

Konvexe Bereiche kleinster Oberfläche bei gegebener Dicke

R. KLÖTZLER

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

Es wird analytisch eine bisher unbestätigte Vermutung bewiesen: Kugeln sind im E^n ($n \geq 3$) die einzigen konvexen Bereiche vorgegebener Dicke mit kleinster Oberfläche. Methodisch geschieht dies auf der Grundlage einer verallgemeinerten Dualitätstheorie zu restringierten mehrdimensionalen Variationsproblemen in Parameterdarstellung.

Доказывается аналитическим способом доньше неподтвержденное предположение: Шары — это единственные выпуклые области в E^n ($n \geq 3$) данной толщины и наименьшей поверхности. Доказательство основано методически на обобщенной теории двойственности об ограниченной многомерной вариационной задаче в параметрическом представлении.

A till now unconfirmed conjecture is proved analytically: The balls are in E^n ($n \geq 3$) the single convex domains of given thickness with smallest surface area. The proof is effected by means of a generalized duality theory of restricted multidimensional variational problems in parameteric form.

1. Einleitung

Nach den fundamentalen Arbeiten von H. MINKOWSKI [8, 9] und W. BLASCHKE [1] setzte im ersten Drittel dieses Jahrhunderts eine recht erfolgreiche Durchforschung von Optimalitätseigenschaften konvexer Körper ein, vgl. dazu z. B. T. BONNESEN und W. FENCHEL [2]. Neben speziellen kunstvollen geometrischen Beweismethoden fanden hier Konvexitätseigenschaften geometrisch motivierter Funktionen breiten Einsatz. Mit der Ausschöpfung dieser Ideen verblieben aber zahlreiche Probleme, für die zwar gewisse Vermutungen bestehen aber letztlich bis heute noch keine erschöpfenden Beantwortungen vorliegen. Dazu zählt die

Vermutung: Für $n \geq 3$ sind im E^n die Kugeln vom Durchmesser Δ (und nur diese) konvexe Bereiche kleinster Oberfläche bei gegebener Dicke Δ .

Für $n = 2$ sind genau alle Bereiche konstanter Breite Δ von kleinstem Umfang. Der Beweis dieses Sachverhalts läßt sich nach W. BLASCHKE über die Benutzung der Stützfunktion konvexer Bereiche \mathfrak{B} sehr leicht erbringen (vgl. [1]). Aus der Parameterdarstellung der Randkurve $\partial\mathfrak{B}$ vermag man mittels Dualität von Steuerungsproblemen ebenfalls diese Aussage für $n = 2$ nachzuweisen (vgl. R. KLÖTZLER [6]). Es wird nachfolgend gezeigt, daß diese Technik sogar für $n > 2$ recht geeignet ist, obige Vermutung zu bestätigen.

2. Dualität zu Variationsproblemen in Parameterdarstellung

Variationsprobleme in Parameterdarstellung werden in der Regel mit der Forderung verknüpft, daß das zugehörige Variationsintegral und auftretende Steuerrestriktionen invariant gegenüber umkehrbar eindeutigen regulären Parametertransformationen sind. Aus diesem Grunde können wir uns nach W. GROSS [3] und W. VELTE [10] von vornherein auf solche Variationsprobleme beschränken, die sich in der nachfolgenden Gestalt schreiben lassen:

$$J(x, p) = \int_{\Omega} f(x(t), p(t)) dt \rightarrow \inf \quad (1a)$$

bez. aller Zustandsfunktionen x einer Klasse $\mathfrak{R} \subset W_q^{1,n}(\Omega)$ und zugeordneten (Steuer-) Vektoren p von $v(= \binom{n}{m})$ Graßmann-Koordinaten

$$p_{i_1 \dots i_m} = \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_m})}{\partial(t^1, \dots, t^m)} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_m), \quad (1b)$$

die den Steuerrestriktionen

$$p(t) \in V(x(t)) \quad \text{f. ü. auf } \Omega, \quad (1c)$$

den Zustandsrestriktionen

$$x(t) \in \bar{G} \quad \forall t \in \bar{\Omega} \quad (1d)$$

und den Randbedingungen

$$b(x) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (1e)$$

genügen. Ω und G sind Lipschitzgebiete des E^m bzw. E^n , Ω ist beschränkt. V ist eine mengenwertige Abbildung von \bar{G} in E^r , für sämtliche $\xi \in \bar{G}$, sind die $V(\xi)$ Kegel des E^r mit der Spitze in 0. Außerdem sei $q > m$, f stetig und $f(\xi, \cdot)$ positiv homogen ersten Grades. Wir beziehen in die Forderung (1c) insbesondere die Eigenschaft mit ein, daß alle den Zustandsgleichungen (1b) genügenden p auf der Graßmannschen Mannigfaltigkeit Γ liegen müssen, d. h., daß sie für $p \neq 0$ und für alle $i_j, k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$ dem nachstehenden System von Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} & [p_{i_1 i_2 \dots i_m} p_{k_1 k_2 \dots k_m} - p_{k_1 i_2 \dots i_m} p_{i_1 k_2 \dots k_m} \\ & - p_{k_2 i_2 \dots i_m} p_{k_1 i_1 \dots i_m}] / \sqrt{p_{(i)} p_{(i)}} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei über doppelt auftretende Indizes jedes Produkts bzw. über alle doppelt auftretenden Indexkombinationen (i) summiert wird (vgl. W. VELTE [10]). Bezeichnen wir dann mit Q_0 die Funktionenmenge

$$Q_0 := \{\zeta \in \mathfrak{R} \mid \zeta(t) \in \bar{G}, b(\zeta) = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und mit s den Vektor aller Funktionaldeterminanten

$$s_{i_1 \dots i_m} = \frac{\partial(S^1, \dots, S^m)}{\partial(\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_m})} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_m)$$

zu gegebenem $S = (S^1, \dots, S^m) \in W_\infty^{1,m}(G)$, so gilt nach R. KLÖTZLER [6] die folgende Aussage.

Satz 1 (Dualitätstheorem):

$$L_0(S) := \inf_{\zeta \in Q_0} \int_{\Omega} dS^1(\zeta) \wedge \dots \wedge dS^m(\zeta) \rightarrow \sup \quad (3)$$

ist ein *duales Problem* zu (1) bez. aller $S \in W_{\infty}^{1,m}(G)$, die der Ungleichung

$$s^T(\xi) v \leq f(\xi, v) \quad \forall v \in V(\xi) \quad \text{und fast alle } \xi \in G \tag{4}$$

genügen; d. h., $J(x, p) \geq L_0(S)$ für alle zulässigen (x, p) zu (1) und S gemäß (4). Die Gleichheit $J(x, p) = L_0(S)$ gilt hier für total differenzierbares S genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$s^T(x(t)) p(t) = f(x(t), p(t)) \quad \text{fast überall auf } \Omega \text{ zu } p(t) \text{ gemäß (1 b)}, \tag{5a}$$

$$L_0(S) = \int_{\Omega} dS^1(x(t)) \wedge \dots \wedge dS^m(x(t)). \tag{5b}$$

Es ist evident, daß die Bedingungen (5a) und (5b) in Verbindung mit (4) zugleich hinreichend dafür sind, daß (x, p) eine optimale Lösung zum Problem (1) ist. Wir werden dieses hinreichende Kriterium zum Beweis der eingangs genannten Vermutung benutzen: Für den Beweis der Eindeutigkeitsaussage unserer Vermutung benötigen wir außerdem noch den weiteren nachfolgenden Satz, der ebenfalls unmittelbar aus [6] folgt.

Satz 2: *Im Sinne von Satz 1 gebe es einen zulässigen Prozeß (x, p) zu (1) und ein S mit $J(x, p) = L_0(S)$. Dann ist eine Folge zulässiger Prozesse (x_k, p_k) zu (1) genau dann eine Minimalfolge, wenn*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f(x_k, p_k) - s^T(x_k) p_k] dt = 0. \tag{6a}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} dS^1(x_k) \wedge \dots \wedge dS^m(x_k) = L_0(S) \tag{6b}$$

gellen.

3. Die analytische Formulierung und Lösung des Problems

Es sei $e(t) = (e^1, \dots, e^n)^T$ ein beliebiger Einheitsvektor des E^n mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} e^1 &= \cos t^1, \\ e^\alpha &= \cos t^\alpha \prod_{j=1}^{\alpha-1} \sin t^j \quad \text{für } \alpha = 2, \dots, n-1, \\ e^n &= \prod_{j=1}^{n-1} \sin t^j. \end{aligned} \tag{7}$$

Die t^1, \dots, t^{n-1} sind dann Polarkoordinaten der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre (vgl. z. B. E. MADELUNG [7: S. 243]). Wir schränken diese Koordinaten hier auf den Definitionsbereich $0 \leq t^j \leq \pi$ ($j = 1, \dots, n-1$) ein.

Ist nun \mathfrak{B} ein beliebiger streng konvexer beschränkter Bereich des E^n , so ist jene zugehörige orientierte Stützebene E zu \mathfrak{B} eindeutig bestimmt, welche die Normalenrichtung $e(t)$ besitzt und die Eigenschaft hat, daß sämtliche Punkte von \mathfrak{B} im negativen Halbraum zu E liegen. E berührt \mathfrak{B} in genau einem Punkt $\underline{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^T$. Die zu E parallele Stützebene \bar{E} von \mathfrak{B} mit der Normalenrichtung $-e(t)$ berührt \mathfrak{B} in genau einem Punkte $\bar{\underline{x}}(t) = -(x^{n+1}(t), \dots, x^{2n}(t))^T$. Deshalb ist für

$j = 1, \dots, n$ und $i = 2, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned}
 x^{j+n}(0, t^2, \dots, t^{n-1}) &= -x^j(\pi, t^2, \dots, t^{n-1}), \\
 x^{j+n}(\pi, t^2, \dots, t^{n-1}) &= -x^j(0, t^2, \dots, t^{n-1}), \\
 x^{j+n}(t^1, \dots, t^{i-1}, \pi, t^{i+1}, \dots, t^{n-1}) & \\
 &= -x^j(\pi - t^1, \dots, \pi - t^{i-1}, 0, \pi - t^{i+1}, \dots, \pi - t^{n-1}), \\
 x^{j+n}(t^1, \dots, t^{i-1}, 0, t^{i+1}, \dots, t^{n-1}) & \\
 &= -x^j(\pi - t^1, \dots, \pi - t^{i-1}, \pi, \pi - t^{i+1}, \dots, \pi - t^{n-1}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Indem wir uns auf \mathfrak{B} der Dicke Δ beschränken, kann durch eine geeignete Drehung und Translation sogar erreicht werden, daß

$$\begin{aligned}
 x^1(0, t^2, \dots, t^{n-1}) &= x^{1+n}(0, t^2, \dots, t^{n-1}) = \Delta/2, \\
 x^1(\pi, t^2, \dots, t^{n-1}) &= x^{1+n}(\pi, t^2, \dots, t^{n-1}) = -\Delta/2, \\
 x^\alpha(0, t^2, \dots, t^{n-1}) &= x^{\alpha+n}(0, t^2, \dots, t^{n-1}) = 0, \\
 x^\alpha(\pi, t^2, \dots, t^{n-1}) &= x^{\alpha+n}(\pi, t^2, \dots, t^{n-1}) = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

ist für $\alpha = 2, \dots, n$.

Auf die oben dargestellte Weise wird somit jedem streng konvexen beschränkten Bereich \mathfrak{B} des E^n eine Zustandsfunktion $x(t) = (x^1(t), \dots, x^{2n}(t))^T$ auf $\Omega = [0, \pi]^{n-1}$ zugeordnet, welche die Randbedingungen (8) und (9) erfüllt. Da außerdem \bar{x} und \bar{r} per definitionem die Eigenschaft

$$\bar{x}_i^\beta(t)^T c(t) = 0, \quad \bar{r}_i^\beta(t)^T c(t) = 0 \quad \forall \beta = 1, \dots, n - 1$$

haben, genügen die den x zugeordneten $\binom{2n}{n-1}$ Steuervariablen $p_{(i)}$ gemäß (1 b) den Gleichungen (2) und den Rangbedingungen

$$\text{Rang}(p_0, p_{0,r}) = 1, \tag{10}$$

wobei p_0 der n -Vektor aller Komponenten $p_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}$ ($1 \leq i \leq n$) und $p_{0,r}$ jener n -Vektor ist, der aus p_0 dadurch hervorgeht, daß man auf die auftretenden Indizes

die Transposition $\tau = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ j_1 + n & \dots & j_r + n \end{pmatrix}$ anwendet; dabei ist $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$.

Speziell für $\tau^* = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ n + 1 & \dots & 2n \end{pmatrix}$ bezeichnen wir $p_{0,r}$ auch mit \bar{p}_0 .

Wir beschränken uns in der nachfolgenden Diskussion zunächst auf solche reguläre \mathfrak{B} der oben zugelassenen Art, zu denen die zugeordnete Funktion x Element von $[C^1(\Omega)]^{2n}$ ist und zugleich die Bedingung

$$p_0(t)^T p_0(t) > 0 \quad \forall t \in \Omega \tag{11}$$

erfüllt. Die Menge aller x , die auf die dargelegte Weise einen regulären konvexen beschränkten Bereich \mathfrak{B} des E^n repräsentieren, bezeichnen wir hier mit \mathfrak{K} . In dieser Beschränkung lautet das analytische Ersatzproblem des einleitend genannten geometrischen Optimierungsproblems:

$$J(x, p) = \int_{\Omega} (|p_0(t)| + |\bar{p}_0(t)|) dt \rightarrow \inf \tag{12}$$

bez. aller Zustandfunktionen $x \in \mathfrak{R}$ und Graßmannschen Steuerfunktionen p unter den Zustandsgleichungen (1 b), den Zustandsrestriktionen

$$\sum_{i=1}^n (x^i(t) + x^{i+n}(t))^2 \geq \Delta^2, \tag{13}$$

den Steuerrestriktionen (2), (10), (11) und den Randbedingungen (8), (9).

Nun wenden wir auf dieses spezielle Variationsproblem (12) unseren obigen Satz 1 an. Unter Verwendung gleicher Bezeichnungskonventionen für $v \in E^{\binom{2n}{n-1}}$ wie für p lautet jetzt Bedingung (4)

$$s^T(\xi) v \leq |v_0| + |\bar{v}_0| \quad \forall v \in V(\xi) \quad \text{und} \quad \xi \in \bar{G}. \tag{14}$$

Dabei ist

$$G = \left\{ \xi \in E^{2n} \mid \sum_{i=1}^n (\xi^i + \xi^{i+n})^2 \geq \Delta^2 \right\}$$

und V der Kegel aller jener v aus $E^{\binom{2n}{n-1}}$, die (anstelle von p) den Bedingungen (2), (10) und (11) genügen. Für $S \in W_{\infty}^{1,n-1}(G)$ mit den Komponenten S^j wählen wir hier den Ansatz

$$S^j(\xi) = \Psi^j(z(\xi)) \tag{15}$$

mit

$$\Psi^j(z) = C \int_0^{\vartheta_j(z)} (\sin \vartheta)^{j-1} d\vartheta \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

$$\vartheta_j(z) = \arccot \left(z^j / \sqrt{\sum_{i=j+1}^n (z^i)^2} \right),$$

$$z = (z^1, \dots, z^n), \quad z^i = \xi^i + \xi^{i+n}.$$

Dabei ist C eine noch zu bestimmende positive Konstante.

Zür rechnerischen Auswertung von (14) führen wir die Hilfsgröße $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (z^i)^2}$ ein. Sie bildet zusammen mit den $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ das System der n -dimensionalen Polarkoordinaten des Punktes $z \in E^n$. Nach [7: S. 244] ist das Volumenelement der n -dimensionalen Kugel

$$d\mathfrak{B} = \prod_{i=1}^n dz^i = r^{n-1} dr \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \vartheta_j)^{j-1} d\vartheta_j = \left(\frac{r}{C} \right)^{n-1} dr \prod_{j=1}^{n-1} d\Psi^j.$$

Daraus entnehmen wir

$$(r/C)^{n-1} \frac{\partial(r, \Psi^1, \dots, \Psi^{n-1})}{\partial(z^1, \dots, z^n)} = 1. \tag{16}$$

Da außerdem das n -dimensionale Polarkoordinatensystem $r(z), \vartheta_1(z), \dots, \vartheta_{n-1}(z)$ bekanntlich orthogonal ist, gilt (unter Summation über doppelt auftretende Indizes)

$$\frac{\partial r}{\partial z^i} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial z^i} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \dots, n-1.$$

Deshalb ist nach der Definition von Ψ^j auch

$$\frac{\partial r}{\partial z^i} \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial z^i} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \dots, n-1. \tag{17}$$

Somit resultiert aus (17) die Existenz eines Faktors $\lambda(z)$ mit

$$r_{z^i} = (-1)^i \frac{\partial(\Psi^1, \dots, \Psi^{n-1})}{\partial(z^1, \dots, z^{i-1}, z^{i+1}, \dots, z^n)} \lambda. \tag{18}$$

Entwickeln wir in (16) die Determinante nach der ersten Spalte, so erhalten wir durch Einsetzen von (18)

$$r^{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(\Psi^1, \dots, \Psi^{n-1})}{\partial(z^1, \dots, z^{i-1}, z^{i+1}, \dots, z^n)} \right]^2 \lambda = C^{n-1} \tag{19a}$$

bzw.

$$r^{n-1} r_{z^i} r_{z^i} = C^{n-1}. \tag{19b}$$

Infolge $r_{z^i} = z^i/r$ liefert (19 b) schließlich

$$\lambda = (r/C)^{n-1}. \tag{20}$$

Bezeichnen wir den n -Vektor aller Komponenten $s_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}$ mit s_0 und mit $s_{0,r}$, entsprechend $p_{0,r}$, denjenigen Vektor, der aus s_0 unter Anwendung der Transposition τ hervorgeht, so entnehmen wir aus dem Ansatz (15) wegen (19a) und (20)

$$s_{0,r} = s_0 \vee \tau \quad \text{und} \quad |s_0| = (C/r)^{n-1}. \tag{21}$$

Da sämtliche v aus V zugleich zur Graßmannschen Mannigfaltigkeit Γ gehören, existieren nach [10] $2n(n-1)$ Koordinaten v_α^i ($i = 1, \dots, 2n; \alpha = 1, \dots, (n-1)$), so daß v der Vektor aller Richtungskoordinaten (Determinanten)

$$v_{i_1 \dots i_{n-1}} = \text{Det}(v_{\beta^{\alpha}})_{\alpha, \beta=1, \dots, n-1} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1})$$

ist. Wegen (10) und (11) können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die v^i so wählen, daß $v_\alpha^i v_\beta^i = 0$ für alle $\alpha \neq \beta$ und $v_\alpha^{i+n} = \kappa v_\alpha^i$ mit $\kappa > 0$ gilt. Unter Beachtung von $S_{\xi}^i = S_{\xi, i+n}^i$ ($i = 1, \dots, n$) gemäß (15) resultiert somit aus (14) die äquivalente Forderung

$$\begin{aligned} s^\tau(\xi) v &= \text{Det} \left(\sum_{i=1}^{2n} S_{\xi}^i v_{\beta}^i \right) \\ &= \text{Det} \left(\sum_{i=1}^n S_{\xi}^i [v_{\beta}^i + v_{\beta}^{i+n}] \right) \\ &= s_0^\tau \eta_0 \leq |v_0| + |\bar{v}_0| \quad \forall \xi \in \bar{G}, v \in V, \end{aligned} \tag{22}$$

wenn η_0 den n -Vektor aller Determinanten

$$\eta_{i_1 \dots i_{n-1}} = \text{Det}(v_{\beta}^{i_\alpha} + v_{\beta}^{i_\alpha+n}) \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n)$$

bezeichnet.

Im Hinblick auf (4) und (5a) suchen wir C so zu bestimmen, daß

$$\text{Min}_{\xi \in \bar{G}} \text{Min}_{v \in V} \left\{ \frac{|v_0| + |\bar{v}_0|}{|\eta_0|} - s_0^\tau(\xi) \frac{\eta_0}{|\eta_0|} \right\} = 0 \tag{23}$$

gilt. Selbstverständlich ist damit auch (22) erfüllt. Da $v_\alpha^{i+n} = \kappa v_\alpha^i$ ist, gilt $|\bar{v}_0| = \kappa^{n-1} \times |v_0|$ und $|\eta_0| = (1 + \kappa)^{n-1} |v_0|$. Die v_0 sind dabei völlig willkürlich ungleich null wählbar. Aus diesem Grunde kann die Forderung (23) auch in der Gestalt

$$\text{Min}_{\xi \in \bar{G}} \text{Min}_{\kappa > 0} \left\{ \frac{1 + \kappa^{n-1}}{(1 + \kappa)^{n-1}} - \text{Max}_{v_\alpha \neq 0} s_0^\tau(\xi) \frac{v_0}{|v_0|} \right\} = 0 \tag{23'}$$

geschrieben werden. Das Maximum im Ausdruck (23') wird offensichtlich angenommen für $v_0 = as_0(\xi)$ ($a > 0$), es hat den Wert $|s_0| = (C/r)^{n-1}$ gemäß (21). Nach G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA [4: S. 61, Aufg. 60] ist

$$\mu = \text{Min}_{x>0} \frac{1 + x^{n-1}}{(1 + x)^{n-1}} = 2^{2-n}$$
. Für $n > 2$ existiert dazu genau eine Minimalstelle $x^* = 1$; für $n = 2$ ist hingegen jedes $x > 0$ Minimalstelle. Aus diesem Tatbestand resultiert später auch die Sonderstellung des Falles $n = 2$ für die mehrdeutige Lösung des eingangs genannten geometrischen Optimierungsproblems.

Damit wir schließlich in (23') die geforderte Gleichheit erzielen, muß offenbar zu $r = r(z(\xi))$

$$\text{Min}_{\xi \in \bar{G}} \{2^{2-n} - (C/r)^{n-1}\} = 0 \tag{24}$$

sein. Wegen $r(z(\xi)) \geq \Delta$ für alle $\xi \in \bar{G}$ resultiert aus (24)

$$(C/\Delta)^{n-1} = 2^{2-n} \quad \text{bzw.} \quad C = \Delta \cdot 2^{(2-n)/(n-1)} \tag{25}$$

Zusammengefaßt bedeutet dieses Resultat:

Für unser Problem (12) gilt das Gleichheitszeichen in (22) nur in solchen Punkten $\xi = x(t) \in \bar{G}$, für die die Bedingung (13) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist. Damit aber für eine zulässige Funktion x zu (12) mit ihren Richtungskoordinaten p auch noch die Bedingung (5a) gilt, muß für $n > 2$ zugleich $p_0 = \bar{p}_0 = as_0(x)$ auf Ω gelten. Umgekehrt sind diese Bedingungen zugleich auch hinreichend für die Gültigkeit von (5a) bez. (12). Damit kommen als optimale Lösungen zu (12) allein solche Zustandsfunktionen $x(t) = (\underline{x}(t)^\top, -\bar{x}(t)^\top)^\top$ in Betracht, zu denen die n -Vektoren $\underline{x}(t)$ und $-\bar{x}(t)$ die Eigenschaft $|\underline{x}(t) - \bar{x}(t)| = \Delta$ sowie gleiche in Richtung von $s_0(x(t))$ orientierte Vektoren zugeordneter Graßmannscher Richtungskoordinaten $p_0(t)$ und $\bar{p}_0(t)$ haben. Indem wir außerdem $x \in \mathfrak{R}$ fordern, ist x Repräsentant eines regulären zugeordneten konvexen Bereichs $\mathfrak{B} \subset E^n$. Die Vektorfunktion \underline{x} über Ω beschreibt dabei ein Randstück von \mathfrak{B} und $-\bar{x}$ über Ω das komplementäre Randstück von \mathfrak{B} . Wegen $p_0(t) = \bar{p}_0(t) \neq 0$ für alle $t \in \Omega$ sind beide Randstücke lokal auch kartesisch darstellbar durch Gleichungen des Typs

$$x^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \tag{26a}$$

bzw.

$$x^{i4} = \bar{\varphi}^i(x^1, \dots, x^{i4}, x^{i4}, \dots, x^n) \tag{26b}$$

bei geeigneter Wahl des i und stetig differenzierbaren Funktionen φ^i und $\bar{\varphi}^i$. Ersetzen wir in (26a) und (26b) die Koordinaten x^j durch die entsprechenden obigen Funktionen $x^j(t)$ bzw. $x^{j+n}(t)$, so entstehen Identitäten, die durch partielle Differentiation nach t^α zu den Gleichungssystemen

$$x_{t^\alpha}^{i4} = \sum_{j \neq i} \varphi_{z^j}^i x_{t^\alpha}^{j4} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1), \tag{27a}$$

$$x_{t^\alpha}^{i+n} = \sum_{j \neq i} \bar{\varphi}_{z^j}^i x_{t^\alpha}^{j+n} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1), \tag{27b}$$

führen. Die Auflösung von (27a) nach $\varphi_{z^i}^i$ ist von der Gestalt

$$\varphi_{z^i}^i = g_j^i(p_0) \quad \text{für} \quad j \neq i.$$

In ganz entsprechender Weise ergibt (27b) aufgelöst

$$\bar{\varphi}_{z^i}^i = g_j^i(\bar{p}_0) \quad \text{für} \quad j \neq i.$$

Wegen der Gleichheit von p_0 und \bar{p}_0 folgt daraus $(\varphi^i - \bar{\varphi}^i)_{x^i} = 0$, also $\varphi^i - \bar{\varphi}^i = c_i = \text{const.}$ Infolge der Randbedingung (9) müssen aber sämtliche $c_i = 0$ sein. Das bedeutet aber wiederum $\varrho(t) = -\bar{\varrho}(t) = (\Delta/2) e(t)$, d. h., \mathfrak{B} muß eine Kugel vom Durchmesser Δ sein.

Zur Berechnung von $L_0(S)$ gemäß (3) beachten wir, daß im Anschluß an (15) zu jeder zulässigen Funktion x des Variationsproblems (12)

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} dS^1(x(t)) \wedge \dots \wedge dS^{n-1}(x(t)) \\ &= C^{n-1} \int_{\Omega_x} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \vartheta_j)^{j-1} d\vartheta_j \end{aligned} \quad (28)$$

ist. Dabei ist unter Rückgriff auf die oben vorgenommene geometrische Deutung von $\vartheta_j(z)$ mit $z^i = x^i(t) + x^{i+n}(t)$ der Bereich Ω_x das Bild von Ω bei der voranstehenden Koordinatentransformation $t \leftrightarrow \vartheta$. Und (I/C^{n-1}) ist das Oberflächenmaß mes $\mathfrak{E}_n(x)$ des sphärischen Bildes $\mathfrak{E}_n(x)$ von $\mathfrak{F}(x) = \{z \in \mathbb{E}^n \mid z^i = x^i(t) + x^{i+n}(t), t \in \Omega\}$. Wegen der Randbedingungen (8), (9) können wir $\mathfrak{F}(x)$ durch Zentrosymmetrisierung stetig fortsetzen zu einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}(x) \cup \bar{\mathfrak{F}}(x)$, deren sphärisches Bild $\mathfrak{E}_n(x) \cup \bar{\mathfrak{E}}_n(x)$ die Einheitssphäre $\bar{\mathfrak{E}}_n$ des \mathbb{E}^n ist; dabei bedeutet $\bar{\mathfrak{E}}_n(x)$ das sphärische Bild zu $\bar{\mathfrak{F}}(x)$. Deshalb ist $\text{mes } \mathfrak{E}_n(x) = \text{mes } \bar{\mathfrak{E}}_n(x) = (1/2) \text{mes } \bar{\mathfrak{E}}_n$ und damit I unabhängig von der speziellen Wahl der Zustandsfunktion x . Das bedeutet zugleich $L_0(S) = I$ und das Erfülltsein von Bedingung (5b) für alle zulässigen x und damit erst recht für $x = (\Delta/2)(e^T, e^T)^T$, den Repräsentanten einer Kugel vom Durchmesser Δ .

Abschließend kommen wir damit in Anwendung von Satz 1 zu dem nachstehenden Resultat.

Satz 3: Unter allen zulässigen Funktionen $x \in \mathfrak{B}$ des Variationsproblems (12) sind diese und nur diese optimal, welche für $n > 2$ eine Kugel vom Durchmesser Δ und für $n = 2$ einen (regulären) Bereich konstanter Breite Δ repräsentieren.

4. Abschließende Diskussionen zur Eindeutigkeit

Im Abschnitt 3 haben wir mit der Diskussion des Variationsproblems (12) einen vollständigen Überblick über sämtliche optimale reguläre Bereiche vorgegebener Dicke zu unserem geometrischen Ausgangsproblem erhalten. Kann es auch noch andere, nichtreguläre konvexe Bereiche \mathfrak{B} als optimale Lösungen geben?

Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir an, \mathfrak{B} sei nicht unbedingt regulär und dennoch optimale Lösung des geometrischen Ausgangsproblems. Dann können wir nach H. MINKOWSKI [9] eine Folge regulärer konvexer Bereiche \mathfrak{B}_k finden, die im Sinne der Hausdorff-Metrik gegen $\mathfrak{B} \subset \mathbb{E}^n$ konvergieren und die Dicke Δ haben. Wir erzeugen diese \mathfrak{B}_k auf die folgende Weise unter Verwendung des bekannten Begriffs der Polare $\pi(\mathfrak{A})$ einer Menge $\mathfrak{A} \subset \mathbb{E}^n$ gemäß L. W. KANTOROWITSCH und G. P. AKILÖW [5] und der Minkowski-Funktion $p_{\mathfrak{A}}$. Ist $K(0, 1/k)$ die abgeschlossene Kugel des \mathbb{E}^n mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $1/k$, so setzen wir

$$\mathfrak{B}_k := \pi[\pi(\mathfrak{B} + K(0, 1/k)) + K(0, 1/k)] \lambda(k). \quad (29)$$

$\lambda(k) \in \mathbb{R}^1$ ist dabei ein geeigneter positiver Normierungsfaktor, der gewährleistet, daß die Dicke von \mathfrak{B}_k gleich der vorgegebenen Zahl $\Delta > 0$ ist. Nach [9] hat die Folge \mathfrak{B}_k die oben genannte Eigenschaft und außerdem gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) = 1$. Insbesondere

sind die \mathfrak{B}_k regulär und ihre Minkowski-Funktionen $p_{\mathfrak{B}_k}$ haben die Eigenschaften:

$$p \in C^1(\mathbb{E}^n), \quad \nabla p_{\mathfrak{B}_k}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \partial \mathfrak{B}_k \quad (30a)$$

und im Sinne des Sobolewraumes $W_q^1(K(0, N))$ ist

$$p_{\mathfrak{B}_k} \rightarrow p_{\mathfrak{B}}. \quad (30b)$$

Dabei bedeutet N eine so große natürliche Zahl, daß $\mathfrak{B}_k \subset K(0, N)$ für alle k und $\mathfrak{B} \subset K(0, N)$ gilt. Analog zu $\xi(t)$ und $\bar{\xi}(t)$ bez. \mathfrak{B} (entsprechend Abschnitt 3) ordnen wir den orthogonalen Stützebenen zu $e(t)$ an \mathfrak{B}_k die Berührungspunkte $\xi_k(t)$ und $\bar{\xi}_k(t)$ zu. Da wir $\xi_k(t)$ in eindeutiger Weise aber auch in Abhängigkeit seines Polarkoordinatenvektors $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ darstellen können, nämlich durch $\xi_k(t) = p_k(\alpha)$, wird durch diese Korrespondenz eine umkehrbar eindeutige stetig differenzierbare Transformation $t = \chi_k(\alpha)$ definiert. Mit ihr bilden wir die Funktionenfolge

$$x_k(\alpha) := (\xi_k(\chi_k(\alpha))^\top, -\bar{\xi}_k(\chi_k(\alpha))^\top)^\top \quad (31)$$

und die zugeordneten Vektoren $p_k(\alpha)$ ihrer Graßmannschen Koordinaten bez. α . Nach den vorausgesetzten Eigenschaften von \mathfrak{B} mit dem Oberflächenmaß $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ und der Invarianz des Variationsproblems (12) gegenüber der Parametertransformation $t \leftrightarrow \alpha$ bildet die Folge (x_k, p_k) eine Minimalfolge zu (12). Das heißt,

$$\mathcal{O}(\mathfrak{B}) = \inf J = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|p_{k0}(\alpha)| + |\bar{p}_{k0}(\alpha)|) d\alpha. \quad (32)$$

Auf diese Minimalfolge muß notwendig Satz 2 anwendbar sein. Wir verwenden dazu wieder die im Abschnitt 3 eingesetzte spezielle Funktion S gemäß (15). Mit ihr ist das Integral I von (28) unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $x \in Q_0$; deshalb ist hier (6b) automatisch erfüllt. Somit verbleibt nur noch die Überprüfung von Bedingung (6a). Spezialisiert auf das Variationsproblem (12) besagt diese

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [|p_{k0}(\alpha)| + |\bar{p}_{k0}(\alpha)| - s^\top(x_k) p_k] d\alpha = 0. \quad (33)$$

Diese Bedingung ist genauso wie das Variationsproblem (12) invariant gegenüber stetig differenzierbaren umkehrbar eindeutigen Parametertransformationen. Deshalb können wir mittels einer weiteren solchen Selbstabbildung von Ω der Gestalt $\alpha = \varrho_k(\sigma)$ auch erreichen, daß für die neuen Graßmannschen Steuervektoren $p_k(\sigma)$ zu $x_k(\varrho_k(\sigma))$ bezüglich σ speziell $|p_{k0}(\sigma)| = \text{const} = c_k$ auf Ω gilt neben der transformierten Bedingung (33)¹⁾

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [|p_{k0}(\sigma)| + |\bar{p}_{k0}(\sigma)| - s^\top(x_k(\varrho_k(\sigma))) p_k(\sigma)] d\sigma = 0. \quad (33')$$

Da der Integrand von (33') aber nach (22) größer oder gleich Null ist, muß bezüglich Konvergenz dem Maße nach auf Ω

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [|p_{k0}(\sigma)| + |\bar{p}_{k0}(\sigma)| - s^\top(x_k(\varrho_k(\sigma))) p_k(\sigma)] = 0 \quad (34)$$

¹⁾ Zur Vereinfachung der Schreibweise erlauben wir uns infolge der Invarianzeigenschaften von (12), für die Vektoren der Graßmannschen Koordinaten

$$\frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_m})}{\partial(t^1, \dots, t^m)}, \quad \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_m})}{\partial(\alpha^1, \dots, \alpha^m)}, \quad \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_m})}{\partial(\sigma^1, \dots, \sigma^m)}$$

(mit $m = n - 1$) die gleiche Bezeichnung p zu wählen. Wir verdeutlichen die Unterschiede nur durch die Art der Argumente t, α, σ .

sein. Da die $p_k(\sigma)$ aber gleichfalls die Steuerrestriktionen (2), (10) und (11) erfüllen, können wir in Anlehnung an die Überlegungen zu (22) und (23) zu jedem Punkt σ einen positiven Faktor $\kappa_k(\sigma)$ finden, so daß

$$|\bar{p}_{k0}(\sigma)| = \kappa_k(\sigma)^{n-1} |p_{k0}(\sigma)| \tag{35a}$$

und

$$\begin{aligned} |\bar{p}_{k0}(\sigma)| + |p_{k0}(\sigma)| - s^T(x_k(\varrho_k(\sigma))) p_k(\sigma) \\ \geq [1 + \kappa_k(\sigma)^{n-1} - |s_0(x_k(\varrho_k(\sigma)))|] (1 + \kappa_k(\sigma)^{n-1}) |p_{k0}(\sigma)| \\ \geq [2^{2-n} - (C/r)^{n-1}] (1 + \kappa_k(\sigma)^{n-1}) |p_{k0}(\sigma)| \geq 0 \end{aligned} \tag{35b}$$

gilt mit $r = r(z(x_k(\varrho_k(\sigma))))$.

Nach (30) ist im Sinne des $(L_q)^n$ die starke Konvergenz $p_{k0}(\sigma) \rightarrow p_0(\sigma)$ gewährleistet und $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c = |p_0(\sigma)|$. Wegen (32) und $\mathcal{O}(\mathfrak{B}) = L_0(S) > 0$ können wir uns von vornherein \mathfrak{B} so gedreht denken, daß $\int_{\Omega} |p_0(\sigma)| d\sigma = c \text{ mes } \Omega > 0$ ist. Wegen (35 b)

kann (34) vermöge der Diskussion um (23) nur dann bestehen, wenn im Sinne der Konvergenz dem Maße nach die Relationen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k0}^T(\sigma)}{|p_{k0}(\sigma)|} \cdot s_0(x_k(\varrho_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} |s_0(x_k(\varrho_k))| = \left(\frac{C}{\Delta}\right)^{n-1} \tag{36a}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_k = 1 \quad (\text{für } n > 2) \tag{36b}$$

sämtlich erfüllt sind. Wegen (21) und (30) folgt somit aus (36a) auf Ω im Sinne der Konvergenz dem Maße nach

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(z(x_k(\varrho_k))) = r(z(x)) = \Delta.$$

Das bedeutet geometrisch: \mathfrak{B} ist ein konvexer Bereich konstanter Breite Δ .

Da aber für $n > 2$ zugleich (36b) gilt, ist auch im Sinne der starken Konvergenz des $(L_q)^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{p}_{k0}(\sigma) = \bar{p}_0(\sigma) = p_0(\sigma).$$

Mit diesem Ergebnis lassen sich jetzt die Überlegungen zu (27) erneut aufnehmen, nur mit dem Unterschied, daß wir jetzt t durch σ zu ersetzen haben und die Gültigkeit von (27) durch die in nur fast allen Punkten σ von Ω . Das ändert aber nichts an den darauffolgenden Schlüssen zu (27), die jetzt auf $(\varphi^i - \bar{\varphi}^i)_{x^i} = 0$ fast überall und unter Beachtung der Randbedingungen wieder zu $\varphi^i \equiv \bar{\varphi}^i$ führen. Geometrisch interpretiert heißt das wiederum: für $n > 2$ muß \mathfrak{B} eine Kugel vom Durchmesser Δ sein.

Damit ist die eingangs genannte Vermutung vollständig bewiesen.

LITERATUR

[1] BLASCHKE, W.: Kreis und Kugel. Leipzig: Teubner-Verlag 1916.
 [2] BONNESEN, T., und W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer-Verlag 1934.
 [3] GROSS, W.: Das isoperimetrische Problem bei Doppelintegralen. Monatsh. Math. u. Phys. 27 (1916), 70-120.

- [4] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E., and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press 1967.
- [5] KANTOROWITSCH, L. W., und G. P. AKILOV: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964.
- [6] KLÖTZLER, R.: Models and Applications of Duality in Optimal Control. In: Proc. IFIP Working Conference on Recent Advances in System Modelling and Optimization, Hanoi (SRV) 1983.
- [7] MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1953.
- [8] MINKOWSKI, H.: Theorie der konvexen Körper. In: Gesammelte Abh. 2. Leipzig: Teubner-Verlag 1911, S. 131—229.
- [9] MINKOWSKI, H.: Volumen und Oberfläche. Math. Ann. 57 (1903), 447—490.
- [10] VELTE, W.: Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale. Math. Z. 60 (1954), 367—383.

Manuskripteingang: 21. 05. 1984

VERFASSER

Prof. Dr. ROLF KLÖTZLER
Sektion Mathematik der Karl-Märx-Universität,
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz