Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (4) 1985, S. 353–362

Bernstein-Sätze nullter Ordnung und Liouville-Sätze für eine Klasse elliptischer Gleichungen

J. Frehse

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

Gegenstand von § 1 sind gewisse nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung $Lu = 0$, für die ein sogenannter Bernstein-Satz nullter Ordnung gilt: „Ist u eine auf ganz $\mathbf{R}^n$ erklärte Lösung, so ist u konstant". In § 2 werden Liouville-Sätze für Potenzen linearer elliptischer Operatoren L zweiter Ordnung hergeleitet, d. h. ist u eine auf ganz $\mathbf{R}^n$ erklärte und beschränkte Lösung von $L^m u = 0$, so ist u konstant. Es wird ein Zusammenhang mit der hyperbolischen Gleichung $\varphi_{tt} + L\varphi = 0$ aufgezeigt.

Предметом § 1 являются некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка $Lu = 0$, для которых верна так называемая теорема Бернштейна порядка нуль: „Если u определённое на всем $\mathbf{R}^n$ решение, то u является константой". В § 2 выводятся теоремы типа Лиувилля для степеней линейного эллиптического оператора L второго порядка, т. е. если u определённое и ограниченное на всем $\mathbf{R}^n$ решение уравнения $L^m u = 0$, то u является константой. Выявляется связь с гиперболическим уравнением $\varphi_{tt} + L\varphi = 0$.

Subject of § 1 are certain second order nonlinear partial differential equations $Lu = 0$ which allow a so called zero order Bernstein theorem: If u is a solution which is defined in all of $\mathbf{R}^n$ then u is constant. In § 2 Liouville theorems for powers of certain linear elliptic operators L of second order are presented, this means that solutions of $L^m u = 0$ which are defined and bounded in all of $\mathbf{R}^n$ must be constant. A connection to the hyperbolic equation $\varphi_{tt} + L\varphi = 0$ is shown.

Einleitung

Der Satz von Liouville [13] besagt im einfachsten Fall, daß jede auf ganz $\mathbf{R}^n$ beschränkte Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ *konstant* ist, während der klassische Satz von Bernstein [2] besagt, daß jede auf dem ganzen $\mathbf{R}^2$ erklärte Lösung der Minimalflächengleichung linear ist. Die entsprechenden Aussagen wurden für eine große Klasse elliptischer Gleichungen verallgemeinert, siehe etwa [7–9, 14] für den Satz von Liouville und [6, 5, 17, 18, 3] für den Satz von Bernstein. Unter einem Bernstein-Satz nullter Ordnung verstehen wir eine Aussage der Gestalt: Ist u Lösung der elliptischen Gleichung $Lu = 0$ auf ganz $\mathbf{R}^n$, so folgt, daß u konstant ist (*ohne* die Voraussetzung der globalen Beschränktheit). Beispiele für solche Gleichungen in zwei Dimensionen wurden in [8] gegeben. Wegen der bekannten notwendigen Dimensionsbeschränkung $n \leq 7$ für den Bernsteinschen Satz bei der Minimalflächengleichung erhob sich die Frage, ob auch für Bernsteinsätze nullter Ordnung Dimensionsbeschränkungen notwendig sind. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie wir in § 1 anhand verschiedener Gleichungstypen zeigen. Die bisher bekannten Bernstein-Sätze nullter Ordnung sind bei weitem nicht so tiefliegend wie der klassische Bernsteinsche Satz bei der Minimalflächengleichung (mit unserer Sprechweise wäre dies ein Bernsteinsatz erster Ordnung); die entsprechenden Beweise sind eher als simpel anzusehen, jedoch halten wir die Ergebnisse für amüsant. Es ist z. B. sogar möglich, Bernstein-Sätze nullter Ordnung für gewisse Gleichungen mit Δ als „Hauptteil" anzugeben, s. § 1. Der Satz von Liouville und seine Verallgemeinerungen besitzen mannigfache innermathematische Anwendungen, sogar in der Theorie der Banachalgebren, sowie in der Regularitätstheorie nichtlinearer elliptischer Gleichungen (s. [7, 10—12, 16]). Wir zeigen in § 2 einen Zusammenhang von Liouville-Sätzen für elliptische Gleichungen $Lu = 0$ und gewissen Eigenschaften der Lösungen zugeordneter hyperbolischer Gleichungen $\varphi_{tt} + L\varphi = 0$. Insbesondere ergibt sich eine einfache Technik, um Liouville-Sätze für *Potenzen* elliptischer Operatoren zweiter Ordnung zu erhalten.

Mit L^p, $H^{1,p}$, $H^{1,p}_{\text{loc}}$ etc. bezeichnen wir im folgenden die üblichen Lebesgueschen und Sobolevschen Funktionenräume; $H^{1,p}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ bezeichnet den Sobolevraum der auf $\mathbf{R}^n$ erklärten reellen Funktionen(klassen) mit Werten in $\mathbf{R}^N$ und verallgemeinerten ersten Ableitungen in L^p. Der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathbf{R}^n$ wird mit $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ bezeichnet. Mit $L^\infty(0, T; V)$ wird der bei zeitabhängigen Problemen verwendete Funktionenraum von V-wertigen L^∞-Funktionen auf $[0, T]$ bezeichnet, hierbei ist zumeist $V = H^{1,2}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ oder $V = L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$. Das Symbol $\int dx$ bedeutet die Integration über $\mathbf{R}^n$ bzw. über den Träger des Integranden; $(v, w) = \int vw\, dx$. Mit K bezeichnen wir häufig die übliche „generische" Konstante, welche in einer Kette von Abschätzungen den Wert ändern darf, jedoch von den relevanten Parametern unabhängig ist. Schließlich schreiben wir $B_R = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leqq R\}$.

§ 1 Bernsteinsätze nullter Ordnung für gewisse Gleichungen und Systeme mit nicht asymptotisch verschwindendem Hauptteil

Zur Einführung betrachten wir die Gleichung

$$\Delta u = a(x)\, |\nabla u|^2, \qquad 0 < \varepsilon_0 \leqq a(x) \leqq K, \tag{1.1}$$

welche im „schwachen" Sinne auf ganz $\mathbf{R}^n$ gelten soll, mit einer Lösung $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, d. h. es gilt

$$(\nabla u, \nabla \varphi) + (a\, |\nabla u|^2, \varphi) = 0 \tag{1.2}$$

für alle Lipschitz-stetigen Funktionen φ mit kompaktem Träger. Man sieht leicht ein, daß im Fall $n = 2$ für die Gleichung (1.1) ein *Liouvillesatz* gilt, d. h. ist $u \in H^1_{\text{loc}} \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ eine schwache Lösung von (1.1) auf ganz $\mathbf{R}^n$, so folgt $u = \text{const.}$ Man beweist dies, indem man in (1.2) für die Funktion φ eine Testfunktion $\tau = \varphi$ mit den folgenden Eigenschaften wählt

$$\tau \in H^{2,\infty}(\mathbf{R}^n) \tag{1.3}$$

$$\tau = 1 \text{ auf } B_R,\ \tau = 0 \text{ auf } B_{2R},\ 0 \leqq \tau \leqq 1 \text{ sonst} \tag{1.4}$$

$$|\nabla \tau| \leqq KR^{-1}, \quad |\nabla^2 \tau| \leqq KR^{-2} \tag{1.5}$$

mit einer nicht von R abhängigen Konstanten K. Es ergibt sich dann

$$\int a\, |\nabla u|^2\, \tau\, dx = \int u\, \Delta\tau\, dx \leqq CKR^{-2}\, |B_{2R}| \leqq K_0$$

und durch Grenzübergang $R \to \infty$ unter Benutzung der Ungleichung $a \geqq \varepsilon_0$

$$\int |\nabla u|^2\, dx < \infty, \qquad \text{d. h. } \nabla u \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Wir wenden (1.2) erneut an und erhalten

$$\varepsilon_0 \int |\nabla u|^2\, \tau\, dx \leqq \int \nabla u\, \nabla\tau\, dx\,. \tag{1.6}$$

Durch eine einfache Überlegung, welche in Lemma 1.1 in allgemeinerer Form festgehalten ist, schließt man, daß die rechte Seite von (1.6) im Fall $n = 2$ gegen Null geht wenn $R \to \infty$. Hieraus folgt $\int |\nabla u|^2 \, dx = 0$ und somit $u = \text{const}$.

Mit Hilfe ähnlicher Tricks lassen sich sehr leicht Liouvillesätze für andere Typen von Gleichungen oder Systemen herleiten, z. B. für das System $\Delta u = F(x, u, \nabla u)$ unter den Bedingungen $u \cdot F(x, u, \nabla u) \geqq 0$, $|F(x, u, \nabla u)| \leqq K \, |\nabla u|^2$; siehe etwa [8, 16, 9]. Dies überrascht heutzutage niemanden mehr. Für amüsant halten wir jedoch die Beobachtung, daß für Gleichung (1.1) im Fall $n = 2$ die Bedingung $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, also die *globale Beschränktheit*, zum Nachweis der *Konstanz von u nicht benötigt wird*. Dies führt also auf einen Bernsteinsatz nullter Ordnung. Wir beweisen dies für eine Klasse von Systemen in N Gleichungen und n Dimensionen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^{\nu}(x, \nabla u) = F^{\nu}(x, \nabla u), \quad \nu = 1, \ldots, N. \tag{1.7}$$

Die Funktionen a_i^{ν}, $F^{\nu} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{nN} \to \mathbf{R}$ erfüllen hierbei die folgenden Voraussetzungen für $i = 1, \ldots, n$, $\nu = 1, \ldots, N$:

$$a_i^{\nu}(\cdot, \nabla u) \quad \text{und} \quad F^{\nu}(\cdot, \nabla u) \ \text{sind meßbar}, \tag{1.8}$$

$$F^{\nu}(\cdot, \nabla u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n), \tag{1.9}$$

$$|a_i^{\nu}(x, \nabla u)| \leqq K \, |\nabla u|^{p-1}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} F^{\nu}(x, \nabla u) \geqq c \, |\nabla u|^p \tag{1.11}$$

mit einer positiven Konstanten c. Hierbei ist u die betrachtete Lösung des Systems (1.7). Die Bedingung (1.9) wird nur benötigt, um den Begriff der schwachen Lösung zu definieren, die Bedingung $F(x, \eta) \leqq K_R \, |\eta|^p + K_R$ für $x \in B_R$, $\eta \in \mathbf{R}^{nm}$, $\nabla u \in H^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ wäre z. B. hinreichend.

Satz 1.1: *Es sei $u \in H^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems* (1.7) *mit $p \geqq n$. Es gelte die Koerzitivitätsbedingung* (1.11), *die Wachstumsbedingungen* (1.9), (1.10), *und die Regularitätsbedingung* (1.8). *Dann ist u eine konstante Vektorfunktion auf $\mathbf{R}^n$.*

Zunächst beweisen wir

Lemma 1.1: *Es sei $u \in H^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ und $\nabla u \in L^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{nN})$ sowie $p \geqq n$. Es gelte für alle nichtnegativen $\tau \in H^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ mit kompaktem Träger*

$$\int |\nabla u|^p \, \tau^p \, dx \leqq K \int |\nabla u|^{p-1} \, |\nabla \tau| \, \tau^{p-1} \, dx. \tag{1.12}$$

Dann ist $\nabla u = 0$.

Beweis: Wir wählen für τ eine Funktion mit den Eigenschaften (1.3) bis (1.5) und schätzen die rechte Seite von (1.12) mit der Youngschen Ungleichung ab. Dies ergibt

$$\int |\nabla u|^p \, \tau^p \, dx \leqq K\varepsilon^{-p'} \int |\nabla u|^p \, \chi(B_{2R} - B_R) \, dx + K\varepsilon^p \int |\nabla \tau|^p \, dx,$$

$$1/p + 1/p' = 1.$$

Hierbei ist $\chi(E)$ die charakteristische Funktion der Menge E. Der Faktor $\chi(B_{2R} - B_R)$ rührt von dem Faktor $\nabla \tau$, welcher auf $B_{2R} - B_R$ verschwindet, her. Da nun $|\nabla u|^p \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ist, konvergiert das erste Integral auf der rechten Seite der letzten Ungleichung gegen Null, falls $R \to \infty$. Die Eigenschaften (1.4), (1.5) implizieren die gleichmäßige Beschränktheit der Integrale $\int |\nabla\tau|^p \, dx$ für $R \to \infty$, $p \geqq n$. Daraus folgt

$$\int |\nabla u|^p \, dx = \lim_{R\to\infty} \int |\nabla u|^p \, \tau^n \, dx \leqq K_0 \varepsilon^{1-1/p}$$

und der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt die Behauptung des Lemmas ∎

Beweis von Satz 1.1: Wir wählen in der schwachen Formulierung von (1.7) für jede Gleichung des Systems die Testfunktion $\varphi = \tau^p$, wobei τ die Eigenschaften (1.3) bis (1.5) erfüllt (Eigenschaften betreffs $\nabla^2\tau$ werden nicht benötigt). Es folgt dann mit (1.10) und (1.11)

$$c \int |\nabla u|^p \, \tau^p \, dx \leqq \sum_{\nu=1}^{N} \int F^\nu(x, \nabla u) \, \tau^p \, dx \leqq K \int |\nabla u|^{p-1} \, |\nabla\tau| \, \tau^{p-1} \, dx. \tag{1.13}$$

Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung erhält man

$$\frac{1}{2} c \int |\nabla u|^p \, \tau^p \, dx \leqq K \int |\nabla\tau|^p \, dx$$

und die rechte Seite der letzten Ungleichung ist wie im Beweis von Lemma 1.1 beschränkt für $R \to \infty$. Daraus folgt — beachte, daß $\tau = 1$ auf B_R ist —

$$\int_{B_R} |\nabla u|^p \, dx \leqq K_0$$

und durch Grenzübergang $R \to \infty$ schließlich $\nabla u \in L^p$. Die Behauptung des Satzes folgt aus (1.13) und Lemma 1.1 ∎

Anmerkung 1: Die Aussage von Satz 1.1 ist im Fall $n \geq 3$ falsch, wie das Beispiel

$$-\Delta u = |\nabla u|^2, \qquad u = (2 - n) \ln \frac{1}{|x|}$$

zeigt.

Anmerkung 2: Im Fall $n = 2$ sichern die Voraussetzungen (1.8) bis (1.11) zuzüglich der Wachstumsbedingung $|F^\nu| \leqq K|\nabla u|^2 + K$ die innere *Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen* des Systems (1.7). Der Nachweis ist nichttrivial und benutzt Methoden aus [8] und [19]. Dieses Resultat ist von Interesse, da *ohne* die Koerzitivitätsvoraussetzung (1.11) die Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen des Systems $\Delta u = F(x, \nabla u)$ im allgemeinen nicht zutrifft. Meistens und so auch hier ist die Herleitung eines Liouvillesatzes oder Bernsteinsatzes nullter Ordnung viel einfacher als die eines Regularitätssatzes. In vielen Fällen erlauben jedoch die Systeme, für die ein Liouvillesatz gilt, auch den Nachweis eines Regularitätssatzes bez. der Hölder-Stetigkeit der Lösung, siehe [7, 9, 11, 16], obwohl dieses Prinzip auch falsch sein kann, wie ein Gegenbeispiel von Meier [15] zeigt. Satz 1.1 gibt in diesem Sinne auch eine Anregung zur Regularitätstheorie elliptischer Systeme. Systeme der Gestalt $\Delta u = a(x) \, |\nabla u|^2$ und deren Verallgemeinerungen kommen in der Theorie der stochastischen Differentialspiele vor [1].

Die Tatsache, daß die Voraussetzungen von Satz 1.1 einen *Liouvillesatz* implizieren, wurde unabhängig vom Verfasser auch von B. Kawohl und P. L. Lions erkannt.

Wir erwähnen noch einen anderen Gleichungstyp, für den sich ein Bernsteinsatz nullter Ordnung in einfacher Weise herleiten läßt. Es handelt sich um Gleichungen der Gestalt

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x, u) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 0, \tag{1.14}$$

deren Koeffizienten die Caratheodory-Bedingung

$$a_{ik}(x, \mu) \text{ ist meßbar in } x \text{ und stetig in } \mu \tag{1.15}$$

sowie die asymptotische Bedingung

$$|a_{ik}(x, \mu)| \leqq K(1 + |\mu|)^{-p}; \qquad x \in \mathbf{R}^n, \mu \in \mathbf{R}, \tag{1.16}$$

mit einer Konstanten $p > 1$ erfüllen. In einer früheren Arbeit [7] haben wir im Fall $n = 2$ unter der zusätzlichen Voraussetzung der (nicht notwendig gleichmäßigen) Elliptizität für die Gleichung (1.14) einen Bernsteinsatz nullter Ordnung bewiesen. Es erhebt sich die Frage, ob ein ähnlicher Satz für $n \geqq 3$ gilt. Dies ist unter der folgenden (leider starken) Elliptizitätsbedingung möglich:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, \mu)\, \xi_i \xi_k \geqq c(1 + |\mu|^{-p})\, |\xi|^2, \qquad x, \xi \in \mathbf{R}^n, \mu \in \mathbf{R}, \tag{1.17}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und der Konstanten p aus (1.16).

Satz 1.2: *Es sei $u \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ eine schwache Lösung der Gleichung* (1.14). *Es gelte die Caratheodory-Bedingung* (1.15) *sowie die Wachstums- und Elliptizitätsbedingung* (1.16), (1.17). *Dann ist u konstant auf $\mathbf{R}^n$.*

Beweis: Wir schreiben die Gleichung (1.14) in der Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} v \right) = 0 \tag{1.18}$$

mit $b_{ik} = (1 + |u|^m)^{1+1/m} a_{ik}(\cdot, u)$ und $v = u/(1 + |u|^m)^{1/m}$, $m = p - 1$. Wegen der Bedingungen (1.16), (1.17) sind die b_{ik} gleichmäßig beschränkt auf $\mathbf{R}^n$ und die zugehörige quadratische Form gleichmäßig positiv definit. Da $v \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}} \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist daher der Satz von Liouville für diese Situation anwendbar und es folgt $v = \mathrm{const}$ auf $\mathbf{R}^n$. Daraus folgt die gleichmäßige Beschränktheit von u und somit die gleichmäßige Elliptizität der Gleichung (1.14). Erneute Anwendung des Satzes von Liouville ergibt $u = \mathrm{const}$ auf $\mathbf{R}^n$ ∎

§ 2 Liouvillesätze für Potenzen elliptischer Operatoren

Es sei B ein (evtl. vektorwertiger) partieller Differentialoperator mit auf $\mathbf{R}^n$ erklärten Koeffizienten. Wir verabreden die Sprechweise

> „B besitzt die Liouville-Eigenschaft, wenn aus $Bu = 0$ und $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ folgt, daß $u = \mathrm{const}$ auf $\mathbf{R}^n$ ist."

Hierbei ist die Gleichung $Bu = 0$ im Sinne der Distributionstheorie zu verstehen, dies erfordert entsprechende Differenzierbarkeitsannahmen für die Koeffizienten.

In der Arbeit [4] entwickelte P. Chernoff eine elegante Methode zum Nachweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit von *Potenzen* elliptischer Operatoren

$$L = A + q, \qquad A = -\sum_{i,k=1}^{n} D_i(a_{ik} D_k), \qquad a_{ik} = a_{ki}. \tag{2.1}$$

Mit Hilfe eines dem Operator L zugeordneten hyperbolischen Hilfsproblems erster Ordnung (mit komplexwertigen Lösungen) zeigte Chernoff hierbei, daß die Gleichung

$$L^m u = 0, \qquad u \in L^2$$

das *Verschwinden* von u *nach sich zieht.*

Hierbei ist $m \geqq 2$ eine natürliche Zahl und

$$a_{ik} \in H^{2m-1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n), \qquad q \in H^{2m,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \tag{2.2}$$

(schwächere Bedingungen für q sind möglich).
Es wird die (nicht notwendig gleichmäßige) Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k > 0, \qquad x, \xi \in \mathbf{R}^n, \quad |\xi| \neq 0, \tag{2.3}$$

sowie die Nichtnegativität von q,

$$q \geqq 0 \tag{2.4}$$

und die Wachstumsbedingung

$$|a_{ik}(x)| \leqq Kx^2 + K \tag{2.5}$$

vorausgesetzt.

Es zeigt sich, daß eine Variante der Chernoffschen Methode zum Nachweis der Liouville-Eigenschaft von L^m (unter Zusatzvoraussetzungen) geeignet ist, wie wir im folgenden erläutern wollen. Anstelle des von Chernoff benutzten hyperbolischen Hilfsproblems erster Ordnung benutzen wir eines von zweiter Ordnung, welches den Vorteil hat, daß man im Reellen arbeiten kann.

Wir betrachten das Cauchyproblem

$$\varphi_{tt} + L\varphi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n,$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi_t(0) = \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Die Voraussetzungen (2.1) bis (2.5) sichern (mit Hilfe von Energieabschätzungen) die Existenz einer Lösung φ mit

$$\varphi \in L^\infty\big(0, T; H^1(\mathbf{R}^n)\big) \quad \text{für alle } T > 0, \qquad \varphi_t \in L^\infty\big(0, \infty, L^2(\mathbf{R}^n)\big) \tag{2.6}$$

sowie der wichtigen Eigenschaft, daß $\varphi(t)$ *beschränkten Träger* hat. Dies folgt aus den Sätzen über das Abhängigkeitsgebiet hyperbolischer Gleichungen, da die Anfangsbedingung ebenfalls beschränkten Träger hat und die Wachstumsbedingung (2.5) gefordert wurde. Für die Herleitung von Liouvillesätzen benötigen wir die stärkere Bedingung, daß der Träger von φ in einem *Kegel* liegt, so daß das Maß μ des Trägers von $\varphi(t)$ die Bedingung

$$\mu\{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(t, x) \neq 0\} \leqq Kt^n + K \tag{2.7}$$

erfüllt. Hierzu benötigen wir allerdings die schärfere Wachstumsbedingung

$$|a_{ik}(x)| \leqq K, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{2.8}$$

sowie die gleichmäßige Elliptizität

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \geqq C_0 > 0, \qquad \xi, x \in \mathbf{R}^n, \qquad |\xi| = 1. \tag{2.9}$$

Die Bedingung (2.7), welche neben der Beschränktheit des Trägers von $\varphi(t)$ entscheidend für die Herleitung von Liouvillesätzen ist, folgt aus (2.8), (2.9) aus bekannten Sätzen über das Abhängigkeitsgebiet hyperbolischer Gleichungen.

Satz 2.1: *Es sei* $n \leqq 3$, $m \geqq 2$ *und* $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ *eine schwache Lösung der Gleichung* $L^m u = 0$ *auf* $\mathbf{R}^n$. *Unter den Symmetrie-, Regularitäts- und Wachstumsvoraussetzungen* (2.1), (2.2), (2.4) *und den Definitheitsvoraussetzungen* (2.4), (2.9) *gilt dann* $u = \text{const}$ *auf* $\mathbf{R}^n$.

Beweis: Wir setzen $f(t) = (\varphi(t), u)$, wobei φ die Lösung des obigen hyperbolischen Hilfsproblems ist. Die Regularitätstheorie (beruhend auf Energieabschätzungen für Differenzenquotienten von u) liefert, daß

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H^{2m,2}(\mathbf{R}^n)) \quad \text{für alle} \quad T > 0$$

und

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{2m} \varphi \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R}^n))$$

ist. Damit ist $f \in H^{2m,2}(0, T)$ für alle T und es gilt

$$f^{(2m)}(s) = \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{2m} \varphi(s), u\right) = (-1)^m (L^m \varphi(s), u) = 0$$

für fast alle $s > 0$, da $L^m u = 0$, L symmetrisch ist, und $\varphi(s)$ beschränkten Träger hat. Somit ist f ein *Polynom* in t. Aus der Energieabschätzung für φ ergibt sich die Beschränktheit von

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_t(t)|^2 \, dx \quad \text{gleichmäßig in } t.$$

Damit erhält man

$$|f'(t)| \leqq K\left(\int u^2 \chi(t) \, dt\right)^{1/2},$$

wobei $\chi(t)$ die charakteristische Funktion des Trägers von $\varphi(t)$ ist. Mit der Voraussetzung $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ sowie der Eigenschaft (2.7) schließen wir weiter $|f'(t)| \leqq K t^{n/2}$. Da f' ein Polynom in t ist, erhalten wir für $n \leqq 3$, daß f' *linear* in t ist. Daher gilt $f''' = 0$ oder

$$(\varphi_{ttt}(t), u) = (L\varphi_t(t), u) = 0$$

für alle t, insbesondere für $t = 0$. Da $\varphi_t(0) = \psi$ ist, erhält man

$$(L\psi, u) = 0 \quad \text{für alle} \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \quad \text{d.h.} \quad Lu = 0$$

und u ist eine global beschränkte Lösung einer elliptischen Gleichung *zweiter* Ordnung mit den entsprechenden Definitheitsbedingungen. Hier ist der Satz von Liouville bereits bekannt und wir erhalten $u = \text{const}$ ∎

Mit einer Variante des eben vorgeführten Tricks erhält man Aussagen bis zur Dimension $n \leqq 5$. Wir benötigen die zusätzliche Voraussetzung

$$q \geqq c_0 \quad \text{mit einer positiven Konstanten } c_0. \tag{2.10}$$

Satz 2.2: *Es sei* $n \leqq 5$, $m \geqq 2$ *und* $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ *eine schwache Lösung der Gleichung* $L^m u = 0$. *Unter den Voraussetzungen* (2.1), (2.2), (2.4), (2.9) *sowie* (2.10) *gilt dann* $u = \text{const}$ *auf* $\mathbf{R}^n$.

Beweis: Der Beweis verläuft zunächst wie bei Satz 1.1; die dort konstruierte Funktion f ist ein Polynom. Über die Energieabschätzung und Bedingung (2.10) bekommt man zusätzlich

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi(t)|^2 \, dx \leqq K.$$

gleichmäßig in t. Daher gilt für die im Beweis von Satz 2.1 konstruierte Funktion f, daß

$$|f(t)| = (\varphi(t), u) \leqq K \left(\int u^2\chi(t)\, dt\right)^{1/2} \leqq Kt^{n/2} + K$$

ist. Da $n \leqq 5$, ist f höchstens quadratisch und daher $f''' = 0$. Der restliche Beweis verläuft wie in Satz 2.1 ▮

Es lassen sich zahlreiche Varianten von Satz 2.1 und 2.2 angeben, z. B. Aussagen vom Typ wie

Satz 2.3: *Es sei $s = s(n)$ die größte natürliche Zahl $\leqq n/2$ und $2m > s + 1$, wenn s ungerade, und $2m > s + 2$, wenn s gerade ist. Der Operator L^s besitze die Liouville-Eigenschaft und es mögen mit Ausnahme der Dimensionsrestriktion die Voraussetzungen von Satz 2.1 gelten. Dann besitzt auch L^m die Liouville-Eigenschaft.*

Wir verzichten auf die Wiedergabe des Beweises.

Wir bringen nun noch einen Liouville-Satz für elliptische *Systeme zweiter Ordnung* mit irregulären Koeffizienten.
Das System hat die Gestalt

$$Lu = 0$$

mit

$$L = A + q, \quad Au = \left((Au)_1, \ldots, (Au)_N\right), \quad q = (q_1, \ldots, q_N),$$

$$(Au)_\nu = -\sum D_i(a_{ik}^{\nu\mu} D_k u_\mu) \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, N).$$

Betreffs der Regularität genügt hier die Voraussetzung

$$a_{ik}^{\nu\mu} \in L^\infty(\mathbf{R}^n), \quad q_i \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n). \tag{2.11}$$

Außerdem benötigen wir die Definitheitsbedingungen

$$(a_{ik}^{\nu\mu} D_i\varphi_\nu, D_k\varphi_\mu) + (q_\nu\varphi_\nu, \varphi_\nu) \geqq c(\varphi, \varphi) + c(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \tag{2.12}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und der Summationskonvention $i, k = 1, \ldots, n$, $\mu, \nu = 1, \ldots, N$,

$$q_\nu > 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{R}^n} q_\nu^{-1}\, dx < \infty, \qquad \nu = 1, \ldots, N. \tag{2.13}$$

Für die verwendete Beweistechnik ist die folgende Eigenschaft des hyperbolischen Hilfsproblems wieder entscheidend:

Der Träger der schwachen Lösung $\varphi(t)$ des Cauchy-Problems zu $\varphi_{tt} + L\varphi = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi_t(0) = \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ ist beschränkt und es gilt $\mu\{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(t, x) \neq 0\} \leqq Kt^n + K$. (2.14)

Bedingung (2.14) ist für Systeme unter verschiedenen Voraussetzungen richtig, wir gehen hier darauf nicht näher ein.

Satz 2.4: *Es sei $u \in H^1_{\text{loc}} \cap L^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ eine schwache Lösung des Systems $Lu = 0$. Unter Voraussetzungen* (2.11) *bis* (2.14) *gilt dann $u = 0$.*

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen gibt es eine Lösung φ des Cauchy-Problems unter (2.14) mit den Eigenschaften

$$\varphi \in L^\infty\left(0, T; H^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)\right) \quad \text{für alle } T > 0, \qquad \varphi_t \in L^\infty\left(0, \infty; L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)\right)$$

sowie

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi^2(t)\, q\, dx < \infty. \tag{2.15}$$

Für die durch $f(t) = \big(\varphi(t), u\big)$ definierte Funktion gilt $f''(t) = 0$ für fast alle t; hierbei wird (2.14) sowie die Voraussetzung $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ und die Gleichungen $\varphi_{tt} + L\varphi = 0$, $Lu = 0$ verwendet. Die mangelnde Regularität der $a^{\nu\mu}_{ik}$ erfordert hierbei etwas Sorgfalt, man weist nach, daß $\int f'(t)\, \tau'(t)\, dt = 0$ für alle $\tau \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ gilt. Es gilt die Abschätzung

$$|f(t)| \leqq |(\varphi(t), u)| \leqq \left(\int |\varphi(t)|^2\, q\, dx\right)^{1/2} \left(\int q^{-1} u^2\, dx\right)^{1/2} \leqq K \tag{2.16}$$

aufgrund von (2.14) und (2.15). Da $f'' = 0$ fast überall und f' absolut stetig ist, folgt mit (2.16) $f(t) = \text{const.}$ und $f'(t) = 0$, insbesondere also $f'(0) = (\psi, u) = 0$ für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^N)$ ∎

LITERATUR

[1] Bensoussan, A., und J. Frehse: Nonlinear elliptic systems in stochastic game theory. J. Reine u. Angew. Math. (erscheint).

[2] Bernstein, S.: Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Z. **26** (1927), 551–558.

[3] Chern, S.: Simple proofs of two theorems on minimal surfaces. L'Enseig. math. **15** (1969), 53–61.

[4] Chernoff, P. R.: Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations. J. Funct. Anal. **12** (1973), 401–414.

[5] De Giorgi, E.: Una estensione del teorema di Bernstein. Ann. Scuola norm. sup. Pisa. Sci fis. mat. III Ser. **19** (1965), 79–85.

[6] Finn, R.: Growth properties of solutions of nonlinear elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956), 415–423.

[7] Frehse, J.: Essential selfadjointness of singular elliptic operators. Bol. Soc. Bras. Mat. **8** (1977), 87–107.

[8] Frehse, J.: On two-dimensional quasi-linear elliptic systems. Man math. **28** (1979), 21–49.

[9] Hildebrandt, S., und K. O. Widman: Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasi-lineare elliptische Gleichungen und Systeme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II. Math.-Phys. Klasse (1979) **4**, 41–49.

[10] Ivert, P.-A.: On quasi-linear elliptic systems of diagonal form. Math. Z. **170** (1980), 283 to 286.

[11] Kawohl, B.: On Liouville theorems, continuity and Hölder continuity of weak solutions to some quasi-linear elliptic systems. Comment. Mat. Univ. Carolinae **21** (1980), 679 bis 698.

[12] Kawohl, B.: On maximum principles and Liouville theorems for quasi-linear elliptic equations and systems. Comment. Mat. Univ. Carolinae **24** (1983), 647–655.

[13] Liouville, J.: Leçons sur les fonctions doublement périodique. Vorlesung 1847. Siehe den historischen Abschnitt in R. Remmert: Funktionentheorie I, § 3.4, S. 176. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1984.

[14] Meier, M.: Liouville theorems for nonlinear elliptic equations and systems. Man math. **29** (1979), 207–228.

[15] Meier, M.: Liouville theorems for nondiagonal elliptic systems in arbitrary dimensions. Math. Z. **176** (1981), 123–133.

[16] Nečas, J.: Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 52). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1983.

[17] Nitsche, J. C. C.: Vorlesungen über Minimalflächen. (Die Grundlehren der math. Wiss.: Bd. 199). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1975.
[18] Simon, L.: On some extensions of Bernstein's theorem. Math. Z. 154 (1977) 265—273.
[19] Wiegner, M.: Über die Regularität schwacher Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Man. math. 15 (1975), 365—384.

Manuskripteingang: 18. 07. 1984

VERFASSER

Prof. Dr. Jens Frehse
Institut für Angewandte Mathematik der Universität
D-5300 Bonn 1, Beringstr. 4—6