'(\Gamma) : l(u) = 0 \;\forall\; u \in M(\Gamma)\}.$$

$M(\Gamma)$ ist genau dann dicht in $H(\Gamma)$, wenn $M(\Gamma)^\perp$ nur aus dem Nullfunktional besteht. Wir machen deshalb den Ansatz

$$l(u) = 0 \;\forall\; u \in M(\Gamma), \quad l \in H'(\Gamma) \tag{6}$$

und haben $l = 0$ (Nullfunktional) zu zeigen.

Der Dualraum von $H(\Gamma)$ kann mit einem Faktorraum identifiziert werden ($H(\Gamma)$ ist Teilraum von $C(\Gamma)$):

$$H'(\Gamma) \cong C'(\Gamma) \setminus H(\Gamma)^\perp;$$

$H(\Gamma)^\perp$ Annihilator bez. $C(\Gamma)$, $C'(\Gamma)$ Dualraum von $C(\Gamma)$.

Hilfssatz 1: *Jedes $l \in H'(\Gamma)$ läßt sich mittels eines Maßes $\mu \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ (Radon-Maß) in folgender Form eindeutig darstellen:*

$$l(w) = \mu(w) = \int_\Gamma w(x)\, d\mu(x) \;\forall\; w \in H(\Gamma),$$

wobei gilt

$$\mu\left(a \frac{\partial \tilde{v}^{(k)}}{\partial \nu}\right) = \int_\Gamma a(x) \frac{\partial \tilde{v}^{(k)}(x)}{\partial \nu}\, d\mu(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{7$'$}$$

Bei $p = 0$, d. h. $H(\Gamma) = C(\Gamma)$, entfällt die letzte Gleichung.

Hilfssatz 1 ergibt sich mittels des Satzes von Hahn-Banach durch Fortsetzung eines linearen Funktionals über $H(\Gamma)$ auf ganz $C(\Gamma)$. Die nichteindeutige Fortsetzung kann durch (7)′ eindeutig gemacht werden ∎

Unter Verwendung des Hilfssatzes 1 lautet der Ansatz (6):

$$l(u) = \mu(u) = \int_\Gamma u(x)\, d\mu(x) = 0 \tag{7}$$

mit $\mu\left(a \frac{\partial \tilde{v}^{(k)}}{\partial \nu}\right) = 0$, $k = 1, \ldots, p$, $\forall\; u \in M(\Gamma)$. $\mu = 0$ (Nullmaß) ist zu zeigen. Wir substituieren $u(x)$ in (7) mit Hilfe der Greenschen Darstellungsformel. Wegen (5) gilt dann (mit α_i beliebig reell):

$$0 = \mu(u) = \int_\Gamma \left(\int_V a(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y)\, d\sigma(y)\right) d\mu(x) + \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{(i)}(x)\right) d\mu(x). \tag{8}$$

Dabei ist $G(x, y)$ die Greensche Funktion im erweiterten Sinne des Dirichletproblems (vgl. [21]).

In (8) verschwindet das zweite Integral über Γ, da α_i beliebige reelle Werte annehmen kann, und somit gilt

$$\int_\Gamma u^{(i)}(x)\, d\mu(x) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Die wegen der Existenz von Eigenlösungen für (1) vorhandenen notwendigen Lösbarkeitsbedingungen (vgl. [21]) haben infolge (5) hier die Gestalt

$$\int_V \varphi(y)\, a(y) \frac{\partial \hat{v}^{(i)}(y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (8) ($\Gamma \cap V = \emptyset$) liefert

$$0 = \int_V \varphi(y)\, a(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\int_\Gamma G(x, y)\, d\mu(x) \right) d\sigma(y),$$

woraus mit (10)

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} \int_\Gamma G(x, y)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial v^{(i)}(y)}{\partial \nu_y}, \quad y \in V, \tag{11}$$

mit gewissen rellen Zahlen β_i ($i = 1, \ldots, n$) geschlußfolgert werden kann. Sei

$$A_1(y) = G^*\mu(y) := \int_\Gamma G(x, y)\, d\mu(x), \quad y \in \bar{\Omega}; \tag{12}$$

und

$$A(y) = A_1(y) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v^{(i)}(y), \quad y \in \bar{\Omega}.$$

Dann gilt für $y \in V$ $A(y) = 0$, $\dfrac{\partial A(y)}{\partial \nu_y} = 0$ wegen des Randverhaltens von $G(x, y)$, $v^{(i)}$ bzw. infolge (11). Mit (2), (9) und

$$L_y^* G(x, y) = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)}(x)\, u^{(i)}(y) \quad \text{für} \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y,$$

wird für $y \in \Omega \setminus \Gamma$ (vgl. [27]) $L^* A(y) = 0$ (L^* bezeichne den formal adjungierten Differentialoperator zu L). $A(y)$ genügt also einem Gauchyschen Anfangswertproblem längs V und nach einem Unitätssatz von H. O. Cordes [5] resultiert $A(y) = 0$ in Ω_a und damit

$$A_1(y) = G^*\mu(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v^{(i)}(y) =: \hat{v}(y), \quad y \in \Omega_a. \tag{13}$$

Im folgenden zweiten Beweisteil wollen wir auf das Verhalten des Greenschen Potentials $G^*\mu$ in Ω_i schließen. Dazu verifiziert man zunächst (vgl. [27]), daß (13) auch auf Γ bis auf eine Menge der Wienerschen Kapazität Null (vgl. [25, 27]) zutrifft. $F(x, y)$ sei die unter den gemachten Voraussetzungen existierende Greensche Funktion im erweiterten Sinne des adjungierten Dirichletproblems bezüglich Ω_i (vgl. [21]). Wir definieren für $z \in \Omega_i$ die Funktion

$$w(z) = -\int_\Gamma G^*\mu(y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y). \tag{14}$$

Nach den Überlegungen in [27] kann $G^*\mu(y)$ auf ganz Γ (auch auf der möglichen Ausnahmemenge der Kapazität Null) durch $\hat{v}(y)$ ersetzt werden, ohne daß sich der Wert des Integrals bei (14) ändert. Mithin ist

$$w(z) = -\int_\Gamma \hat{v}(y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y).$$

Dies ist die Greensche Lösungsdarstellung für das adjungierte Dirichletproblem

$$L^* w = 0 \quad \text{in } \Omega_i, \quad w|_\Gamma = \hat{v}|_\Gamma. \tag{15}$$

Da $\hat{v}$ selbst Lösung von (15) ist, das homogene Problem (4) zu (15) aber die linear unabhängigen Eigenlösungen $\tilde{v}^{(1)}, \ldots, \tilde{v}^{(p)}$ aufweist, so wird sich i. a. w von $\hat{v}$ in Ω_1 um eine Eigenlösung

$$v^*(z) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \tilde{v}^{(k)}(z), \quad \gamma_k \text{ gewisse reelle Zahlen}, \tag{16}$$

unterscheiden: $w(z) = \hat{v}(z) + v^*(z)$. Mit (14) und (12) bekommen wir

$$\hat{v}(z) + v^*(z) = -\int_\Gamma G^*\mu(y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, \partial\sigma(y)$$

$$= -\int_\Gamma \left(\int_\Gamma G(x, y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) \right) d\mu(x)$$

nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge (Satz von Fubini-Tonelli). Mit $G(x, y) = \Psi(x, y) + R(x, y)$, wobei $\Psi(x, y)$ eine Fundamentallösung bezüglich y von $L^*v = 0$ ist (existiert unter unseren Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten von L bzw. an Ω (vgl. [21])) und $R(x, y)$ den regulären Anteil der Greenschen Funktion darstellt, gelangt man zu

$$\hat{v}(z) + v^*(z) = -\int_\Gamma \left(\int_\Gamma \Psi(x, y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) \right) d\mu(x)$$

$$- \int_\Gamma \left(\int_\Gamma R(x, y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) \right) d\mu(x). \tag{17}$$

$R(x, y)$ genügt laut Definition der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} L_y^* R(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} u^{(i)}(x)\, u^{(i)}(y) \quad \text{für} \quad x, y \in \Omega, \\ R(x, y) &= -\Psi(x, y) \quad \text{für} \quad x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{18}$$

$R(x, y)$ ist insbesondere auch Lösung der Differentialgleichung bei (18) in Ω_1 und deshalb mittels der Greenschen Lösungsdarstellung des adjungierten Dirichletproblems bezüglich Ω_1 darstellbar:

$$R(x, z) = -\int_\Gamma R(x, y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y)$$

$$- \int_{\Omega_1} \left(\sum_{j=1}^{n} u^{(j)}(x)\, u^{(j)}(y) \right) F(z, y)\, dy + \sum_{k=1}^{p} \delta_k(x)\, \tilde{v}^{(k)}(z). \tag{19}$$

Bemerkung: Der Anteil $\sum_{k=1}^{p} \delta_k(x)\, \tilde{v}^{(k)}(z)$ tritt auf, weil die Integraldarstellung mittels der Greenschen Funktion eine spezielle Lösung des nicht eindeutig lösbaren Randwertproblems liefert. Bei den Normierungsbedingungen

$$\int_{\Omega_1} \tilde{v}^{(k)}(z)\, F(z, y)\, dz = 0, \quad y \in \Omega_1,$$

bzw.

$$\int_{\Omega_i} \tilde{u}^{(k)}(y)\, F(z, y)\, dy = 0\,, \quad z \in \Omega_i\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

ist die mittels Greenscher Lösungsdarstellung gelieferte Lösung gerade orthogonal (im Sinne des $L_2(\Omega_i)$) zu allen Eigenlösungen $\tilde{v}^{(k)}$, was für $R(x, z)$ als Lösung von (18) i. a. nicht von vornherein zutreffen wird (dies hängt von der speziellen Wahl der Orthogonalsysteme der Eigenlösungen für die Gebiete Ω bzw. Ω_i ab). x spielt in (18) bzw. (19) die Rolle eines Parameters und folglich werden die Koeffizienten δ_k Funktionen von x sein. Unter den gegebenen Voraussetzungen (festgelegte Wahl der Orthogonalsysteme der Eigenlösungen) sind die $\delta_k(x)$ eindeutig bestimmte und stetige (sogar glatte wegen der Glattheit von R) Funktionen.

Wir setzen (19) in (17) ein und bekommen

$$\begin{aligned}
\hat{v}(z) + v^*(z) &= -\int_\Gamma \left(\int_\Gamma \Psi(x, y)\, a(y)\, \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y)\right) d\mu(x) \\
&\quad + \int_\Gamma \left[R(x, z) + \int_{\Omega_i} \left(\sum_{j=1}^{n} u^{(j)}(x)\, u^{(j)}(y)\right) F(z, y)\, dy \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{p} \delta_k(x)\, \tilde{v}^{(k)}(z)\right] d\mu(x) \\
&= -\int_\Gamma \left(\int_\Gamma \Psi(x, y)\, a(y)\, \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y)\right) d\mu(x) \\
&\quad + \int_\Gamma R(x, z)\, d\mu(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma u^{(j)}(x) \left(\int_{\Omega_i} u^{(j)}(y)\, F(z, y)\, dy\right) d\mu(x) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{p} \left(\int_\Gamma \delta_k(x)\, d\mu(x)\right) \tilde{v}^{(k)}(z) \\
&= -\int_\Gamma \left(\int_\Gamma \Psi(x, y)\, a(y)\, \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y)\right) d\mu(x) \\
&\quad + \int_\Gamma R(x, z)\, d\mu(x) - \bar{v}(z)\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

wobei (9) benutzt und

$$\bar{v}(z) = \sum_{k=1}^{p} \left(\int_\Gamma \delta_k(x)\, d\mu(x)\, \tilde{v}^{(k)}(z)\right)$$

gesetzt wurde.

Weiterhin benötigen wir folgenden

Hilfssatz 2: *Unter unseren Voraussetzungen gilt für $x \in \Gamma$ die Identität*

$$-\int_\Gamma \Psi(x, y)\, a(y)\, \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) = \Psi(x, z) - \sum_{k=1}^{p} \vartheta_k(x)\, \tilde{v}^{(k)}(z) \tag{21}$$

mit

$$\vartheta_k(x) = \int_{\Omega_i} \Psi(x, z)\, \bar{v}^{(k)}(z)\, dz.$$

Beweis: Für $x \in \Omega_a$ ist die Fundamentallösung $\Psi(x, z)$ bezüglich $z \in \Omega_i$ Lösung der homogenen adjungierten Differentialgleichung und kann deshalb mittels der Greenschen Funktion $F(z, y)$ dargestellt werden:

$$\Psi(x, z) = -\int_{\Gamma} \Psi(x, y)\, a(y) \frac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) + \sum_{k=1}^{p} \vartheta_k(x)\, \bar{v}^{(k)}(z). \tag{22}$$

Hierbei liefert das Integral den Anteil der Lösung, welcher orthogonal zu den Eigenlösungen $\bar{v}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, p$, ist. Daraus folgt auf Grund der Orthonormalität dieser Eigenlösungen für die Fourierkoeffizienten ϑ_k

$$\vartheta_k(x) = \int_{\Omega_i} \Psi(x, z)\, \bar{v}^{(k)}(z)\, dz, \quad k = 1, \ldots, p,$$

woraus insbesondere die Stetigkeit von $\vartheta_k(x)$ für $x \in \Omega_a$ folgt, aber auch für $x \in \Gamma$ infolge der schwachen Singularität von $\Psi(x, z)$ und der Stetigkeit für $x \neq z$. Gleichfalls ist das Integral in (22) eine stetige Funktion von x auf Γ als Potential der einfachen Belegung mit Kern Ψ und stetiger Dichte $a(y) \dfrac{\partial F(z, y)}{\partial \nu_y}$. Die rechte Seite von (22) ist also stetig auf Γ fortsetzbar bezüglich x für $z \in \Omega_i$ und muß deshalb dort mit $\Psi(x, z)$ übereinstimmen. Also gilt (21) ∎

Unter Verwendung von Hilfssatz 2 kann (20) weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \hat{v}(z) + v^*(z) + \bar{v}(z) &= \int_{\Gamma} \left(\Psi(x, z) - \sum_{k=1}^{p} \vartheta_k(x)\, \bar{v}^{(k)}(z) \right) d\mu(x) \\ &\quad + \int_{\Gamma} R(x, z)\, d\mu(x) \\ &= \int_{\Gamma} G(x, z)\, d\mu(x) - \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{\Gamma} \vartheta_k(x)\, d\mu(x) \right) \bar{v}^{(k)}(z). \end{aligned}$$

Somit haben wir schließlich

$$G^*\mu(y) = \begin{cases} \hat{v}(y) & \text{für } \; y \in \Omega_a \text{ und auf } \Gamma \text{ bis auf eine Menge der Kapazität } 0, \\ \hat{v}(y) + \mathring{v}(y) & \text{für } \; y \in \Omega_i, \end{cases} \tag{23}$$

mit

$$\mathring{v}(y) = v^*(y) + \bar{v}(y) + \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{\Gamma} \vartheta_k(x)\, d\mu(x) \right) \bar{v}^{(k)}(y).$$

Nun folgert man aus (23) mit Hilfe der Greenschen Formeln die im Satz behauptete Dichtheit. Sei $\varphi_0 \in C^{(2)}(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω. Mittels der Greenschen Funktion $G(x, y)$ gilt dann die Darstellungsformel

$$\varphi_0(x) = -\int_{\Omega} G(x, y)\, L_y \varphi_0(y)\, dy + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} u^{(i)}(y)\, \varphi_0(y)\, dy \right) u^{(i)}(x). \tag{24}$$

Die Einschränkungen $\varphi_0|_\Gamma$ aller dieser Funktionen bildet eine in $C(\Gamma)$ dichte Menge. Wir bilden $\mu(\varphi_0)$, setzen für φ_0 die Darstellungsformel (24) ein und erhalten mit (9) und nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\mu(\varphi_0) &= \int_\Gamma \varphi_0(x)\, d\mu(x)\\ &= -\int_\Gamma \left(\int_\Omega G(x, y)\, L_y\varphi_0(y)\, dy\right) d\mu(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u^{(i)}(y)\, \varphi_0(y)\, dy \int_\Gamma u^{(i)}(x)\, d\mu(x)\\ &= -\int_\Omega G^*\mu(y)\, L_y\varphi_0(y)\, dy\\ &= -\int_{\Omega_a} \hat{v}(y)\, L_y\varphi_0(y)\, dy - \int_{\Omega_i} \left(\hat{v}(y) + \hat{v}(y)\right) L_y\varphi_0(y)\, dy\\ &= -\int_{\Omega_i} \hat{v}(y)\, L_y\varphi_0(y)\, dy\end{aligned}$$

nach (23) und weil

$$\int_\Omega \hat{v}(y)\, L\varphi_0(y)\, dy = \int_\Omega \varphi_0(y)\, L^*\hat{v}(y)\, dy = 0$$

wegen $L^*\hat{v} = 0$ gilt. Nun wenden wir die Greensche Formel bezüglich Ω_i an und erhalten, da $\hat{v}$ Lösung von (4) ist,

$$\mu(\varphi_0) = \int_\Gamma \varphi_0(x)\, a(x)\, \frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial \nu_x}\, d\sigma(x)$$

für alle diese auf $C(\Gamma)$ dichten φ_0. Demnach muß μ das Maß mit der Dichte $a(x) \times \frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial \nu_x}$ bezüglich des Lebesgueschen Oberflächenmaßes sein. Gemäß Ansatz (7) gilt dann

$$\mu\left(a\, \frac{\partial \bar{v}^{(k)}}{\partial \nu}\right) = \int_\Gamma a(x)\, \frac{\partial \bar{v}^{(k)}(x)}{\partial \nu}\, a(x)\, \frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial \nu}\, d\sigma(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, p.$$

Da $\hat{v}$ selbst ein Element des von den $\bar{v}^{(k)}$ aufgespannten Eigenraumes ist, impliziert die letzte Gleichung $\frac{\partial \hat{v}}{\partial \nu} = 0$ auf Γ, wenn man noch die lineare Unabhängigkeit auch der $\frac{\partial \bar{v}^{(k)}}{\partial \nu}$, $k = 1, \ldots, p$, längs Γ berücksichtigt, da $a(x) > 0$ für alle $x \in \Gamma$ gilt. Somit ist $\mu(\varphi_0) = 0$ und mithin $\mu = 0$ (Nullmaß), womit der Satz bewiesen ist ∎

B e m e r k u n g: Der Satz gilt unverändert auch bezüglich des zweiten bzw. dritten Randwertproblems für Ω. Weiterhin kann die Fläche Γ auch Teile von $\partial\Omega$ umschließen und auch auf deren Randteilen kann das Variationsgebiet V der Randdaten liegen. Schließlich bemerken wir noch, daß mit der dargelegten Methode auch die L_2-Approximationssätze der Elastizitätstheorie (vgl. A. Göpfert [11]) durch Sätze hinsichtlich gleichmäßiger Approximation ergänzt werden können (dabei treten in Ω_i allerdings keine Eigenlösungen auf). Wesentlich dabei ist, daß der Somiglianasche Grundlösungstensor bzw. der zugehörige Greensche Tensor durch die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung abgeschätzt werden können, weshalb auch hier mit demselben Begriff der Nullkapazität gearbeitet werden kann.

LITERATUR

[1] BECKERT, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletproblems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. **139** (1960), 255–264.
[2] BECKERT, H.: Zur Steuerung der Stabilität in elastischen Körpern. ZAMM **52** (1972), 617–622.
[3] BROWDER, F. E.: Approximation by solutions of partial differential equations. Amer. J. Math. **84** (1962), 134–160.
[4] BROWDER, F. E.: Functional analysis and partial differential equations II. Math. Ann. **145** (1962), 81–226.
[5] CORDES, H. O.: Über die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. **IIa** (1956), 239–258.
[6] EGOROV, I. V.: Some problems in the theory of optimal control. Comput. Math. Phys. **3** (1963), 1209–1232.
[7] FATTORINI, H. O.: Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedon. SIAM J. Control **13** (1975), 9–13.
[8] FRIEDMAN, A.: Optimal control for parabolic equations. J. Math. Anal. and Appl. **18** (1967), 479–491.
[9] GLASSHOFF, K.: Optimal control of one-dimensional linear parabolic differential equations. Lecture Notes Math. **477** (1975), 102–120.
[10] GURTIN, M. E.: The linear theory of elasticity. Handbuch der Physik VIa/2. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1972.
[11] GÖPFERT, A.: Über L_2-Approximationssätze — eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Nachr. **31** (1966), 1–24.
[12] GÖPFERT, A., und G. WANKA: Zur Approximation durch Lösungen partieller Differentialgleichungen. XXI. Int. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1976 (Hrsg.: G. Linnemann), 61–63.
[13] GÖPFERT, A.: Eine Anwendung des Unitätssatzes von Ito-Yamabe. Beitr. z. Anal. **1** (1971), 29–41.
[14] HAMANN, U., und G. WILDENHAIN: Approximations by solutions of elliptic equations. Z. Anal. Anw. (im Druck).
[15] HENGST, S.: Untersuchung der Lösungen der stationären Stokesschen Gleichungen. Wiss. Berichte der Techn. Hochschule Leipzig (eingereicht 1983).
[16] JENTSCH, L.: Über Wärmespannungen in Körpern mit stückweise konstanten Laméschen Elastizitätsmoduln (Schriftenreihe Zentralinst. Math. und Mech. bei der Dt. Akad. Wiss. Berlin: Heft 14). Berlin: Akademie-Verlag 1972.
[17] KRABS, W.: Zur Berechnung des Extremalwertes bei einem parabolischen Rand-Kontrollproblem. Beitr. z. Numer. Math. **4** (1975), 129–139.
[18] KRABS, W., und K. GLASSHOFF: Dualität und Bang-Bang-Prinzip bei einem parabolischen Randkontrollproblem. Bonner math. Schriften **77** (1975), 1–8.
[19] LIONS, J. L.: Optimal control for systems governed by partial differential equations. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1971.
[20] MAUL, J.: Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik (Schriftenreihe Zentralinst. Math. und Mech. bei der Dt. Akad. Wiss. Berlin: H. **24**). Berlin: Akademie-Verlag 1976.
[21] MIRANDA, C.: Partial Differenatial Equations of Elliptic Type. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1970.
[22] ОЛЕЙНИК, О. А., и Г. А. ИОСИФЯН: Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченных областях. Сиб. Мат. ж. **19** (1978), 1154–1165.
[23] SCHMIDT, G.: Zur Steuerung der Stabilität elastischer flacher Schalen durch Variation der Randkräfte. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1976.
[24] SCHMIDT, J.: L_2-Approximationssätze durch Lösungen parabolischer und pseudoparabolischer Randanfangswertprobleme. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1982.
[25] SCHULZE, B. W., und G. WILDENHAIN: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin: Akademie-Verlag 1970.
[26] WANKA, G.: Ein Existenztheorem für eine Klasse von allgemeinen Dirichletschen Rand-

kontaktproblemen bei linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Nachr. **110** (1983), 215–229.
[27] WANKA, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösung von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Beitrag z. Anal. **17** (1981), 19–29.
[28] WANKA, G.: Approximationsprobleme bei linearen elliptischen Randwertaufgaben höherer Ordnung. Wiss. Z. Techn. Hochschule Leuna-Merseburg (1984 eingereicht).
[29] WANKA, J.: Lösung von Kontaktaufgaben bei parabolischen Randanfangswertproblemen. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 459–471.
[30] WECK, N.: Über Existenz, Eindeutigkeit und das „Bang-Bang-Prinzip" bei Kontrollproblemen aus der Wärmeleitung. Bonner math. Schriften **77** (1975), 9–19.
[31] WILDENHAIN, G.: Approximation in Sobolev-Räumen durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung. Rostock. Math. Kolloq. **22** (1983), 43–56.
[32] WILDENHAIN, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order I. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 511–521.
[33] WILDENHAIN, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order II. Math. Nachr. **113** (1983), 225–235.

Manuskripteingang: 26. 06. 1984

VERFASSER

Prof. Dr. ALFRED GÖPFERT, Dr. GERT WANKA und Dr. JOHANNA WANKA
Sektion Mathematik
der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg
DDR-4200 Merseburg, Geusaer Str.