Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (5) 1985, S. 403–411

Ein allgemeines Bifurkationstheorem

E. Zeidler

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

Wir beweisen ein allgemeines Bifurkationstheorem. Mit Hilfe von leicht verifizierbaren generischen Verzweigungsbedingungen wählen wir eine Menge B von normierten Elementen im Nullraum des linearisierten Operators aus. Von jedem Element von B geht genau ein Bifurkationszweig des nichtlinearen Problems aus. Außerdem geben wir ein effektives Iterationsverfahren zur Berechnung der Bifurkationszweige an. Das Theorem gestattet eine Reihe interessanter Anwendungen, z. B. auf freie Randwertprobleme bei idealen Flüssigkeiten, auf das Taylor-Problem und das Bénard-Problem in der Theorie der Navier-Stokesschen Gleichungen und auf die Hopf-Bifurkation.

Мы докажем одну общую теорему бифуркации. С помощью легко проверяемых условий ветвления выбираем множество B нормированных элементов ядра линеаризованного оператора. От каждого элемента множества B исходит точно одна ветвь бифуркации нелинейной проблемы. Кроме того даём эффективный метод итерации для вычисления ветвей бифуркации. Теорема допускает несколько интересных применений, например к свободным граничным задачам в теории идеальных жидкостей, к задачам Тэйлора и Бенарда в теории уравнений Навье-Стокса и к бифуркации Хопфа.

We prove a general bifurcation theorem. Using generic bifurcation conditions, we select a set B of normalized elements in the null space of the linearized operator. From each element of B there bifurcates exactly one solution branch of the given nonlinear operator equation. Moreover, we can construct the branches by a convergent iterative method. The theorem allows a variety of interesting applications, e.g., to free boundary value problems in the theory of ideal fluids, to Taylor's problem and Bénard's problem in the framework of the Navier-Stokes equations, and to Hopf bifurcation.

Zu Beginn der sechziger Jahre hat sich Herr Professor Beckert in origineller Weise mit einer Klasse freier Randwertprobleme der Hydrodynamik beschäftigt. Dabei handelte es sich um Schwerewellen, Kapillar-Schwerewellen und Gezeitenwellen. Die folgende kleine Note hängt mit diesen Untersuchungen zusammen. Unser Ziel ist ein allgemeines Bifurkationstheorem, das vielseitige naturwissenschaftliche Anwendungen besitzt und dessen Voraussetzungen sehr natürlich sind und sich in wichtigen Fällen leicht verifizieren lassen. Dieses Theorem verallgemeinert den Hauptsatz in [6], mit dessen Hilfe man eine Reihe freier Randwertprobleme der Hydrodynamik einheitlich behandeln kann. Die Formulierung und der Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit wurden stark beeinflußt durch das Bemühen des Autors, den funktionalanalytischen Kern der Arbeit von Crandall und Rabinowitz [5] zur Hopf-Bifurkation herauszupräparieren.

1. Problemstellung

Wir betrachten die Operatorgleichung

$$F(\varepsilon, x) = 0, \qquad \varepsilon \in E, \qquad x \in X \tag{1}$$

mit der trivialen Lösung

$$x = 0, \qquad \varepsilon = \text{beliebig} \tag{2}$$

und untersuchen, wann $(0, 0)$ ein Bifurkationspunkt von (1) ist, d. h. wann im Punkt $(0, 0)$ von dem trivialen Lösungszweig (2) nichttriviale Lösungen abzweigen. Abb. 1 zeigt die einfachste Situation mit $X = E = \mathbf{R}$. Wir lassen jedoch hier nicht nur den Fall eines reellen Parameters ε zu, sondern fassen ε allgemeiner als Parameter auf, der in dem Banachraum E über $\mathbf{K}$ variiert mit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Für die Hopf-Bifurkation ist beispielsweise die Situation $E = \mathbf{R}^2$ typisch. Wichtig für die Untersuchung von (1) ist das Verhalten der linearisierten Operatorgleichung

$$F_x(0, 0)\, x = y, \qquad x \in X. \tag{3}$$

Hier bezeichnet $F_x(0, 0)$ die Fréchet-Ableitung. In üblicher Weise definieren wir

$$\ker F_x(0, 0) = \{x \in X : F_x(0, 0)\, x = 0\}, \qquad \operatorname{im} F_x(0, 0) = F_x(0, 0)\,(X).$$

Das Lösungsverhalten von (3) wird durch die beiden Zahlen

$$\alpha = \dim\big(\ker F_x(0, 0)\big), \qquad \beta = \operatorname{codim}\big(\operatorname{im} F_x(0, 0)\big)$$

charakterisiert. Dabei entspricht α der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (3) mit $y = 0$, während β gleich der Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen ist, die man an y stellen muß, damit (3) eine Lösung hat. Wie wir zeigen werden, spielt β auch eine zentrale Rolle für die Lösbarkeit des nichtlinearen Problems (1) in der Umgebung von $(0, 0)$.

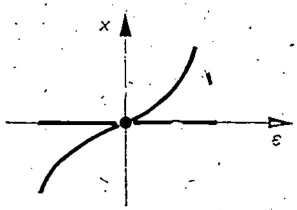

Abb. 1

Unser Ziel ist der Nachweis einer nichttrivialen C^1-Lösung von (1) der Form

$$x(s, b) = sb + o(s), \qquad Px(s, b) = sb, \qquad \varepsilon(s, b) = O(s) \tag{4}$$

für alle s in einer Nullumgebung von $\mathbf{K}$. Dabei ist b ein festes Element aus dem Nullraum $\ker F_x(0, 0)$ mit $\|b\| = 1$, und P ist ein Projektionsoperator auf diesen Nullraum. Es entstehen zwei wichtige Fragen:

(F1) Welchen Einschränkungen unterliegt die Bifurkationsrichtung b, die das Verhalten des Bifurkationszweiges in erster Ordnung bestimmt?

(F2) Welcher Zusammenhang muß zwischen der Dimension des Parameterraumes E und der Linearisierung bezüglich x, d. h. der Fréchet-Ableitung $F_x(0, 0)$ bestehen, um ein allgemeines Bifurkationsresultat zu erhalten?

Wie wir weiter unten sehen werden, kann die Bifurkationsrichtung b nicht völlig beliebig vorgegeben werden, sondern b wird durch die generische Verzweigungsbedingung (H3) eingeschränkt. Solche b nennen wir *zulässig*. Die Menge der zulässigen Richtungen b bildet eine offene Menge B auf der Einheitssphäre von $\ker F_x(0, 0)$, die symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Wie wir ferner sehen werden, ist die nichttriviale Lösung (4) durch die Forderung $Px = sb$ eindeutig festgelegt. Dabei gilt

$$x(s, -b) = x(-s, b); \qquad \varepsilon(s, -b) = \varepsilon(-s, b) \tag{5}$$

für alle s in einer Nullumgebung von $\mathbf{K}$, d. h. für b und $-b$ erhält man erwartungsgemäß die gleiche Lösungskurve. Wegen (H3) weiter unten muß stets

$$\operatorname{codim}\big(\operatorname{im} F_x(0, 0)\big) = \dim E \tag{6}$$

gelten, d. h. die Dimension des Parameterraumes E ist grob gesprochen gleich der Anzahl der Dimensionen, die dem Bild von $F_x(0, 0)$ fehlen, um den Bildraum aufzuspannen. In dem wichtigen Spezialfall eines reellen Parameters ε, d. h. $E = \mathbf{R}$, muß folglich $\operatorname{codim}\big(\operatorname{im} F_x(0, 0)\big) = 1$ sein. Dagegen fordern wir für den Nullraum lediglich $\dim\big(\ker F_x(0, 0)\big) \geqq 1$. Entscheidend für unser generisches Bifurkationsresultat ist deshalb nicht die Dimension des Nullraumes, sondern die Kodimension des Bildraumes von $F_x(0, 0)$. Zu beachten ist jedoch, daß beide Dimensionen über den Index in der folgenden Weise miteinander zusammenhängen:

$$\operatorname{ind} L = \dim(\ker L) - \operatorname{codim}(\operatorname{im} L).$$

Dabei setzen wir $L = F_x(0, 0)$. In dem häufig auftretenden Spezialfall $\operatorname{ind} L = 0$ haben wir deshalb $\dim\big(\ker F_x(0, 0)\big) = \dim E$.

2. Der Hauptsatz

Unsere Voraussetzungen lauten folgendermaßen.

(H1) *Trivialer Lösungszweig.* Die Abbildung $F\colon U(0, 0) \subseteq E \times X \to Y$ ist vom Typ C^k mit $k \geqq 2$, d. h. sie ist k-fach stetig Fréchet-differenzierbar auf der offenen Umgebung $U(0, 0)$ des Punktes $(0, 0)$. Ferner sind X, Y und E Banachräume über $\mathbf{K}$ mit $E \neq \{0\}$. Außerdem gilt

$$F(\varepsilon, 0) = 0 \qquad \text{für alle } \varepsilon.$$

(H2) *Spaltungsbedingung.* Wir setzen $N = \ker F_x(0, 0)$ und $R = \operatorname{im} F_x(0, 0)$ und verlangen, daß N bzw. R den Raum X bzw. Y spaltet, d. h. es gibt direkte topologische Summen

$$X = N \oplus N^\perp \quad \text{und} \quad Y = R \oplus R^\perp$$

mit den entsprechenden fest gewählten linearen, stetigen Projektionsoperatoren $P\colon X \to N$ und $Q\colon Y \to R$.

Diese Voraussetzung ist stets erfüllt, falls $F_x(0, 0)$ ein Fredholm-Operator ist, d. h. wenn gilt $\dim N < \infty$ und $\dim R^\perp < \infty$. Große Klassen von Differential- und Integraloperatoren haben diese Eigenschaft. Wir erinnern daran, daß $\operatorname{codim}\big(\operatorname{im} F_x(0, 0)\big) = \dim R^\perp$ ist.

(H3) *Generische Verzweigungsbedingung.* Das fest gewählte Element b aus N hat die Eigenschaft, daß die sogenannte *charakteristische* Gleichung

$$QF_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon b = y, \qquad \varepsilon \in E \tag{7}$$

für jedes $y \in QY$ genau eine Lösung ε hat. Dabei bezeichnet $F_{\varepsilon x}(0, 0)$ die entsprechende partielle Fréchet-Ableitung. Ferner sei $\|b\| = 1$.

In dem häufig auftretenden Fall, daß F analytisch ist, gilt

$$F(\varepsilon, x) = Cx + D\varepsilon x + \cdots.$$

Dann ist $F_x(0, 0) = C$ und $F_{\varepsilon x}(0, 0) = D$.

Das folgende Beispiel gestattet es, die Voraussetzung (H3) bei vielen Anwendungen bequem nachzuprüfen. Im Mittelpunkt steht dabei die Determinantenbedingung

$$\det \left(\langle y_i^*, F_{\varepsilon_j x}(0, 0)\, b\rangle\right) \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Hier schreiben wir $\langle y^*, y\rangle$ für $y^*(y)$, falls $y \in Y$ und $y^* \in Y^*$ ist.

Beispiel 1: Die Voraussetzungen (H2) und (H3) sind erfüllt, falls die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) $E = \mathbf{K}^n$, $\quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$;

(ii) $F_x(0, 0)$ ist ein Fredholm-Operator.

(iii) Es gilt (8), wobei $\{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$ eine Basis in $\ker F_x(0, 0)^*$ ist und b zu $\ker F_x \times (0, 0)$ gehört.

Beweis: Wir wählen Elemente $y_1, \ldots, y_n \in Y$ mit $\langle y_i^*, y_j\rangle = \delta_{ij}$ und setzen

$$Qy = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y\rangle\, y_i.$$

Dann ist der Projektionsoperator Q von der in (H2) geforderten Form. Gleichung (7) ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j QF_{\varepsilon_j x}(0, 0)\, b = y,$$

d. h.

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \langle y_i^*, F_{\varepsilon_j x}(0, 0)\, b\rangle = \langle y_i^*, y\rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wegen (8) kann man dieses lineare Gleichungssystem eindeutig nach allen ε_j auflösen. Damit ist (H3) erfüllt ∎

Bei konkreten Problemen kann man sich $y_1^*, \ldots, y_n^*$ folgendermaßen beschaffen. Man setzt $L = F_x(0, 0)$ und bestimmt $m = \dim (\ker L)$ sowie $\operatorname{ind} L$. Daraus erhält man $n = m - \operatorname{ind} L$. Nunmehr suche man n linear unabhängige Funktionale $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$ mit der Eigenschaft

$$\langle y_j^*, Lx\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X \text{ und } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dann bildet das System $\{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$ eine Basis von $\ker L^*$. Das kann man in suggestiver Weise auch so formulieren: $y_1^*, \ldots, y_n^*$ bilden n linear unabhängige Lösbarkeitsbedingungen für die Gleichung

$$Lx = y, \qquad x \in X.$$

In dem wichtigen Spezialfall der Hopf-Bifurkation kann man Beispiel 1 mit $n = 2$ anwenden. Bei vielen hydrodynamischen Anwendungen liegt der Fall $\operatorname{ind} L = 0$ und $n = 1$ vor.

Theorem 1: *Gilt* (H1) *bis* (H3), *dann ist* (0, 0) *ein Bifurkationspunkt der Ausgangsgleichung* (1).

Genauer gilt folgende Existenz- und Eindeutigkeitsaussage.

Es gibt positive Zahlen, s_0, ε_0 *und* r_0, *so daß* (1) *zu jedem Parameterwert* $s \in \mathbf{K}$ *mit* $0 < |s| \leqq s_0$ *genau eine Lösung* $(\varepsilon, x) \in E \times X$ *besitzt mit*

$$\|\varepsilon\| \leqq \varepsilon_0, \qquad \|x\| \leqq r_0, \qquad Px = sb. \tag{9}$$

Diese Lösung hat die Form (4) *mit der Symmetrieeigenschaft* (5). *Für* $|s| \leqq s_0$ *ist die Lösung* (4) *vom Typ* C^{k-1} *bezüglich* s, *und sie ist in einer Umgebung von* $s = 0$ *analytisch, falls* F *in einer Umgebung von* $(0, 0)$ *analytisch ist.*

Die trivialen Lösungen $(\varepsilon, 0)$ *von* (1) *sind die einzigen Lösungen von* (1), *die der Bedingung* (9) *mit* $s = 0$ *genügen.*

Bevor wir das beweisen, betrachten wir einige wichtige Ergänzungen, die teils unmittelbar, teils erst mit oder nach dem Beweis von Theorem 1 bewiesen werden.

3. Konstruktion des nichttrivialen Lösungszweiges

Wir setzen $C = F_x(0, 0)$ und $D = F_{\varepsilon x}(0, 0)$.

Korollar 1: *Für festes* $s \in \mathbf{K}$ *mit* $0 < |s| \leqq s_0$ *betrachten wir das Iterationsverfahren*

$$\begin{aligned} sQD\varepsilon_{n+1}b &= Q\big(sD\varepsilon_n b + Cx_n - F(\varepsilon_n, x_n)\big) \\ Cx_{n+1} &= sD(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})\, b + Cx_n - F(\varepsilon_n, x_n) \end{aligned} \tag{10}$$

mit der Nebenbedingung $Px_{n+1} = sb$ *und den Startpunkten* $\varepsilon_0 = 0$, $x_0 = sb$.

Dann ist $(\varepsilon_{n+1}, x_{n+1})$ *für jedes* $n = 0, 1, \ldots$ *eindeutig bestimmt und konvergiert für* $n \to \infty$ *gegen die nichttriviale Lösung* (4) *von Theorem* 1.

Das Verfahren (10) sieht nur scheinbar kompliziert aus. Tatsächlich ergibt es sich im Beweis von Theorem 1 in sehr natürlicher Weise als Iterationsverfahren zum Satz über implizite Funktionen.

Ist F analytisch, dann kann man die Lösung in der folgenden einfachen Weise bestimmen. Wir gehen aus von dem Ansatz

$$\varepsilon = s\varepsilon_1 + s^2\varepsilon_2 + \cdots, \qquad x = sb + s^2x_2 + \cdots.$$

Nach Theorem 1 gilt $Px = sb$. Deshalb ist $Px_n = 0$ für $n = 2, 3, \ldots$ Das ist die erste wichtige Beobachtung. Aus $F(\varepsilon, x) = 0$ erhalten wir dann sukzessiv für $n = 2, 3, \ldots$ durch Vergleich der Terme mit s^n eine Gleichung der Form

$$F_x(0, 0)\, x_n = y(\varepsilon_{n-1}), \qquad Px_n = 0. \tag{11}$$

Der entscheidende Trick besteht nun darin, daß wir zunächst ε_{n-1} aus der Lösbarkeitsbedingung

$$Qy(\varepsilon_{n-1}) = 0 \tag{12}$$

bestimmen. Das ergibt die Gleichung

$$QF_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon_{n-1}b = y$$

mit einem geeigneten y. Daraus erhalten wir nach der Verzweigungsbedingung (H3) den Entwicklungskoeffizienten ε_{n-1} in eindeutiger Weise. Das ist die zweite wichtige Beobachtung. Wegen (12) ist nunmehr die Lösbarkeitsbedingung für (11) erfüllt, und $Px_n = 0$ erzwingt die Eindeutigkeit von x_n.

In dieser Weise erhält man sukzessive ε_{n-1} und x_n für $n = 2, 3, \ldots$ Diese Überlegung zeigt auch, daß man in sehr natürlicher Weise auf die Verzweigungsbedingung (H3) geführt wird.

4. Gruppeninvarianz

Bei einer Reihe von Anwendungen möchte man von den Symmetrieeigenschaften der Gleichung $F(\varepsilon, x) = 0$ auf die Symmetrie der Lösung schließen. Das folgende Korollar stellt ein solches Resultat bereit.

Korollar 2: *Der lineare, stetige Operator $T: X \to X$ lasse die Ausgangsgleichung $F(\varepsilon, x) = 0$ und den Nullraum* $\ker F_x(0, 0)$ *invariant. Ferner genüge neben b auch Tb der Verzweigungsbedingung* (H3), *wobei wir jedoch auf die Normierungsbedingung $\|Tb\| = 1$ verzichten. Dann gilt*

$$Tx(s, b) = x(a^{-1}s, aTb), \qquad \varepsilon(s, b) = \varepsilon(a^{-1}s, aTb) \tag{13}$$

für jedes feste $a \neq 0$ aus **K** *und alle s in einer Nullumgebung in* **K**, *die von a abhängt.*

Speziell für $Tb = b$ ist $Tx(s, b) = x(s, b)$.

Beweis: Wegen der Invarianzeigenschaft von $\ker F_x(0, 0)$ ist $TP = PT$. Nach Theorem 1, das auch ohne die Normierungsbedingung in (H3) gilt, existiert eine Lösung

$$\varepsilon(s, Tb), x(s, Tb) \quad \text{mit} \quad Px(s, Tb) = sTb.$$

Aus der Lösung

$$\varepsilon(s, b), x(s, b) \quad \text{mit} \quad Px(s, b) = sb$$

erhalten wir wegen der Invarianz von (1) bezüglich T und wegen $TP = PT$ die neue Lösung

$$\varepsilon(s, b), Tx(s, b) \quad \text{mit} \quad PTx(s, b) = sTb.$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Theorem 1 ergibt (13) mit $a = 1$.

Für $a \neq 0$ setze man $t = a^{-1}s$ und schließe analog ∎

5. Parameterabhängigkeit

Wir nehmen an, daß F noch zusätzlich von einem Parameter p abhängt, der auf einer offenen Menge M eines B-Raumes über **K** variiert, d. h. anstelle von (1) betrachten wir die Gleichung

$$F(\varepsilon, x, p) = 0. \tag{14}$$

Korollar 3: *Ist F auf $U(0, 0) \times M$ eine C^k-Abbildung mit $k \geqq 2$ bzw. analytisch, dann hängen die Lösungen* (4) *von* (14) *nicht nur von s, sondern auch von dem Parameter p ab, und zwar sind sie C^{k-1}-Abbildungen bzw. analytisch bezüglich (s, p).*

Die Nullumgebung V bezüglich s, auf der die Lösung erklärt ist, kann von p abhängen. Jedoch für alle p in einer hinreichend kleinen Umgebung eines festen Parameters p_0 hängt V nicht von p ab.

6. Regularisierung

Entspricht die Ausgangsgleichung $F(\varepsilon, x) = 0$ einer nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung, z. B. den stationären Navier-Stokesschen Gleichungen, dann entsteht in natürlicher Weise die Frage, wann die Lösungen in Banachraum X auch in einem Banachraum X_0 liegen, der bei Anwendungen Funktionen entspricht, die gegenüber denen in X glatter sind. Bemerkenswert an dem folgenden Korollar ist die Tatsache, daß nur Regularitätseigenschaften des linearisierten Problems

$$F_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon b + F_x(0, 0)\, w = h \tag{15}$$

eine Rolle spielen, d. h. bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen reicht die gut ausgearbeitete Regularitätstheorie für lineare elliptische Gleichungen aus.

Korollar 4: *Wir betrachten neben X noch einen weiteren B-Raum X_0 über* **K**. *Ferner genüge für alle $h \in Y$ jede Lösung $(\varepsilon, w) \in E \times N^{\perp}$ von* (15) *der a priori Abschätzung*

$$\|\varepsilon\|_E + \|w\|_{X_0} \leqq \text{const}\, \|h\|_Y. \tag{16}$$

Dann ist die Lösung (4) *von Theorem* 1 *nicht nur vom Typ C^{k-1} bzw. analytisch in X, sondern auch in X_0. Außerdem konvergiert das Iterationsverfahren* (10) *auch in X_0.*

7. Beweis von Theorem 1

Die Idee des Beweises beruht auf dem Trick „Division durch s“ und auf der Anwendung des Satzes über implizite Funktionen.

(I) *Linearisiertes Problem.* Wir zeigen zunächst, daß die lineare Gleichung (15) für jedes $h \in Y$ genau eine Lösung $(\varepsilon, w) \in E \times N^{\perp}$ besitzt mit

$$\|\varepsilon\| + \|w\| \leqq \text{const}\, \|h\|. \tag{17}$$

Das ist die entscheidende Beobachtung für den Beweis. Beachten wir $(I - Q)\, F_x(0, 0) = F_x(0, 0)$, dann ist (15) äquivalent zu

$$QF_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon b = Qh,$$

$$F_x(0, 0)\, w = (I - Q)\, h - (I - Q)\, F_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon b.$$

Wegen (H3) können wir die erste Gleichung eindeutig nach ε auflösen. Anschließend können wir wegen $w \in N^{\perp}$ auch die zweite Gleichung eindeutig nach w auflösen. Schreiben wir (15) in der Form $L(\varepsilon, w) = h$, dann ist der Operator $L\colon E \times N^{\perp} \to Y$ bijektiv und stetig. Aus dem Satz über offene Abbildungen von Banach folgt dann sofort (17).

(II) *Vorbereitung zum Iterationsverfahren.* Die Gleichung

$$F_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon_{n+1} b + F_x(0, 0)\, w_{n+1} = h_n \tag{18}$$

ist äquivalent zu

$$QF_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon_{n+1} b = Qh_n,$$

$$F_x(0, 0)\, w_{n+1} = (I - Q)\, h_n - (I - Q)\, F_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon_{n+1} b.$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit s, und setzen wir $x_{n+1} = sb + sw_{n+1}$, dann erhalten wir wegen $F_x(0, 0)\, b = 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} &sQF_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon_{n+1} b = sQh_n\,, \\ &F_x(0, 0)\, x_{n+1} = sh_n - sF_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon_{n+1} b\,, \qquad Px_{n+1} = sb\,. \end{aligned} \tag{19}$$

(III) *Existenzbeweis.* Wir setzen $x = sb + sw$ mit $w \in N^{\perp}$ und definieren

$$H(\varepsilon, w, s) = \begin{cases} s^{-1} F(\varepsilon, sb + sw) & \text{für } s \neq 0 \\ F_x(\varepsilon, 0, 0)\, (b + w) & \text{für } s = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist H eine C^{k-1}-Abbildung auf einer Nullumgebung mit

$$H_\varepsilon(0, 0, 0)\, \varepsilon = F_{\varepsilon x}(0, 0)\, \varepsilon b\,, \qquad H_w(0, 0, 0) = F_x(0, 0)\,.$$

Die Ausgangsgleichung $F(\varepsilon, x) = 0$ mit $x = sb + sw$ für $s \neq 0$ ist dann äquivalent zu

$$H(\varepsilon, w, s) = 0\,. \tag{20}$$

Die Linearisierung dieser Gleichung bezüglich (ε, w) entspricht genau (15). Nach (I) können wir auf (20) den Satz über implizite Funktionen anwenden (vgl. [7/Vol. 1: Theorem 4.B]). Dadurch erhalten wir für jedes feste s in einer Nullumgebung von $\mathbf{K}$ genau eine Lösung $\varepsilon(s)$, $w(s)$.

(IV) *Iterationsverfahren.* Der Satz über implizite Funktionen liefert zu (20) das Iterationsverfahren

$$H_\varepsilon(0, 0, 0)\, \varepsilon_{n+1} + H_w(0, 0, 0)\, w_{n+1} = h_n \tag{21}$$

mit

$$h_n = H_\varepsilon(0, 0, 0)\, \varepsilon_n + H_w(0, 0, 0)\, w_n - H(\varepsilon_n, w_n, s_n)\,.$$

Das ist genau (18). Nach (II) entspricht das (19), das identisch ist mit dem Iterationsverfahren in Korollar 1.

(V) *Eindeutigkeit.* Sei (ε, x) eine Lösung von $F(\varepsilon, x) = 0$ mit $Px = sb$. Wir setzen $x = sb + y$. Dann ist $y \in N^{\perp}$. Wir zeigen anschließend

$$\|s\varepsilon\| + \|y\| = o(1)\, |s| \tag{22}$$

mit $o(1) \to 0$ für $(\varepsilon, y, s) \to 0$. Um mit Hilfe der entscheidenden Abschätzung (22) die Eindeutigkeit zu zeigen, setzen wir $y = sw$. Dann gilt $\|w\| = o(1)$ und $F(\varepsilon, sb + sw) = 0$. Somit sind alle Lösungen (ε, x) von $F(\varepsilon, x) = 0$ in einer hinreichend kleinen Nullumgebung für $s \neq 0$ mit den in (III) eindeutig konstruierten Lösungen identisch.

Für $s = 0$ folgt aus (22) sofort $y = 0$.

(VI) *Beweis von* (22). Wir benutzen

$$F(\varepsilon, sb + y) = F_x(0, 0)\, y + F_{\varepsilon x}(0, 0)\, s\varepsilon b - h \tag{23}$$

mit

$$h = o(1)\, O(s) + o(1)\, O(\|s\varepsilon\|) + o(1)\, O(\|y\|)\,. \tag{24}$$

Im analytischen Fall folgt das unter Beachtung von $F(\varepsilon, 0) \equiv 0$ und $F_x(0, 0)\, b = 0$ aus der Reihenentwicklung von F. Im C^k-Fall benutze man die Taylorentwicklung von F.

Aus $F(\varepsilon, sb + y) = 0$ und (23) folgt nach (17) die Abschätzung

$$\|s\varepsilon\| + \|y\| \leqq \text{const}\, \|h\|\,.$$

Für $\|\varepsilon\| + \|y\| + |s| \leqq r$ erhalten wir aus (24) die Beziehung

$$\|s\varepsilon\| + \|y\| \leqq a(r) \left(|s| + \|s\varepsilon\| + \|y\|\right)$$

mit $a(r) \to 0$ für $r \to 0$. Daraus folgt (21).

Damit ist der Beweis von Theorem 1 und Korollar 1 beendet.

(VII) *Parameterabhängigkeit.* Korollar 3 folgt in gleicher Weise aus dem Satz über implizite Funktionen.

(VIII) *Regularisierung.* Setzen wir die Lösung in Gleichung (20) ein, dann erhalten wir eine Gleichung vom Typ (21). Die a priori Abschätzung (16) sichert die Stetigkeit des zugehörigen linearen Operators in (21). Das ergibt Korollar 4, wobei sich die Aussage über das Iterationsverfahren in analoger Weise durch Einsetzen, Invertierung und Beachtung von (II) ergibt.

Damit sind alle Aussagen dieser Arbeit bewiesen.

8. Anwendungen

Theorem 1 zeichnet sich dadurch aus, daß es eine Situation charakterisiert, die viele für die Anwendung günstige Aussagen in sich vereint: Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität gegen Störungen (Parameterabhängigkeit der Lösung), Konstruktion, Symmetrie und Regularisierung. Die entscheidende Verzweigungsbedingung (H3) trägt generischen Charakter, d. h., grob gesprochen, diese Bedingung ist in den meisten Fällen erfüllt, und sie ist gegen Störungen invariant. Das wird besonders deutlich, wenn man die Variante von (H3) in Beispiel 1 betrachtet. Im Sinne der modernen Differentialtopologie ist (H3) eine Transversalitätsbedingung.

Konkrete Anwendungen auf freie Randwertprobleme der Hydrodynamik, auf die Navier-Stokesschen Gleichungen und die Hopf-Bifurkation findet man in [7/Vol. 4].

LITERATUR

[1] Beckert, H.: Existenzbeweise in der Theorie permanenter Schwerewellen. Arch. Rat. Mech. Anal. **9** (1962), 379—394.

[2] Beckert, H.: Potentialströmung längs eines Kanals mit welliger Kanalsohle. Arch. Rat. Mech. Anal. **9** (1962), 395—402.

[3] Beckert, H.: Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flüssigkeit. Arch. Rat. Mech. Anal. **13** (1963), 15—45.

[4] Beckert, H.: Existenzbeweis zur Kanaltheorie der Gezeiten. Arch. Rat. Mech. Anal. **18** (1965), 379—396.

[5] Crandall, M., and P. Rabinowitz: The Hopf bifurcation theorem. Arch. Rat. Mech. Anal. **67** (1977), 53—72.

[6] Zeidler, E.: Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben. Berlin: Akademie-Verlag 1971.

[7] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vols. 1—5. New York: Springer-Verlag 1984ff.

Manuskripteingang: 30. 07. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. Eberhard Zeidler
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz