Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (4) 1985, S. 363–372

Twistprodukt und Quasi-*-Algebren

G. LASSNER und G. A. LASSNER

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

Der Schwartzsche Distributionenraum $\mathscr{S}'$ wird zu einer topologischen Quasi-*-Algebra mit dem ausgezeichneten Teilraum $\mathscr{S}$, wenn man in ihm das sogenannte Twistprodukt definiert. In der Arbeit wird gezeigt, daß die Weylsche Quantisierung $f \to W(f)$ ein Isomorphismus dieser topologischen Quasi-*-Algebra auf die topologische Quasi-*-Algebra $\mathscr{L}(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$ aller linearen stetigen Operatoren von $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}'$ ist. Weiterhin wird das Problem der Fortsetzungen der Multiplikationen in diesen Quasi-*-Algebren diskutiert.

Пространство Шварца $\mathscr{S}'$ обобщенных функций становится топологической квази-*-алгеброй, если в нём определяется так называемое твист-произведение. В работе показано, что квантование Вейля $f \to W(f)$ является изоморфизмом этой топологической квази-*-алгебры на топологическую квази-*-алгебру $\mathscr{L}(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$ всех линейных непрерывных операторов из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}'$. Дальше обсуждается проблема расширения операций умножения в этих квази-*-алгебрах.

The Schwartz distribution space $\mathscr{S}'$ becomes a topological quasi-*-algebra with the distinguished subspace $\mathscr{S}$, if one defines the so-called twisted product in it. In the paper it is pointed out that the Weyl quantization $f \to W(f)$ is an isomorphism of this topological quasi-*-algebra onto the topological quasi-*-algebra $\mathscr{L}(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$ of all linear continuous operators of $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}'$. Furthermore, the problem of the extensions of the multiplications in these quasi-*-algebras is discussed.

1. Einleitung

Seit durch die Quantentheorie aufgedeckt wurde, daß die physikalischen Observablen im allgemeinen nichtkommutierende Größen sind, die als Operatoren im Hilbertraum realisiert werden können, steht ununterbrochen die Frage im Blickfeld des theoretischen Interesses, wie diese Observablen zu den Größen der klassischen Physik korrespondieren. Eine Vorschrift, die einer Funktion f der Orts- und Impulskoordinaten einen Operator $W(f)$ in Übereinstimmung mit physikalischen Erfordernissen zuordnet, nennt man Quantisierung. Unter den denkbaren Möglichkeiten ist die Weylsche Quantisierung ausgezeichnet, die wir in Kapitel 2 beschreiben.

Obwohl die Weylsche Quantisierung auf die Begründer der Quantentheorie zurückgeht, wurde die mathematische Struktur dieser Zuordnung $f \to W(f)$ erst seit den 60er Jahren intensiv untersucht [2, 7–13, 21–23, 25, 27]. Besonders die Frage, für welche Funktionen bzw. Distributionen f sich die Quantisierung sachgemäß definieren läßt, steht in jüngster Zeit im Mittelpunkt des Interesses. Nachdem die Quantisierung für einige ausgewählte Funktionen- bzw. Distributionenklassen durchgeführt wurde [11, 15, 23] zeigte sich, daß man eine geschlossene Lösung des Quantisierungsproblems erhält, wenn man alle Distributionen aus $\mathscr{S}'$ quantisiert [9, 21, 27]. Man erhält dabei einen linearen Isomorphismus zwischen $\mathscr{S}'$ und der Menge $\mathscr{L}(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$ der linearen Operatoren von $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}'$, den wir in Kapitel 2 beschreiben.

In Kapitel 3 studieren wir die Quasialgebrenstruktur von $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ und übertragen das dort gegebene partielle Produkt durch die gerade beschriebene Isomorphie auf $\mathcal{S}$. Dieses partielle Produkt zweier Distributionen auf $\mathcal{S}$ wird durch $f \circ g$ bezeichnet und trägt den Namen *Twistprodukt*. Das Twistprodukt ist ursprünglich nur dann definiert, wenn einer der beiden Faktoren eine glatte Funktion aus $\mathcal{S}$ ist. Für die Fortsetzung dieser partiellen Multiplikation auf Klassen von Distributionen beschreiben wir eine kanonische Prozedur. Dies führt auf bemerkenswerte Mehrdeutigkeiten, die auch eine der Ursachen dafür sind, daß in den oben zitierten Arbeiten immer spezielle Untersuchungen nötig waren, um das Twistprodukt streng zu definieren (siehe z. B. [15, 23]), obwohl die Integralformel (3.1) dafür ganz einfach erscheint. Wir gehen darauf in den Schlußbemerkungen in Kapitel 4 kurz ein.

2. Weylsche Quantisierung

Ziel der Quantisierung ist es, Funktionen der klassischen Orts- und Impulsvariablen quantenmechanische Operatoren sachgemäß zuzuordnen. Entsprechend der grundlegenden Entdeckung von W. Heisenberg sollen dabei den Orts- und Impulskoordinaten q und p symmetrische Operatoren Q und P zugeordnet werden, die der kanonischen Kommutatorrelation $[Q, P] = iI$ genügen (I ist der Einsoperator). Das Planksche Wirkungsquantum $\hbar$ wird gleich 1 gesetzt. Um ohne Einschränkungen Potenzen von P und Q bilden zu können soll vorausgesetzt werden, daß beide Operatoren auf einem dichten invarianten Definitionsbereich $\mathcal{D}$ eines Hilbertraumes definiert sind, d. h. $Q\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ und $P\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Wir können nun eine erste Formulierung des Quantisierungsproblems angeben:

Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome $f(q, p)$ in den Variablen q, p. Gesucht ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{P}$ in die *-Algebra $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ der Operatoren auf $\mathcal{D}$, die reellen Polynomen symmetrische Operatoren so zuordnet, daß die Potenzen q^n und p^n in Q^n und P^n übergehen. Eine solche Quantisierung W_{H} (Quantisierung auf der Basis der Heisenbergschen Kommutatorrelation) ist eindeutig durch die folgenden Bedingungen bestimmt [4, 5]:

H1. $W_{\mathrm{H}}(f)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{P}$ in die Menge der linearen Operatoren auf $\mathcal{D}$.

H2. $(\lambda Q + \mu P)^n = \sum_{l+k=n} W_{\mathrm{H}}(q^l p^k)\, \lambda^l \mu^k,$ (2.1)

(λ, μ reelle Variable; $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Diese Quantisierungsvorschrift ist dadurch gekennzeichnet, daß sie dem Produkt qp das sogenannte Weylsche symmetrische Produkt $1/2(QP + PQ)$ der Orts- und Impulsoperatoren zuordnet. Hierin liegt auch die Ursache, daß diese Quantisierung nicht so ohne weiteres auf allgemeinere Funktionen als Polynome ausgedehnt werden kann, da eine Funktion nichtkommutierender Operatoren gebildet werden muß. Die folgende Methode dafür wurde bereits von WEYL [25, 28] vorgeschlagen.

Es seien

$$W(q, p) = e^{iqQ}\, e^{ipP}\, e^{(i/2)qp} = e^{i(qQ+pP)} \tag{2.2}$$

die Weylschen unitären Operatoren. Man bildet

$$W(f) = \int W(q, p)\, \tilde{f}(q, p)\, dq\, dp, \tag{2.3}$$

wobei $\tilde{f}$ die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i(qu+pv)} f(u, v) \, du \, dv \tag{2.4}$$

ist. Der Operator $W(f)$ heißt *Weylsche Quantisierung* der Funktion f. Es muß natürlich die Frage beantwortet werden, für welche Funktionen f und in welchem Sinn das Integral in (2.3) existiert. Eine umfassende Antwort darauf gibt Theorem 2.4. Im ersten Ansatz sind die beiden Quantisierungsvorschriften (2.1) und (2.3) disjunkt, da (2.1) nur für Polynome definiert ist, während das Integral in (2.3) erst einmal nur für fallende Funktionen einen Sinn hat. Wir werden aber zeigen, wie das Integral in (2.3) für beliebige temperierte Distributionen definiert werden kann.

Zuerst müssen wir die Darstellung der Kommutatorrelation festlegen. Wir wählen die Schrödinger-Darstellung $Q = x$ und $P = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$, definiert auf dem Schwartzraum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$ als dichtem Teilraum des Hilbertraumes $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^1)$. $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ ist die maximale Op*-Algebra auf $\mathcal{S}$, d. h. die Menge aller auf $\mathcal{S}$ definierten linearen (unbeschränkten) Operatoren A, die $\mathcal{S}$ invariant lassen, $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, und deren adjungierter A^* ebenfalls $\mathcal{S}$ invariant läßt [16]. Die Einschränkung von A^* auf $\mathcal{S}$ bezeichnen wir durch A^+. Eine entscheidende Rolle spielt nun die gleichmäßige Topologie $\tau_{\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$, die die Verallgemeinerung der Operatornormtopologie auf den Fall unbeschränkter Operatoren ist. Diese Topologie ist durch das System von Halbnormen

$$\tau_{\mathcal{S}} : \|A\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\Phi, \Psi \in \mathcal{M}} |\langle \Phi, A\Psi \rangle| \tag{2.5}$$

definiert, wobei $\mathcal{M}$ alle Teilmengen von $\mathcal{S}$ durchläuft, für die $\|A\|_{\mathcal{M}} < \infty$ für alle $A \in \mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ ist. Das sind genau die beschränkten Mengen des Schwartzraumes $\mathcal{S}$ [16—18].

Für jedes Polynom $f(q, p)$ ist der nach (2.1) definierte Operator $W_{\mathrm{H}}(f)$ ein Operator aus $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$. Nun wollen wir erreichen, daß er mit dem nach (2.3) definierten Operator $W(f)$ zusammenfällt. Das kann im Sinne der allgemeinen Integrationstheorie realisiert werden, da die Vervollständigung von $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ bezüglich der gleichmäßigen Topologie ein dualer Raum ist.

Lemma 2.1 [19, 20]: *Die Vervollständigung* $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathcal{L}^+(\mathcal{S})\,[\tau_{\mathcal{S}}]}$ *ist isomorph zum linearen Raum* $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ *aller linearen Operatoren von* $\mathcal{S}$ *in* $\mathcal{S}'$. $\mathfrak{A}$ *ist der duale Raum zu einem Prädualen* $\mathfrak{A}_*$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_*'$. *Dabei ist*

$$\mathfrak{A}_* = \mathfrak{S}_1(\mathcal{S}) = \{\varrho \in \mathcal{L}^+(\mathcal{S}) : A\varrho B \ \text{ nuklear für alle } \ A, B \in \mathcal{L}^+(\mathcal{S})\},$$

und jedem $A \in \mathfrak{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ *entspricht das lineare Funktional* $(A, \varrho) = \operatorname{tr} A\varrho$ *auf* $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$. *Die Topologie von* $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ *wird durch* β^* *bezeichnet. Sie ist die starke Topologie bezüglich des dualen Paares* $\big(\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})\big)$.

Sehr hilfreich für den Beweis des Haupttheorems 2.4 dieses Kapitels ist die Charakterisierung der Operatoren $\varrho \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ durch ihre Kerne.

Lemma 2.2 [21]: $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ *ist die *-Algebra der Integraloperatoren* $\varrho\Phi = \int \hat{\varrho}(x, y) \times \Phi(y) \, dy$ *auf* $\mathcal{S}$, *für die* $\hat{\varrho}(x, y) \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{S}$. *Die Zuordnung* $\varrho \to \hat{\varrho}(x, y)$ *ist ein linearer topologischer Isomorphismus zwischen* $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})\,[\beta^*]$ *und* $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{S}$.

Diese Lemmata sind die Grundlage für den Nachweis der Existenz des Integrals (2.3) im Sinne der folgenden allgemeinen Definition.

Definition 2.3: Sei $E = F'$ der duale Raum eines lokalkonvexen Raumes F und $x \to W(x)$ eine Abbildung von $\mathbf{R}^\nu$ in E. $W(x)$ heißt (E-wertige) *Testfunktion* bezüglich des dualen Paares (E, F), falls $\big(W(x), \varrho\big) = g_{W,\varrho}(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ für jedes $\varrho \in F$ ist. Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ eine Distribution. Dann ist $W(f) = \int W(x)\, f(x)\, dx \in E$ definiert durch die Beziehung

$$\big(W(f), \varrho\big) = \int \big(W(x), \varrho\big)\, f(x)\, dx \tag{2.6}$$

für jedes $\varrho \in F$, sofern das lineare Funktional auf der rechten Seite stetig von ϱ abhängt.

Wir sind nun in der Lage, das grundlegende Theorem über die Existenz der Weylschen Quantisierung (2.3) zu beweisen.

Theorem 2.4: *Es seien $W(q, p)$ die Weylschen Operatoren* (2.2) *und $\tilde{f}$ die Fouriertransformierte* (2.4) *einer Distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$. $W(q, p)$ ist eine operatorwertige Testfunktion bezüglich des dualen Paares $\big(\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})\big)$. Deshalb existiert das Weylsche Integral*

$$W(f) = \int W(q, p)\, \tilde{f}(q, p)\, dq\, dp \tag{2.7}$$

in $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Für Polynome f stimmt die so definierte Weylsche Quantisierung $W(f)$ mit der nach (2.1) *definierten Quantisierung $W_{\mathrm{H}}(f)$ überein.*

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß $W(q, p)$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-wertige Testfunktion ist, d. h. $\operatorname{tr} W(q, p)\, \varrho \in \mathcal{S}_2$ für jedes $\varrho \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$. Für $\Phi = \Phi(x) \in \mathcal{S}$ ist

$$\big(W(q, p)\, \Phi\big)(x) = \mathrm{e}^{(i/2)qp}\, \mathrm{e}^{iqx} \Phi(x + p). \tag{2.8}$$

Sei $\hat{\varrho}(x, y)$ der Kern des Operators ϱ (s. Lemma 2.2), so ist als Konsequenz von (2.8) der Kern von $W(q, p)\, \varrho$ gleich $\mathrm{e}^{(i/2)qp}\, \mathrm{e}^{iqx} \hat{\varrho}(x + p, y)$. Deshalb ist

$$\operatorname{tr} W(q, p)\, \varrho = \mathrm{e}^{(i/2)qp} \int \mathrm{e}^{iqx} \hat{\varrho}(x + p, x)\, dx. \tag{2.9}$$

Weil $\hat{\varrho}(x, y) \in \mathcal{S}_2$ folgt hieraus sofort, daß $\operatorname{tr} W(q, p)\, \varrho \in \mathcal{S}_2$ in den Variablen q, p. Somit existiert $\big(W(f), \varrho\big) = \int \big(W(q, p), \varrho\big)\, f(q, p)\, dq\, dp$ für jede Distribution $f \in \mathcal{S}_2'$. Weil aus Lemma 2.2 folgt, daß $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ die GDF-Eigenschaft hat [6: VI, § 1, 4], hängt $\big(W(f), \varrho\big)$ stetig von ϱ ab und somit ist $W(f) = \int W(q, p)\, \tilde{f}(q, p)\, dq\, dp \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

Sei $f \in \mathcal{S}_2$, so ist nach (2.8)

$$\int \tilde{f}(q, p) \big(W(q, p)\, \Phi\big)(x)\, dq\, dp = \int \tilde{f}(q, y - x)\, \mathrm{e}^{(i/2)q(y-x)}\, \mathrm{e}^{iqx} \Phi(y)\, dy\, dq.$$

Deshalb ist der Kern $\hat{f}(x, y)$ von $W(f)$ durch $\hat{f}(x, y) = \int \tilde{f}(q, y - x)\, \mathrm{e}^{(i/2)q(y-x)}\, dq$ gegeben, also

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int f\left(\frac{x + y}{2}, p\right) \mathrm{e}^{ip(x-y)}\, dp. \tag{2.10}$$

Für die inverse Zuordnung berechnet man hieraus

$$f(q, p) = \int \mathrm{e}^{-ip\xi} \hat{f}(q + \xi/2, q - \xi/2)\, d\xi. \tag{2.11}$$

Damit ist gezeigt, daß die Zuordnung $f(q, p) \to W(f) \to \hat{f}(x, y)$ einen Isomorphismus von $\mathcal{S}_2$ auf $\mathcal{S}_2$ vermittelt ∎

Theorem 2.5: i) *Die Zuordnung $f \to W(f)$ ist ein Isomorphismus zwischen den lokalkonvexen Räumen $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ und $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ $[\beta^*]$. Für $f \in \mathcal{S}_2$ gilt*

$$\operatorname{tr} W(f) = \int f(q, p)\, dq\, dp. \tag{2.12}$$

ii) *Die für jede Distribution $f \in \mathcal{S}_2'$ definierte Weylsche Quantisierung $W(f)$ vermittelt einen Isomorphismus zwischen den lokalkonvexen Räumen $\mathcal{S}_2'$ und $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ $[\tau_{\mathcal{S}}]$. Zu jedem Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ heißt diejenige Distribution f mit $W(f) = A$ das Symbol von A.*

Beweis: Da die Zuordnung $f \to \hat{f}$ (2.10) ein Isomorphismus von $\mathcal{S}_2$ ist, folgt der erste Teil der Aussage i) aus Lemma 2.2. Weiterhin berechnet sich die Spur tr $W(f) = \int \hat{f}(x, x)\,dx$ aus dem Kern $\hat{f}(x, y)$. Somit folgt (2.12) aus (2.10).

Der zweite Teil des Theorems, das zuerst in [21] bewiesen wurde, ist eine unmittelbare Konsequenz aus i), da $\mathcal{S}_2$ dicht in $\mathcal{S}_2'$ und $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ dicht in dem vollständigen lokalkonvexen Raum $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')\,[\tau_{\mathcal{S}}]$ ist [20, 21] ∎

Innerhalb des Rechnens mit Distributionen läßt sich nun leicht bestätigen, daß für Polynome f die Weylsche Quantisierung mit der Heisenbergschen Quantisierung zusammenfällt, d. h. $W(f) = W_{\mathrm{H}}(f)$.

3. Twistprodukt und Quasi-*-Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$

Der im vorangehenden beschriebene, durch die Weylsche Quantisierung $f \to W(f)$ vermittelte Isomorphismus zwischen $\mathcal{S}_2'$ und $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ berücksichtigt vorerst nur die lineare Struktur dieser Räume. Nun ist aber z. B. $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ eine *-Algebra bezüglich der Operatorenmultiplikation. Für zwei Testfunktionen $f, g \in \mathcal{S}_2$ ist somit auch $W(f)\,W(g) \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ und folglich von der Form $W(h)$. h heißt das *Twistprodukt* der beiden Funktionen f und g, und wir schreiben dafür $h = f \circ g$. Eine Berechnung von $f \circ g$ unter Zuhilfenahme von (2.10) und (2.11) liefert

$$(f \circ g)\,(q, p) = \frac{1}{\pi^2} \int f(q + q_1, p + p_1)\, g(q + q_2, p + p_2) \times e^{2i(p_1 q_2 - p_2 q_1)}\, dq_1\, dq_2\, dp_1\, dp_2 . \tag{3.1}$$

Es ist sofort erkennbar, daß die rechte Seite für jedes (q, p) im distributiven Sinne auch dann wohldefiniert ist, wenn einer der beiden Faktoren eine Distribution aus $\mathcal{S}_2'$ ist. Außerdem ist dann auch $(f \circ g)\,(q, p) \in \mathcal{S}_2$. Aufgrund von Theorem 2.5 und der Tatsache, daß $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ dicht in $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')\,[\tau_{\mathcal{S}}]$ und $\mathcal{S}_2$ dicht in $\mathcal{S}_2'$ ist, gilt somit das folgende Lemma.

Lemma 3.1: i) *Für $f \in \mathcal{S}_2$, $g \in \mathcal{S}_2'$ sind die Twistprodukte $f \circ g$ durch* (3.1) *wohldefiniert.*

ii) *Für die zu den Symbolen f, g gehörenden Weylschen Quantisierungen $W(f)$, $W(g)$ gilt $W(f \circ g) = W(f)\,W(g)$ und $W(g \circ f) = W(g)\,W(f)$ sowie $W(f \circ g)$, $W(g \circ f) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.*

Zu ii) muß noch bemerkt werden, daß $W(f)\,W(g)$ nur deshalb wohldefiniert ist, weil jeder Operator $W(f) \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ eine eineindeutige Fortsetzung durch Stetigkeit zu einem Operator von $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}$ hat. Das Paar $\big(\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathfrak{S}_1(\mathcal{S})\big)$ ist eine topologische Quasi-*-Algebra im Sinne der folgenden Definition [19].

Definition 3.2: Das Paar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ heißt *topologische Quasi-*-Algebra*, wenn folgendes gilt:

1. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}[\xi]$ ist ein lokalkonvexer Raum mit einem ausgezeichneten dichten Teilraum $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$.
2. Für jedes $B \in \mathfrak{A}_0$ sind die partiellen Links- und Rechtsmultiplikationen $A \to BA$, $A \to AB$ als stetige lineare Abbildungen in $\mathfrak{A}$ definiert. Bezüglich dieser Multiplikation ist $\mathfrak{A}_0$ eine Algebra und $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{A}_0$-Modul.
3. In $\mathfrak{A}$ ist eine Involution $A \to A^+$ als antilineare stetige Abbildung mit $A^{++} = A$ definiert, die $\mathfrak{A}_0$ invariant läßt.

Für die Quasi-*-Algebra $(\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathfrak{S}_1(\mathcal{S}))$ ist $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ keineswegs der maximal mögliche ausgezeichnete Teilraum $\mathfrak{A}$. Die natürliche Menge derjenigen Operatoren A, die von links und rechts mit jedem Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ multipliziert werden können, ist die *-Algebra $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$. Somit ist das Paar

$$(\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')[\tau], \mathcal{L}^+(\mathcal{S})) \tag{3.2}$$

ebenfalls eine topologische Quasi-*-Algebra, die *kanonische* Quasi-*-Algebra zum dichten Bereich $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbf{R}^1)$.

Wenn nun $W(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ und $W(g) \in \mathcal{L}^+(\mathcal{S})$, so ist zwar $W(f)\,W(g)$ definiert und wir können dann auch $f \circ g$ durch $W(f \circ g) = W(f)\,W(g)$ definieren, aber die rechte Seite von (3.1) hat im allgemeinen als Integral keinen Sinn, da z. B. f eine beliebige Distribution und g ein Polynom sein kann. Ein Gegenstück zu dieser Merkwürdigkeit ist z. B. der wichtige Fall, daß $f, g \in L_2(\mathbf{R}^2)$. Dann ist $f \circ g$ durch (3.1) definiert, ohne daß einer der beiden Faktoren in $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ liegen muß. Es gilt nämlich folgendes Lemma.

Lemma 3.3 [23]: *Die Weylsche Quantisierung $f \to W(f)$ vermittelt einen Isomorphismus zwischen dem Hilbertraum $L_2(\mathbf{R}^2)$ und dem Ideal $\mathfrak{S}_2$ der Hilbert-Schmidtschen Operatoren und es gilt*

$$\operatorname{tr} W(f)\,W(g) = \frac{1}{2\pi} \int f(q, p)\, g(q, p)\, dq\, dp. \tag{3.3}$$

Bei der Formulierung und dem Beweis dieses Lemmas in [23] kam es darauf an, die Weyloperatoren $W(f)$ für L_2-Funktionen f überhaupt erst zu definieren. Aus den obigen allgemeinen Sätzen folgt das Lemma aufgrund von Theorem 2.5 und der Tatsache, daß $\mathfrak{S}_1(\mathcal{S})$ dicht in $\mathfrak{S}_2$ und $\mathcal{S}$ dicht in L_2 ist ∎

Obwohl also $W(f)$ für $f \in L_2$ im allgemeinen nicht in $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ liegt, haben wir keinen Zweifel, wie das Produkt $W(f)\,W(g)$ zweier solcher Operatoren zu verstehen ist, da beide Operatoren beschränkt sind. Die sehr natürlich scheinende Korrespondenz zwischen L_2-Funktionen und Hilbert-Schmidtschen Operatoren überträgt sich allerdings keineswegs auf andere „natürliche" Klassen von Funktionen und Operatoren. Zum Beispiel wurde in [7] gezeigt, daß es einerseits nichtintegrierbare Symbole gibt, die auf Spuroperatoren führen (vgl. dazu Theorem 2.5), andererseits aber auch beschränkte Symbole f, deren Weylsche Quantisierung $W(f)$ ein unbeschränkter Operator ist. All dies unterstreicht nur, daß das Problem der Definition des Produktes allgemeinerer Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ nichttrivial ist. Wir geben dafür jetzt eine Möglichkeit an, die wir gleich allgemein für topologische Quasi-*-Algebren formulieren.

Definition 3.4: $(\mathfrak{A}[\xi], \mathfrak{A}_0)$ sei eine vollständige topologische Quasi-*-Algebra und $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ zwei lineare Teilräume von $\mathfrak{A}$ mit den lokalkonvexen Topologien β_1, β_2. Ein geordnetes Paar $(\mathcal{V}_1[\beta_1], \mathcal{V}_2[\beta_2])$ solcher lokalkonvexer Räume heißt *zulässig*, wenn folgendes gilt:

1. $\mathcal{V}_i[\beta_i]$ sind vollständige lokalkonvexe Räume und die Topologien β_i sind stärker als ξ $(i = 1, 2)$.
2. $\mathfrak{A}_0$ ist dicht in $\mathcal{V}_i[\beta_i]$ für $i = 1, 2$. Für jedes $A \in \mathcal{V}_1$ ist $B \to AB$ stetig als lineare Abbildung von $\mathfrak{A}_0[\beta_2]$ in $\mathfrak{A}[\xi]$ und für jedes $B \in \mathcal{V}_2$ ist $A \to AB$ stetig von $\mathfrak{A}_0[\beta_1]$ in $\mathfrak{A}[\xi]$.
3. Für alle $A \in \mathcal{V}_1$, $B \in \mathcal{V}_2$ und alle Netze $\{A_\alpha\}, \{B_\alpha\} \subset \mathfrak{A}_0$ mit $\beta_1 - \lim A_\alpha = A$, $\beta_2 - \lim B_\alpha = B$ gilt in $\mathfrak{A}[\xi]$ $\lim_\alpha A_\alpha B = \lim_\alpha AB_\alpha = AB$.

Durch (3) ist somit in Abhängigkeit von der Auswahl eines zulässigen Paares $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ das Produkt AB für zwei Operatoren $A \in \mathcal{V}_1$, $B \in \mathcal{V}_2$ definiert. Ohne auf

Einzelheiten einzugehen sei hervorgehoben, daß für ein anderes Paar zulässiger Räume das Produkt der gleichen Operatoren A, B ein ganz anderes sein kann. Die Abhängigkeit von den Räumen $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ ist also wesentlich. Da $\mathcal{V}_i$ die Vervollständigung von $\mathfrak{A}_0$ bezüglich der Topologie β_i ist, kommt es also darauf an, entsprechende Topologien auf $\mathfrak{A}_0$ zu definieren. Wir beschreiben jetzt dafür ein kanonisches Verfahren.

Sei $\mathcal{V}$ ein Unterraum von $\mathfrak{A}$. Für $A \in \mathfrak{A}_0$, $B \in \mathcal{V}$ ist dann $A, B \to AB$ definiert und liefert eine bilineare Abbildung von $\mathfrak{A}_0 \times \mathcal{V}$ in $\mathfrak{A}[\xi]$. In Analogie zum Begriff des dualen Paares nennen wir $(\mathfrak{A}_0, \mathcal{V})$ ein bilineares Paar (bezüglich $\mathfrak{A}[\xi]$) und definieren ganz analog wie für duale Paare in $\mathcal{V}$ die $\mathfrak{A}_0$-beschränkten Mengen und dann in $\mathfrak{A}_0$ die $\mathcal{V}$-starke Topologie. Die zu den schwachen Topologien analogen Topologien wurden in [26] benutzt.

Definition 3.5: Eine Teilmenge $N \subset \mathcal{V}$ heißt *$\mathfrak{A}_0$-beschränkt* bezüglich des bilinearen Paares $(\mathfrak{A}_0, \mathcal{V})$, wenn für jedes $A \in \mathfrak{A}_0$ die Menge AN beschränkt in $\mathfrak{A}[\xi]$ ist.

Die *rechte $\mathcal{V}$-starke Topologie* $\beta^{\mathcal{V}}$ in $\mathfrak{A}_0$ wird durch das System der Halbnormen

$$\beta^{\mathcal{V}} : \|A\|^{N,p} = \sup_{B \in N} p(AB) \tag{3.4}$$

bestimmt, wobei N alle $\mathfrak{A}_0$-beschränkten Mengen von $\mathcal{V}$ und p ein System Γ von definierenden Halbnormen für die Topologie ξ durchläuft.

Analog definiert man die *linke $\mathcal{V}$-starke Topologie* ${}^{\mathcal{V}}\beta$ in $\mathfrak{A}_0$ bezüglich des bilinearen Paares $(\mathcal{V}, \mathfrak{A}_0)$ mit der bilinearen Abbildung $B, A \to BA$ für $B \in \mathcal{V}$, $A \in \mathfrak{A}_0$.

Nun können wir eine spezielle Klasse zulässiger Paare auszeichnen.

Definition 3.6: Ein zulässiges Paar $(\mathcal{V}_1[\beta_1], \mathcal{V}_2[\beta_2])$ heißt *kanonisch*, wenn auf $\mathfrak{A}_0$ die Topologie β_1 die rechte $\mathcal{V}_2$-starke Topologie und β_2 die linke $\mathcal{V}_1$-starke Topologie ist.

Die kanonischen Paare sind unter den zulässigen in einem bestimmten Sinne, der aus dem nächsten Theorem deutlich wird, die maximalen.

Wir kehren nun zu der in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden Quasi-*-Algebra $(\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathcal{L}^+(\mathcal{S}))$ zurück und werden jetzt $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ mit $\mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S}'$ identifizieren, d. h. wir repräsentieren jeden Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ durch seinen Integralkern $\hat{A}(x, y)$. Dann gilt [17, 18]

$$\mathcal{L}^+(\mathcal{S}) = \mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S} \cap \mathcal{S} \tilde{\otimes} \mathcal{S}'. \tag{3.5}$$

Wir beschreiben jetzt eine Klasse zulässiger Paare in der topologischen Quasi-*-Algebra $(\mathfrak{A}[\xi], \mathfrak{A}_0)$ mit

$$\mathfrak{A}[\xi] = \mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S}', \quad \mathfrak{A}_0 = \mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S} \cap \mathcal{S} \tilde{\otimes} \mathcal{S}'. \tag{3.6}$$

Theorem 3.7: *Es seien E_1, F_1, E_2, F_2 vier vollständige lokalkonvexe Räume, die stetig in $\mathcal{S}'$ eingebettet sind mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{S}$ ist dicht in allen vier Räumen E_i, F_i, $i = 1, 2$.*
2. *F_1 ist enthalten im dualen Raum F_2', wobei F_2' eindeutig durch die Relation $\mathcal{S} \subset F_2 \subset \mathcal{S}'$ definiert ist. Setzen wir $\mathcal{V}_1 = E_1 \tilde{\otimes}_\varepsilon F_1$ und $\mathcal{V}_2 = F_2 \tilde{\otimes}_\varepsilon E_2$, so bilden diese als Unterräume von $\mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S}'$ ein zulässiges Paar für die topologische Quasi-*-Algebra* (3.6).

Das zulässige Paar $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ ist kanonisch, wenn $E_1 = E_2 = \mathcal{S}'$ und $F_1 = F'$, $F_2 = F$ gilt, wobei F reflexiv und einer der beiden Räume F, F' metrisch ist.

Beweis: Zum Beweis des ersten Teils des Theorems muß man sich vom Erfülltsein der Bedingungen 1—3 von Definition 3.4 überzeugen. All dies sind aber nichts anderes als wohlbekannte Eigenschaften des injektiven Tensorproduktes [14, 24].

Sei jetzt also $\mathcal{V}_1 = \mathcal{S}' \tilde{\otimes} F'$, $\mathcal{V}_2 = F \tilde{\otimes} \mathcal{S}'$ und genüge F den genannten Voraussetzungen. Wir schreiben einfach $\otimes$ anstelle von $\otimes_\varepsilon$, da $\mathcal{S}'$ nuklear ist und somit das projektive mit dem injektiven Tensorprodukt zusammenfüllt. Wir zeigen, daß die rechte $\mathcal{V}_2$-starke Topologie $\beta^{\mathcal{V}_2}$ auf $\mathcal{V}_1 \supset \mathfrak{A}_0$ mit der Tensorprodukttopologie auf $\mathcal{V}_1$ zusammenfällt. Für die linke $\mathcal{V}_1$-starke Topologie ${}^{\mathcal{V}_1}\beta$ auf $\mathcal{V}_2$ sind die Betrachtungen analog.

Zuerst zeigen wir, daß $\beta^{\mathcal{V}_2}$ nicht stärker als die Tensorprodukttopologie sein kann. Wegen der Tonneliertheit [14 : 41, 4] braucht man sich dann nur davon zu überzeugen, daß sich die Halbnormen von $\beta^{\mathcal{V}_2}$ in der Form

$$\|A\|^{N,\mathcal{M}} = \sup_{B\in N} \|AB\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\Phi,\Psi\in\mathcal{M},\,B\in N} |\langle\Phi, AB\Psi\rangle|$$

schreiben lassen, also als Supremum der Beträge stetiger Linearformen auf $\mathcal{V}_1 = \mathcal{S} \tilde{\otimes} F'$. $\|A\|_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ beschränkt in $\mathcal{S}$, sind die Halbnormen (2.5) zur Topologie der Quasialgebra $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

Nun zeigen wir umgekehrt, daß sich jede Halbnorm

$$\varepsilon_{K,M}(A) = \sup_{u\otimes v\in K\otimes\mathcal{M}} \sum_i (u, x_i)\,(v, y_i)$$

($A = \sum x_i \otimes y_i \in \mathcal{V}_1$, K beschränkt in $\mathcal{S}$, M beschränkt in F) durch eine Halbnorm $\|A\|^{N,p}$ abschätzen läßt. Wir wählen dann für p auf $\mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S}'$ die Halbnorm, die durch

$$p\left(\sum a_i \otimes b_i\right) = \sup_{u\in k} \left|\sum_i (u, a_i)\,(b', b_i)\right|$$

gegeben ist, wobei $0 \neq b' \in \mathcal{S}$ ist. Ferner sei $b \in \mathcal{S}'$ mit $(b', b) = 1$. Wir wählen für N die beschränkte Menge $M \otimes b$ von Integralkernen, dann ist $\|A\|^{N,p} = \varepsilon_{K,M}(A)$. Damit ist das Theorem bewiesen ∎

4. Schlußbemerkungen

Sei $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) = (\mathcal{S}' \tilde{\otimes} F', F \tilde{\otimes} \mathcal{S}')$ ein kanonisches Paar wie in Theorem 3.7. $\mathfrak{A}$ mit der Untermenge $\Gamma_F := \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ist eine partielle *-Algebra im Sinne von [1]. Insbesondere gilt mit $(A, B) \in \Gamma_F$ auch $(B^+, A^+) \in \Gamma_F$ und das Produkt $A, B \to AB$ ist definiert mit den entsprechenden linearen und distributiven Eigenschaften [1].

Obwohl das Produkt für Paare $(A, B) \in \Gamma_F$ durch stetige Fortsetzung aus dem natürlichen Produkt der Quasi-*-Algebra gewonnen wurde, ist es nicht eindeutig festgelegt, sondern hängt stark von F ab. Wenn wir dafür genauer $A \underset{F}{\circ} B$ schreiben, so kann folgendes eintreten: Für zwei verschiedene Räume F_1, F_2 kann $(A, B) \in \Gamma_{F_1} \cap \Gamma_{F_2}$, aber $A \underset{F_1}{\circ} B \neq A \underset{F_2}{\circ} B$ sein. All dies hängt mit der Tatsache zusammen, daß die Operatoren $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, wenn man sie als Operatoren in $\mathcal{S}'$ mit dem dichten Definitionsbereich $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ auffaßt, im allgemeinen nicht abschließbar sind. Wir hatten ein Beispiel dafür in [2] als Ausgangspunkt der dortigen Betrachtungen genommen.

Mit den kanonischen Paaren hat man in einem gewissen Sinne auch Funktionenräume gefunden, in denen sich das Twistprodukt (3.1) als Integralformel sinnvoll definieren läßt. Diese entstehen durch die Integraltransformation (2.11) aus den Räumen

$$\mathcal{V}_F = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{S}' \tilde{\otimes} F' \cap F \tilde{\otimes} \mathcal{S}'.$$

Ihre Beschreibung durch Funktionseigenschaften ist aber im allgemeinen nicht klar [10].

$\mathcal{V}_F$ ist invariant bezüglich der Involution $A \to A^+$ und für zwei $A, B \to \mathcal{V}_F$ ist das Produkt AB definiert, aber im allgemeinen kein Element $\mathcal{V}$. Interessant ist es nun, nach *-Unteralgebren in $\mathcal{V}_F$ zu fragen. Wir wollen uns hier zum Abschluß der Arbeit auf folgende Bemerkung beschränken, die wir als Lemma formulieren.

Lemma 4.1: *Jede partielle *-Algebra $\mathcal{V}_F$ enthält $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ als maximale *-Unteralgebra. Genau dann wenn $F = \mathcal{H} = L_2(\mathrm{R}^2)$ ist, enthält $\mathcal{V}_F$ die Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ als maximale *-Unteralgebra.*

Andere Klassen von *-Unteralgebren der Quasialgebra $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ wurden in [8, 15, 25] untersucht. Solche *-Algebren von Operatoren tragen in der Regel „natürliche" Topologien. Für $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ ist das die quasigleichmäßige Topologie $\tau_*^{\mathcal{S}}$ [17—19], die durch das System der Halbnormen

$$\tau_*^{\mathcal{S}} : \|A\|_*^{\mathcal{M},B} = \sup_{\Phi \in \mathcal{M}} \|BA\Phi\| + \sup_{\Phi \in \mathcal{M}} \|BA^+\Phi\|$$

bestimmt ist, wobei $\mathcal{M}$ über alle beschränkten Mengen aus $\mathcal{S}$ und B über alle Operatoren aus $\mathcal{L}^+(\mathcal{S})$ läuft.

Lemma 4.2: *In der Quasi-*-Algebra $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0) = (\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), \mathcal{L}^+(\mathcal{S}))$ sei* ${}^{\mathfrak{A}}\beta$ bzw. $\beta^{\mathfrak{A}}$ *die linke bzw. rechte $\mathfrak{A}$-starke Topologie auf $\mathfrak{A}_0 = \mathcal{L}^+(\mathcal{S})$. Für das Supremum dieser beiden Topologien gilt* $\sup({}^{\mathfrak{A}}\beta, \beta^{\mathfrak{A}}) = \tau_*^{\mathcal{S}}$.

Da $\mathcal{L}^+(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{S}', \mathcal{S}') = \mathcal{S} \tilde{\otimes} \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}' \tilde{\otimes} \mathcal{S}$ [18, 19], ist das Lemma eine unmittelbare Folgerung aus Theorem 3.7 ∎

Zum Schluß wollen wir noch anmerken, daß man die natürliche Topologie von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und anderer *-Unteralgebren von $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ nicht auf die eben beschriebene Weise erhalten kann. Dazu muß der Begriff der $\mathcal{V}$-starken Topologie noch weiter verallgemeinert werden, worauf wir in einer folgenden Arbeit eingehen werden.

LITERATUR

[1] Antoine, J.-P., and W. Karwowski: Partial *-algebra of closed linear operators in Hilbert space. Bielefeld Prepr. ZiF, Project No. 2 (1984).

[2] Antoine, J.-P., and G. Lassner: Partial Inner Product Structures on Certain Topological Vector Lattices. Math. Nachr. **119** (1984), 7—14.

[3] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowic, A., and D. Sternheimer: Deformation Theory and Quantization. Ann. Phys. **111** (1978), 61—110.

[4] Berezin, F. A.: The method of second quantization. New York—London: Academic Press 1966.

[5] Berezin, F. A., and M. A. Shubin: Representations Of Operators By Means Of Functionals. Colloquia Math. Soc. Janos Bolai (Hungary) (1970), 21—52.

[6] Bourbaki, N.: Elements de mathematique. Livre VI: Integration (Act. Sci. et Ind. Nr. 1175, 1244). Paris: Hermann 1952 et 1956.

[7] Daubechies, I.: Continuity statements and counterintuitive examples in connection with Weyl quantization. J. Math. Phys. **24** (1983), 1453—1461.

[8] Grossmann, A., Loupias, G., and E. M. Stein: An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics in phase space. Ann. Inst. Fourier **18** (1968), 343—368.

[9] Hörmander, L.: The Weyl Calculus of Pseudo-Differential Operators. Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 359—443.

[10] Kammerer, B.: La star-algebre de Banach. C. R. Acad. Sc. Paris **295** (1982), 317—320.

[11] Kastler, D.: The C*-algebras of a Free Boson Field. Comm. Math. Phys. **1** (1965), 1—14.

[12] Klauder, J. R.: Continuous Representation Theory I, II, III. J. Math. Phys. **4** (1963), 1055—1058 and 1058—1073; **5** (1964), 177—187.

[13] Klauder, J. R., and J. McKenna: Continuous Representation Theory V. J. Math. Phys. **6** (1965), 68–87.
[14] Köthe, G.: Topologische lineare Räume II. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1979.
[15] Kuang Chi Liu: The Weyl transform of distributions. J. Math. Phys. **17** (1976), 859–862.
[16] Lassner, G.: Topological Algebras of Operators. Rep. Math. Phys. **3** (1972), 279–293.
[17] Lassner, G.: Quasi-uniform topologies on local observables. Acta. Univ. Wratislawiensis No. **519**. Wroclaw 1979.
[18] Lassner, G.: Topological Algebras and their Applications in Quantum Statistics. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturw. R. **30** (1981), 572–595.
[19] Lassner, G.: Algebras of unbounded operators and quantum dynamics. Physica A (1984), 471–479.
[20] Lassner, G., and W. Timmermann: Normal States on Algebras of Unbounded Operators. Rep. Math. Phys. **3** (1972), 295–305.
[21] Lassner, G. A.: Operator Symbols In The Description Of Observable-State Systems. Rep. Math. Phys. **16** (1979), 271–280.
[22] Loupias, S., and S. Miracle-Sole: C*-algebras de systems canoniques II. Ann. Inst. H. Poincare **6** (1967), 39–58.
[23] Pool, J.: Mathematical Aspects of the Weyl Correspondence. J. Math. Phys. **7** (1966), 66–76.
[24] Schaefer, H. H.: Topological Vector Spaces. New York: The Macmillan Company 1966.
[25] Segal, I.: Transforms For Operators And Symplectic Automorphisms Over A Locally Compact Abelain Group. Math. Scand. **13** (1963), 31–43.
[26] Timmermann, W.: On an Ideal in Algebras of Unbounded Operators. Math. Nachr. **92** (1979), 93–110 and **93** (1979), 313–318.
[27] Voros, A.: An Algebra of Pseudodifferential Operators and the Asymptotics of Quantum Mechanics. J. Funct. Anal. **29** (1978), 104–132.
[28] Weyl, H.: The Theory of Groups and Quantum Mechanics. New York: Dover Publishing Company Inc. 1950.

Manuskripteingang: 01. 08. 1984

VERFASSER

Prof. Dr. Gerd Lassner
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz

Dr. Gisela A. Lassner
Sektion Physik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz