Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (5) 1985, S. 437–453

Über ebene Bimetallprobleme mit verschiedenen Kontaktbedingungen und Dirichletschen Randbedingungen

L. Jentsch

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Herbert Beckert, zum 65. Geburtstag in Dankbarkeit gewidmet

Bewiesen werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Rand-Kontakt-Aufgaben der Elastostatik in ebenen Gebieten, wenn die Trennlinie zwischen den elastisch homogenen Teilen bis zum äußeren Rand reicht. Es werden drei verschiedene Kontaktbedingungen und Dirichletsche Randbedingungen (Verschiebungsvektor am Rand vorgegeben) betrachtet. Mit Hilfe von Potentialansätzen mit den Greenschen Kontakttensoren im Kern wird das Problem auf singuläre Integralgleichungssysteme über den Rand S des Gesamtgebietes zurückgeführt, das neben singulären Integralen auch singuläre Integrale mit feststehenden Singularitäten enthält. Mit Hilfe der Theorie von Duduchava wird gezeigt, daß die vorkommenden Integraloperatoren im Raum $L_2(S)$ Fredholmoperatoren mit dem Index Null sind. Der Kern dieser Operatoren besteht nur aus dem Nullelement.

Доказываются теоремы существования и единственности для гранично-контактных задач эластостатики в плоских областях, где граница между эластично однородными частями доходит до внешней границы области. Рассматриваются три разных контактных условия и краевые условия Дирихле (задан вектор перемещения на границе). С помощью потенциалов, ядро которых контактный тензор Грина, задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений на границе S области, в которую кроме сингулярных интегралов входят и сингулярные интегралы с неподвижной особенностью. Используя результаты Дудучавы доказывается, что возникающие операторы являются в пространстве $L_2(S)$ фредгольмовыми с индексом нуль. Ядро этих операторов состоит только из нуля.

Existence and uniqueness theorems for boundary contact problems of plane elastostatics are proved. The special quality is that the line between two elastical homogeneous parts reaches to the external boundary S of the whole domain. Three different contact conditions and Dirichlet boundary conditions (displacement vector on S given) are considered. The problem is reduced with the aid of potentials, which have Green's contact-tensors in the kernel, to systems of singular integral equations about S containing Cauchy-type integrals and integrals with fixed singularities. From the theory of Duduchava it follows that the occuring integral operators are Fredholm operators in the space $L_2(S)$ and have index zero. The null spaces of these operators contain only the zero.

1. Einleitung

Unter Bimetallproblem verstehen wir wie in früheren Arbeiten des Autors [1–5] eine Randkontaktaufgabe der Thermoelastostatik für ein stückweise homogenes Medium, wenn die Trennfläche S_0 (bzw. im ebenen Fall Trennlinie) zwischen den elastisch homogenen Teilen bis zum äußeren Rand reicht. Wir wollen uns auf das Modell der Elastostatik mit homogenen Kontaktbedingungen beschränken, der allgemeine Fall läßt sich mit Hilfe partikulärer Lösungen hierauf zurückführen [2, 4]. Die Idee ist, daß man die Lösung in Form eines Potentials über den Rand des Gesamtgebietes sucht, dessen Kern der Kontakttensor $\mathsf{G}_R(x, y)$ der Elastostatik für zwei mit der Kontaktbedingung R gekoppelte Halbebenen mit unterschiedlichen Laméschen Moduln ist. Der Potentialansatz erfüllt dann a priori auf dem geradlinigen S_0 die Kontaktbedingung R und im Gebiet das Differentialgleichungssystem der Elastostatik mit den entsprechenden Laméschen Moduln. Als Kontaktbedingungen kommen in Betracht, daß die elastisch homogenen Teile fest verhaftet sind (Kontaktbedingung $R = K$), reibungsfrei gegeneinander gleiten ohne Abheben (Kontaktbedingung $R = G$), fest verhaftet sind bei verschwindender tangentieller Verschiebungskomponente (Kontaktbedingung $R = H$). Die Kontakttensoren $\mathsf{G}_R(x, y)$ sind für $R = K$ in [6], $R = G$ in [3], $R = H$ in [4] explizit berechnet, sie lassen sich durch die elementaren Funktionen ln und arctan ausdrücken.

Die Randbedingung führt auf Grund der Sprungrelation des Potentials zu einem singulären Integralgleichungssystem mit feststehenden Singularitäten. Mit Ergebnissen von DUDUCHAVA [7] zeigt man die Noethereigenschaft und daß der Index Null ist. Während in den Arbeiten [2—4] die 2. Randbedingung (Normalspannung am Rand vorgegeben) betrachtet wird, stellen wir jetzt Dirichletsche Randbedingungen (Verschiebungsvektor $\mathbf{w}$ vorgegeben). Die Lösung suchen wir zunächst in Anlehnung an den elastisch homogenen Fall in der Klasse der Potentiale vom Typ der doppelten Schicht. Da hierbei dieselben Symbolkurven wie im Fall der 2. Randbedingung auftreten, wo mit Potentialen vom Typ der einfachen Schicht gearbeitet wird, erübrigt sich der aufwendige Nachweis, daß die Symbolkurven in der rechten Halbebene liegen. Unklar ist, unter welchen Voraussetzungen an $\mathbf{w}$ die Lösung in einer Regularitätsklasse mit einer endlichen elastischen Energie liegt, in der die Eindeutigkeitssätze für die Randkontaktaufgaben gelten. Dazu wäre ein Regularitätssatz für das singuläre Integralgleichungssystem nötig, der Aussagen über die Lösungen desselben bis in die kritischen Punkte hinein macht.

Um das zu umgehen, suchen wir — der Idee der direkten Randintegralmethoden folgend — die Lösung auch als Summe eines Potentials der doppelten Schicht mit der Dichte $\mathbf{w}$ und eines Potentials der einfachen Schicht, dessen Dichte sich aus einem singulären Integralgleichungssystem ergibt. Da im Potential der doppelten Schicht die Dichte $\mathbf{w}$ jetzt bekannt ist, und sich nicht wie oben aus einem singulären Integralgleichungssystem ergibt, kann dieses direkt auf Regularität untersucht werden. Für die Regularität des Potentials der einfachen Schicht benötigt man geringere Voraussetzungen an die Dichte, so daß man mit dem bekannten Regularitätssatz 2: Satz 3.3] auskommt.

2. Problemstellung

Wie in [2] betrachten wir ein einfachzusammenhängendes Gebiet D der x_1x_2-Ebene mit dem Rand $S \subset C^{1,\alpha}$, das durch die Gerade $x_2 = 0$ in zwei Teilgebiete D^+, D^- zerlegt wird (s. Abb. 1).

Problem $I_R(D; \mathbf{w})$: Gesucht ist ein Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = u_1(x)\,\mathbf{i}_1 + u_2(x)\,\mathbf{i}_2$ in einer geeigneten Regularitätsklasse, der

a) der Differentialgleichung

$$\underset{(1)}{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } D^+, \qquad \underset{(0)}{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } D^- \text{ für } R = K, \tag{2.1K}$$

$$\underset{(0)}{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } D^+, \qquad \underset{(1)}{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } D^- \text{ für } R = G, H, \tag{2.1G, H}$$

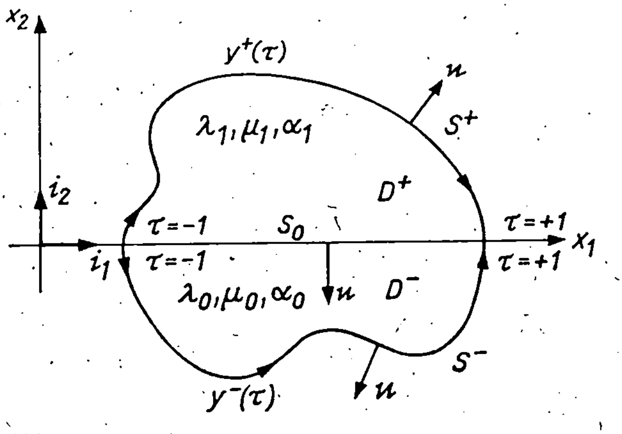

Abb. 1

b) der Randbedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \text{auf } S,$$

c) einer der folgenden Kontaktbedingungen auf $S_0 = D \cap \{x : x_2 = 0\}$ genügt $\big(\mathbf{n} = (0, -1)\big)$:

Kontaktbedingung K:

$$\{\mathbf{u}\}^+ - \{\mathbf{u}\}^- = \mathbf{0}, \qquad \Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u}\Big\}^+ = \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u}\Big\}^-; \tag{2.2}$$

Kontaktbedingung G:

$$\Big\{\Big(\underset{(0)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u}\Big)_t\Big\}^+ = \mathbf{0}, \qquad \Big\{\Big(\underset{(1)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u}\Big)_t\Big\}^- = \mathbf{0}, \tag{2.3}$$

$$\Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\Big\}^+ = \Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\Big\}^-, \tag{2.4}$$

$$(\{\mathbf{u}\}^+ - \{\mathbf{u}\}^-) \cdot \mathbf{n} = 0; \tag{2.5}$$

Kontaktbedingung H:

$$\{\mathbf{u}_t\}^+ = \mathbf{0}, \qquad \{\mathbf{u}_t\}^- = \mathbf{0}, \qquad (2.4), (2.5).$$

Hierbei ist

$$\underset{(i)}{A}\mathbf{u} = \mu_i\, \Delta \mathbf{u} + (\lambda_i + \mu_i) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$\underset{(i)}{T}(\partial_x, \mathbf{n})\, \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \left(\mu_i \delta_{kj} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\, n_l + \lambda_i n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu_i n_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right] \mathbf{i}_k$$

der Spannungsoperator, $\{\ldots\}^+ = \lim\limits_{x_2 \to +0} \{\ldots\}$, $\{\ldots\}^- = \lim\limits_{x_2 \to -0} \{\ldots\}$ und $\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, \mathbf{n}$.

Es bezeichne wie in [2] K_ε die Vereinigung der Kreise mit den kritischen Punkten $S \cap \bar{S}_0$ als Mittelpunkt und dem Radius ε, $D_\varepsilon^\pm = D^\pm \setminus K_\varepsilon$, ϱ_x den kürzesten Abstand des Punktes x von S auf der Parallelen zu $x_2 = 0$.

Dann betrachten wir folgende *Regularitätsklasse*:

$$\mathbf{u}|_{D^+} \in C^0(\overline{D_\varepsilon^+}) \cap C^1(\overline{D_\varepsilon^+}) \cap C^\infty(D^+),$$

$$\mathbf{u}|_{D^-} \in C^0(\overline{D_\varepsilon^-}) \cap C^1(\overline{D_\varepsilon^-}) \cap C^\infty(D^-) \quad \text{für jedes} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$$\mathbf{u} \text{ beschränkt in } D^+ \cup D^-, \ \frac{\partial u}{\partial x_j} = O(\varrho_x^{-\gamma}), \ \gamma < 1, \text{ in } (D^+ \cup D^-) \cap K_{\varepsilon_0}.$$

Eindeutigkeitssatz: *Ist* **u** *eine reguläre Lösung des Problems* $I_R(D; 0)$, *dann gilt* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *in* D.

Beweis: Bezeichnet $Q_\varepsilon = \{x \in D : |x_2| < \varepsilon, \varrho_x < \varepsilon\}$, dann erhält man für die elastische Energie auf $D \setminus Q_\varepsilon$ (vgl. [2: S. 70])

$$\int\limits_{D \setminus Q_\varepsilon} E(u(x))\, dx = O(\varepsilon^{1-\gamma}), \quad \text{also} \quad \int\limits_D E(u(x))\, dx = 0.$$

Damit ist **u** auf D^+ und D^- jeweils eine starre Verschiebung und wegen der Randbedingung folgt $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ ∎

3. Existenz einer Lösung

Zur Lösung des Problems $I_R(D; \mathbf{w})$ machen wir den folgenden Potentialansatz vom Typ der doppelten Schicht mit dem Kontakttensor $\mathsf{G}_R(x, y)$ im Kern

$$\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(y)\, ds_y. \tag{3.1}$$

Hier und im weiteren ist $T(\partial_y, \mathbf{n}_y)$ mit den Laméschen Moduln des Halbraumes zu bilden, in dem sich y befindet. Es ist $\mathbf{n}_y$ äußerer Normaleneinheitsvektor an S in y, $S^+ = S \cap \{x : x_2 > 0\}$, $S^- = S \cap \{x : x_2 < 0\}$. Beachte, daß bei $\mathsf{G}_G(x, y)$ in [3] und $\mathsf{G}_H(x, y)$ in [4] die Moduln der oberen Halbebene mit λ_0, μ_0 und die der unteren Halbebene mit λ_1, μ_1 bezeichnet sind. Dann ist $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^+} \in C^\infty(D^+)$, $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^-} \in C^\infty(D^-)$, $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})$ erfüllt (2.1) und die Kontaktbedingung R ($R = K, G, H$). Die Randbedingung $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ führt auf Grund der Sprungrelation für das Potential der doppelten Schicht (entscheidend ist nur der singuläre Anteil von $\mathsf{G}_R(x, y)$, der gleich der Somiglianaschen Grundlösungsmatrix ist [6]) auf das Integralgleichungssystem

$$\mathcal{A}_{IR}\boldsymbol{\varphi} := -\boldsymbol{\varphi}(x_0) + \frac{1}{\pi} \int\limits_S \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x_0, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(y)\, ds_y = \mathbf{w}(x_0), \\ x_0 \in S. \tag{3.2}$$

Wir betrachten die Gleichung (3.2) im Raum $L_2^2(S)$. Der zu $\mathcal{A}_{IR}$ adjungierte Operator ist

$$\mathcal{A}^*_{IR}\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\psi}(x_0) + \frac{1}{\pi} \int\limits_S T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathsf{G}_R(x_0, y)\, \boldsymbol{\psi}(y)\, ds_y. \tag{3.3}$$

Zwischen den Elementen $A^*_{IRkj}(\lambda, \xi)$ der dem Operator A^*_{IR} zugeordneten Symbolmatrix und den Elementen $A_{Rkj}(\lambda, \xi)$ der bei der 2. Randkontaktaufgabe vorkommenden Symbolmatrizen ($R = K$ in [2], $R = G$ in [3], $R = H$ in [4]) besteht der Zusammenhang

$$A^*_{IRkj}(\lambda, \xi) = -A_{Rkj}(\xi, \lambda).$$

Damit erhalten wir die gleichen Symbolkurven wie früher. Um die Theorie von Duduchava anwenden zu können, müssen wir wie früher $S \subset C^n_{1,\alpha}$ voraussetzen, d. h. $S \subset C^{1,\alpha}$ und S schneidet die Gerade $x_2 = 0$ senkrecht.

Satz 3.1: *Sei $S \subset C^{1,\alpha}_n$. Dann ist $\mathcal{A}_{IR}$ ein linearer beschränkter Operator von $L_2^2(S)$ in $L_2^2(S)$, besitzt die Fredholmeigenschaft und hat den Index Null.*

Bemerkung: Allgemein ist die Gültigkeit dieses Satzes für beliebige Lamésche Moduln $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ nur für $R = G$ in [3] beweisen, allgemein aber für gleiche Poissonsche Zahlen $\nu_0 = \nu_1$ ist er für $R = H$ in [4] beweisen, für $R = K$ besteht für die allgemeine Gültigkeit eine hohe Wahrscheinlichkeit (s. Symbolkurven in [2: S. 80]).

Wir zeigen jetzt, daß für den Nullraum des Operators $\mathcal{A}_{IR}$ gilt $N(\mathcal{A}_{IR}) = \{\mathbf{0}\}$. Vorbereitend dazu geben wir die Asymptotik von $\mathsf{G}_R(x, y)$ für $|x| \to \infty$ an. Es ist, wenn sich y in einem beschränkten Gebiet bewegt,

$$\mathsf{G}_R(x, y) = \mathsf{G}_R(x) + O(|x|^{-1}) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty. \tag{3.4}$$

Wir setzen $\mathsf{G}_R(x) = \mathsf{G}_R{}^{+\pm}(x)$ für $x_2 > 0$, $y_2 \gtrless 0$, $\mathsf{G}_R(x) = \mathsf{G}_R{}^{-\pm}(x)$ für $x_2 < 0$, $y_2 \gtrless 0$. Man erhält aus [6]

$$\mathsf{G}_K{}^{++}(x) = \mathsf{G}_K{}^{+-}(x), \; \mathsf{G}_K{}^{-+}(x) = \mathsf{G}_K{}^{--}(x), \tag{3.5}$$

$$\mathsf{G}^{\mp\pm}_{K11}(x) = -H_1{}^{\pm} \ln |x| - H_2{}^{\pm} + H_4{}^{\pm} \frac{x_2{}^2}{|x|^2}, \tag{3.6}$$

$$\mathsf{G}^{\mp\pm}_{K12}(x) = \mp H_3{}^{\pm} \arctan \frac{x_1}{|x_2|} - H_4{}^{\pm} \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \tag{3.7}$$

$$\mathsf{G}^{\mp\pm}_{K21}(x) = \pm H_3{}^{\pm} \arctan \frac{x_1}{|x_2|} - H_4{}^{\pm} \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \tag{3.8}$$

$$\mathsf{G}^{\mp\pm}_{K22}(x) = -H_1{}^{\pm} \ln |x| - H_4{}^{\pm} \frac{x_2{}^2}{|x|^2}. \tag{3.9}$$

Aus [3] folgt

$$\begin{aligned}\mathsf{G}^{\pm\pm}_{G11}(x) = {} & \left(A_1{}^{\pm} - \frac{3\lambda^{\pm} + 7\mu^{\pm}}{2\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm})}\right) \ln |x| + A_1{}^{\pm} \\ & + \frac{\lambda^{\pm} + \mu^{\pm}}{2\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm})} \frac{x_1{}^2}{|x|^2} + A_5{}^{\pm} \frac{x_2{}^2}{|x|^2},\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\mathsf{G}^{\pm\pm}_{G12}(x) = \pm A_2{}^{\pm} \arctan \frac{x_1}{|x_2|} + \left(\frac{\lambda^{\pm} + \mu^{\pm}}{2\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm}} - A_6{}^{\pm}\right) \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \tag{3.11}$$

$$\mathsf{G}^{\pm\pm}_{G21}(x) = \pm A_3{}^{\pm} \arctan \frac{x_1}{|x_2|} + \left(\frac{\lambda^{\pm} + \mu^{\pm}}{2\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm})} - A_5{}^{\pm}\right) \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{G}^{\pm\pm}_{G22}(x) = {} & \left(-\frac{\lambda^{\pm} + 3\mu^{\pm}}{2\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm})} - A_4{}^{\pm}\right) \ln |x| \\ & + \left(\frac{\lambda^{\pm} + \mu^{\pm}}{2\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm})} - A_6{}^{\pm}\right) \frac{x_2{}^2}{|x|^2}\end{aligned} \tag{3.13}$$

und

$$\mathsf{G}_{G11}^{\pm\mp}(x) = A_{10}^{\mp} \ln |x| + A_{10}^{\mp} - A_{14}^{\mp} \frac{x_2^2}{|x|^2}, \tag{3.14}$$

$$\mathsf{G}_{G12}^{\pm\mp}(x) = \mp A_{12}^{\mp} \arctan \frac{x_1}{|x_2|} - A_{15}^{\mp} \frac{x_1 x_2}{|x|^2} = \mathsf{G}_{G12}^{\pm\pm}(x), \tag{3.15}$$

$$\mathsf{G}_{G21}^{\pm\mp}(x) = \mp A_{11}^{\mp} \arctan \frac{x_1}{|x_2|} + A_{14}^{\mp} \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \tag{3.16}$$

$$\mathsf{G}_{G22}^{\pm\mp}(x) = -A_{13}^{\mp} \ln |x| - A_{15}^{\mp} \frac{x_2^2}{|x|^2} = \mathsf{G}_{G22}^{\pm\pm}(x). \tag{3.17}$$

Dabei ist $\lambda^+ = \lambda_0$, $\lambda^- = \lambda_1$, $\mu^+ = \mu_0$, $\mu^- = \mu_1$, $A_k^+ = A_k$, $A_k^- = A_k^{0-1}$, die Konstanten A_k, A_k^{0-1} findet man in [8]. Aus [4] folgt $G_H^{++}(x) = \mathsf{G}_H^{+-}(x)$, $\mathsf{G}_H^{-+}(x) = \mathsf{G}_H^{--}(x)$ und

$$\mathsf{G}_{H11}^{++}(x) = \mathsf{G}_{H11}^{--}(x) = 0. \tag{3.18}$$

$$\mathsf{G}_{H12}^{++}(x) = (\lambda_0 + \mu_0)\, C_H \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \tag{3.19}$$

$$\mathsf{G}_{H21}^{++}(x) = \mathsf{G}_{H21}^{--}(x) = 0, \tag{3.20}$$

$$\mathsf{G}_{H22}^{++}(x) = -(\lambda_0 + 3\mu_0)\, C_H \ln |x| + (\lambda_0 + \mu_0)\, C_H \frac{x_2^2}{|x|^2} \tag{3.21}$$

mit

$$C_H = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)(\lambda_1 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_0 + 3\mu_0)}.$$

Es ergeben sich $\mathsf{G}_{H12}^{--}(x)$, $\mathsf{G}_{H22}^{--}(x)$ aus (3.19), (3.21) durch Vertauschung der Laméschen Moduln.

Satz 3.2: *Die Spalten von $\mathsf{G}_R(x)$ erfüllen in den beiden Halbebenen $x_2 > 0$ und $x_2 < 0$ die Differentialgleichungen* (2.1) *und auf der Geraden $x_2 = 0$ $(x_1 \neq 0)$ die Kontaktbedingung R $(R = K, G, H)$.*

Der Beweis ergibt sich durch Ausrechnen. Die Gültigkeit des Satzes 3.2 ist auf Grund von (3.4) naheliegend, da $\mathsf{G}_R(x, y)$ diese Eigenschaften hat ∎

Satz 3.3: *Es ist $N(\mathcal{A}_{IR}) = \{0\}$ für $R = K, G, H$.*

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir den Koordinatenursprung in D an. Sei $\dim N(\mathcal{A}_{IR}) > 0$. Dann gibt es ein $\boldsymbol{\psi}_R \in N(\mathcal{A}_{IR}^*)$ mit $\boldsymbol{\psi}_R \neq \mathbf{0}$. Wir bilden das Potential der einfachen Schicht

$$\mathbf{V}_R(x; \boldsymbol{\psi}_R) = \frac{1}{\pi} \int_S \mathsf{G}_R(x, y)\, \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y.$$

Auf Grund der Sprungrelation dieses Potentials und wegen $\mathcal{A}_{IR}^* \boldsymbol{\psi}_R = \mathbf{0}$ gilt für den Grenzwert gegen einen Punkt $x \in S$ von außen her

$$\{T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathbf{V}_R(x; \boldsymbol{\psi}_R)\}^- = \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Nach (3.4) ist

$$\mathbf{V}_R(x; \boldsymbol{\psi}_R) = \frac{1}{\pi} \mathsf{G}_R^{+}(x) \int\limits_{S^+} \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y + \frac{1}{\pi} \mathsf{G}_R^{-}(x) \int\limits_{S^-} \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y + \mathbf{h}_R(x),$$

wobei

$$\mathbf{h}_R(x) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_R(x)}{\partial x_j} = O(|x|^{-2}) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty \tag{3.23}$$

gilt. Wegen Satz 3.2 und der Eigenschaften von $\mathbf{V}_R(x; \boldsymbol{\psi}_R)$ sowie wegen (3.22) und (3.23) ist $\mathbf{h}_R(x)$ im Außengebiet reguläre (im Sinne von [2—4]) Lösung der 2. Randkontaktaufgabe mit den Randwerten

$$\{T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathbf{h}_R(x)\}^- = -\frac{1}{\pi} T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_R^{+}(x) \int\limits_{S^+} \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y$$

$$- \frac{1}{\pi} T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_R^{-}(x) \int\limits_{S^-} \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y =: \mathbf{p}_R(x). \tag{3.24}$$

Es bezeichne

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}_1,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{i}_2,\ \mathbf{a}_1^{\pm} = \begin{cases} \mathbf{i}_1 & \text{für} \quad x_2 \gtrless 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mathbf{a}_3 = -x_2 \mathbf{i}_1 + x_1 \mathbf{i}_2. \tag{3.25}$$

Dann erfüllt $\mathbf{h}_R(x)$ die folgenden notwendigen Lösbarkeitsbedingungen [5]:

$$\int\limits_S \mathbf{p}_K(x) \cdot \mathbf{a}_1\, ds = 0, \qquad \int\limits_S \mathbf{p}_K(x) \cdot \mathbf{a}_2\, ds = 0, \tag{3.26}$$

$$\int\limits_S \mathbf{p}_G(x) \cdot \mathbf{a}_1^{+}\, ds = 0, \qquad \int\limits_S \mathbf{p}_G(x) \cdot \mathbf{a}_1^{-}\, ds = 0, \qquad \int\limits_S \mathbf{p}_G(x) \cdot \mathbf{a}_2\, ds = 0, \tag{3.27}$$

$$\int\limits_S \mathbf{p}_H(x) \cdot \mathbf{a}_2\, ds = 0. \tag{3.28}$$

Die Lösbarkeitsbedingungen (3.26) lauten dann

$$\int\limits_S \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_K(x)\big)_{11}\, ds_x \int\limits_S \psi_{K1}(y)\, ds_y + \int\limits_S \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_K(x)\big)_{12}\, ds_x \int\limits_S \psi_{K2}(y)\, ds_y = 0, \tag{3.29}$$

$$\int\limits_S \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_K(x)\big)_{21}\, ds_x \int\limits_S \psi_{K1}(y)\, ds_y + \int\limits_S \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_K(x)\big)_{22}\, ds_x \int\limits_S \psi_{K2}(y)\, ds_y = 0. \tag{3.30}$$

Ist r so groß, daß D innerhalb des Kreises $S_r = \{x : |x| = r\}$ liegt, und ist $\mathbf{n}_x$ äußere Normale an S, dann folgt aus der Bettischen Formel ($\mathbf{u} = \mathsf{G}_K^{(k)}(x)$, $\mathbf{v} = \mathbf{a}_j$)

$$\int\limits_S \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_K(x)\big)_{kj}\, ds_x = \int\limits_{S_r} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_K(x)\right)_{kj} ds_x. \tag{3.31}$$

Die Integrale auf der rechten Seite von (3.31) lassen sich ausrechnen, man erhält

$$\int\limits_{S_r} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_K(x)\big)_{kj}\, ds_x = -2\pi \delta_{kj} \qquad (k, j = 1, 2).$$

Aus (3.29), (3.30) folgt somit $\int\limits_S \psi_K(y)\,ds_y = 0$. Also ist $\mathbf{V}_K(x;\psi_K)$ im Unendlichen regulär und es gilt $\mathbf{V}_K(x;\psi_K) = O(|x|^{-1})$. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes [2] ist $\mathbf{V}_K(x;\psi_K) = 0$ außerhalb D. Wegen des stetigen Durchgangs von $\mathbf{V}_K(x;\psi_K)$ durch S und des Eindeutigkeitssatzes für das beschränkte Gebiet folgt $\mathbf{V}_K(x;\psi_K) = 0$ in der ganzen Ebene. Damit ist

$$0 = \{T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathbf{V}_K(x;\psi_K)\}^+ - \{T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathbf{V}_K(x;\psi_K)\}^- = 2\psi_K(x).$$

Das ist ein Widerspruch.

Im Falle der Kontaktbedingung G schreibt sich (3.27)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{++}(x)\big)_{11}\,ds_x \int\limits_{S^+} \psi_{G1}(y)\,ds_y \\
&\quad + \int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{+-}(x)\big)_{11}\,ds_x \int\limits_{S^-} \psi_{G1}(y)\,ds_y \\
&\quad + \int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{+-}(x)\big)_{12}\,ds_x \int\limits_{S} \psi_{G2}(y)\,ds_y = 0, \\
&\int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{-+}(x)\big)_{11}\,ds_x \int\limits_{S^+} \psi_{G1}(y)\,ds_y \\
&\quad + \int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{--}(x)\big)_{11}\,ds_x \int\limits_{S^-} \psi_{G1}(y)\,ds_y \\
&\quad + \int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{-+}(x)\big)_{12}\,ds_x \int\limits_{S} \psi_{G2}(y)\,ds_y = 0, \\
&\left[\int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{++}(x)\big)_{21}\,ds_x + \int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{-+}(x)\big)_{21}\,ds_x\right] \int\limits_{S^+} \psi_{G1}(y)\,ds_y \\
&\quad + \left[\int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{+-}(x)\big)_{21}\,ds_x\right. \\
&\quad + \left.\int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{--}(x)\big)_{21}\,ds_x\right] \int\limits_{S^-} \psi_{G1}(y)\,ds_y \\
&\quad + \left[\int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{+-}(x)\big)_{22}\,ds_x\right. \\
&\quad + \left.\int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{-+}(x)\big)_{22}\,ds_x\right] \int\limits_{S} \psi_{G2}(y)\,ds_y = 0.
\end{aligned}$$

Nutzt man die Eigenschaften von $\mathsf{G}_G(x)$ aus, so erhält man mit der Bettischen Formel

$$\int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{+\cdot}(x)\big)_{1j}\,ds_x = \int\limits_{S_r^+} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right)\mathsf{G}_G^{+\cdot}(x)\right)_{1j} ds_x,$$

$$\int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{-\cdot}(x)\big)_{1j}\,ds_x = \int\limits_{S_r^-} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right)\mathsf{G}_G^{-\cdot}(x)\right)_{1j} ds_x,$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{S^+} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{+\cdot}(x)\big)_{2j}\,ds_x + \int\limits_{S^-} \big(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\,\mathsf{G}_G^{-\cdot}(x)\big)_{2j}\,ds_x \\
&\quad = \int\limits_{S_r^+} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right)\mathsf{G}_G^{+\cdot}(x)\right)_{2j} ds_x + \int\limits_{S_r^-} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right)\mathsf{G}_G^{-\cdot}(x)\right)_{2j} ds_x
\end{aligned}$$

$(j = 1, 2;\ S_r^+ = S_r \cap \{x_2 > 0\},\ S_r^- = S_r \cap \{x_2 < 0\})$.

Man rechnet aus:

$$\int_{S_r^+} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{++}(x)\right)_{11} ds_x = -2\pi,$$

$$\int_{S_r^-} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{--}(x)\right)_{11} ds_x = -2\pi,$$

$$\int_{S_r^+} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{+-}(x)\right)_{kj} ds_x = 0,$$

$$\int_{S_r^-} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{-+}(x)\right)_{kj} ds_x = 0, \qquad (k, j) \neq (2, 2),$$

$$\int_{S_r^+} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{++}(x)\right)_{kj} ds_x = 0,$$

$$\int_{S_r^-} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{--}(x)\right)_{kj} ds_x = 0, \qquad k \neq j,$$

$$\int_{S_r^+} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{+-}(x)\right)_{22} ds_x = -2\pi \frac{B_1}{1 + B_1},$$

$$\int_{S_r^-} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_G^{-+}(x)\right)_{22} ds_x = -2\pi \frac{1}{1 + B_1} \qquad (B_1 \text{ aus } [8\text{: } (3.8)]).$$

Somit folgt, daß

$$\int_{S^+} \psi_{G1}\, ds = 0, \qquad \int_{S^-} \psi_{G1}\, ds = 0, \qquad \int_{S} \psi_{G2}\, ds = 0$$

gilt. Also ist $\mathbf{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_G)$ im Unendlichen regulär und es gilt $\mathbf{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_G) = O(|x|^{-1})$. Wie oben schließt man $\boldsymbol{\psi}_G(x) = \mathbf{0}$.

Im Falle der Kontaktbedingung H lautet (3.28)

$$\int_S \left(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_H(x)\right)_{21} ds_x \int_S \psi_{H1}(y)\, ds_y + \int_S \left(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_H(x)\right)_{22} ds_x \int_S \psi_{H2}(y)\, ds_y = 0. \tag{3.32}$$

Nun ist

$$\int_S \left(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_H(x)\right)_{21} ds_x = \int_{S_r} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_H(x)\right)_{21} ds_x = 0,$$

$$\int_S \left(T(\partial_x, \mathbf{n}_x)\, \mathsf{G}_H(x)\right)_{22} ds_x = \int_{S_r} \left(T\left(\partial_x, \frac{x}{|x|}\right) \mathsf{G}_H(x)\right)_{22} ds_x = -2\pi,$$

also folgt aus (3.32) $\int_S \psi_{H2}(y)\, ds_y = 0$. Somit ist $\mathbf{V}_H(x; \boldsymbol{\psi}_H)$ im Unendlichen regulär und es gilt $\mathbf{V}_H(x; \boldsymbol{\psi}_H) = O(|x|^{-1})$. Wie oben scließt man $\boldsymbol{\psi}_H(x) = \mathbf{0}$ ∎

Es besitzt also $\mathcal{A}_{IR}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{w}$ für beliebiges $\mathbf{w} \in L_2{}^2(S)$ eine eindeutige Lösung. Zusammen mit Satz 3.3 in [2] haben wir das folgende Resultat erhalten.

Satz 3.4: *Sei $S \subset C_n{}^{1,\alpha}$, $\mathbf{w} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Dann hat das Problem $I_R(D; \mathbf{w})$ eine Lösung, die darstellbar ist als Potential $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})$, wobei $\boldsymbol{\varphi} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ eindeutige Lösung von $\mathcal{A}_{IR}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{w}$ ist.*

4. Existenz einer regulären Lösung

Zu Beginn stellen wir einige Resultate über das ebene elastische Potential der doppelten Schicht bereit. Im räumlichen Fall kann man solche Sätze zitieren [9: S. 226], im ebenen Fall scheinbar nicht, dort ist nur das Cauchysche Integral, das den singulären Anteil des betrachteten Potentials bildet [10: (3.9)], eingehend untersucht. Wir geben eine Methode an, wie man die Ergebnisse im räumlichen Fall auf den ebenen Fall übertragen kann.

Wir betrachten das ebene elastische Potential der doppelten Schicht

$$\mathbf{W}(x; \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(y)\, ds_y. \tag{4.1}$$

Hierbei ist $\Gamma(x, y)$ die Somiglianasche Grundlösungsmatrix mit den Elementen $(k, j = 1, 2)$

$$\Gamma_{kj}(x, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\, \delta_{kj} \ln \frac{1}{|x - y|} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\, \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \tag{4.2}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\, \frac{(x_1 - y_1)\, n_1(y) + (x_2 - y_2)\, n_2(y)}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\, \frac{(x_1 - y_1)\, n_2(y) - (x_2 - y_2)\, n_1(y)}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\, \frac{(x_1 - y_1)\, n_1(y) + (x_2 - y_2)\, n_2(y)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sei Z_L der Zylinder $Z_L = \{x = (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S,\ -L \leqq x_3 \leqq +L\}$, den wir oben und unten zu einer genügend glatten geschlossenen Fläche S_3 abschließen. Jetzt betrachten wir das Potential

$$\mathbf{W}(x; \boldsymbol{\Phi}; S_3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_3} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \Gamma_3(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}(y)\, dS_y, \tag{4.4}$$

wobei $\Gamma_3(x, y)$ die räumliche Somiglianasche Grundlösungsmatrix mit den Elementen $(k, j = 1, 2, 3)$

$$\Gamma_{3kj}(x, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\, \delta_{kj}\, \frac{1}{|x - y|} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\, \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{|x - y|^3},$$

$T(\partial_y, \mathbf{n}_y)$ der dreidimensionale Spannungsoperator [9: S. 51] und für $y \in Z_L$ der Vektor $\mathbf{\Phi}(y) = \mathbf{\Phi}(y_1, y_2, y_3) = (\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2), 0)^{\mathrm{T}}$ ist. Dann ist

$$\mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; S_3) = \mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; S_3 \setminus Z_L) - \mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; Z_l \setminus Z_L) + \mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; Z_l), \quad l > L. \tag{4.5}$$

Für das Potential $\mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; S_3)$ gelten bekannte Sätze [9] und die Potentiale $\mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; S_3 \setminus Z_l)$, $\mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; Z_l \setminus Z_L)$ sind in der Umgebung der Ebene $x_3 = 0$ regulär. Weiter ist

$$\mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; Z_l) = \frac{1}{2\pi} \int_S \int_{-l}^{+l} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \Gamma_3(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} dy_3 \mathbf{\Phi}(y)\, ds_y$$

und

$$\lim_{l \to \infty} \mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; Z_l) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}(x; \boldsymbol{\varphi}) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Im Potential $\mathbf{W}(x; \mathbf{\Phi}; Z_l \setminus Z_L)$ bleibt die Regularität auch nach dem Grenzübergang $l \to \infty$ erhalten. Man kann auch hier die Integration nach y_3 in den Kern hereinziehen und erhält für den integrierten Kern im Bereich $|x_3| < \frac{L}{2}$, $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \frac{L}{4}$ eine Potenzreihenentwicklung in den Variablen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2. Somit überträgt sich der Satz 7.1 in [9: S. 226] auf den ebenen Fall.

Satz 4.1: *Sei S eine geschlossene Kurve der Klasse $C^{k+1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{l,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $0 \leqq l \leqq k + 1$. Dann ist im Innengebiet D^+ von S und im Außengebiet D^- von S*

$$\mathbf{W}(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^+} \in C^{l,\beta}(D^+) \quad \text{und} \quad \mathbf{W}(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^-} \in C^{l,\beta}(D^-).$$

Da auf S außerhalb der kritischen Punkte die Kompensatrix $\mathsf{V}_R(x, y)$ der Kontakttensoren regulär ist, folgt hieraus für unsere Situation das folgende Resultat.

Satz 4.2: *Sei $S^+ \subset C^{k+1,\alpha}$, $S^- \subset C^{k+1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{l,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes feste $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $0 \leqq l \leqq k + 1$. Dann ist $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^+} \in C^{l,\beta}(D^+ \setminus K_\varepsilon)$, $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^-} \in C^{l,\beta}(D^- \setminus K_\varepsilon)$ $(R = K, G, H)$.*

Der folgende Satz sagt aus, wann sich $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})$ in den kritischen Punkten im Sinne der obigen Definition regulär verhält.

Satz 4.3: *Sei $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Dann ist $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^\pm} \in C^{0,\beta}(D^\pm \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})$ beschränkt in D, $\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = O\left(\frac{1}{\varrho_x^{1-\beta}}\right)$ in den kritischen Punkten für $R = K, G, H$. Im Falle $R = H$ muß noch vorausgesetzt werden, daß in den kritischen Punkten die 1. Komponente von $\boldsymbol{\varphi}$ Null ist.*

Beweis: Die Aussage $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^\pm} \in C^{0,\beta}(D^\pm \setminus K_\varepsilon)$ folgt aus Satz 4.2. Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen bildet die Gaußsche Formel

$$\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\psi}) = \begin{cases} -2\boldsymbol{\psi}(x) & \text{für } x \in D \\ -\boldsymbol{\psi}(x) & \text{für } x \in S \\ 0 & \text{für } x \in \overline{D}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Diese gilt für $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ (vgl. (3.25)) falls $R = K$, für $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1^+, \mathbf{a}_1^-, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ falls $R = G$, und für $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{L}\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ falls $R = H$ ist. Sei y_0 einer der beiden kritischen

Punkte. Dann folgt aus (4.7)

$$\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}(y_0)) = -2\boldsymbol{\varphi}(y_0) \quad \text{für} \quad x \in D. \tag{4.8}$$

Im Falle $R = H$ gilt (4.8) wegen der Voraussetzung $\varphi_1(y_0) = 0$. Damit ist

$$\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)) - 2\boldsymbol{\varphi}(y_0). \tag{4.9}$$

Sei $K(y_0, \delta) = \{x = (x_1, x_2) : |x - y_0| < \delta\}$. Es ist $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})$ in D beschränkt, wenn wir zeigen, daß

$$I = \int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\right) ds_y$$

in einer Umgebung von y_0 beschränkt ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $x_2 > 0$ annehmen. Nun ist $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ mit

$$I_1 = \int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\right) ds_y,$$

$$I_2 = -\int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\right) ds_y,$$

$$I_3 = \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \mathbf{V}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\right) ds_y,$$

$$I_4 = \int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \mathbf{V}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\right) ds_y.$$

In I_1 und I_2 ist T und Γ mit den Moduln der oberen Halbebene zu bilden. Auf Grund von Satz 4.1 genügt I_1 in $D \cap K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten β, ist also beschränkt. Für $x \in D^+ \cap K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$, $y \in S^- \cap K(y_0, \delta)$ gilt $\frac{|y - y_0|}{|x - y|} \leqq C_1$. Somit ist für $k = 2, 4$

$$\begin{aligned}
|I_k| &\leqq \int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} C_2 \frac{1}{|x - y|} |\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)|\, ds_y \\
&\leqq \int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} C_2 \frac{1}{|x - y|} A\, |y - y_0|^\beta\, ds_y \\
&= \int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} C_2 A \frac{|y - y_0|}{|x - y|} |y - y_0|^{\beta-1}\, ds_y \\
&\leqq C_2 A C_1 \int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} |y - y_0|^{\beta-1}\, ds_y \leqq C_3.
\end{aligned}$$

Sei für $y = (y_1, y_2) \in S^+$ der Punkt $\bar{y} = (y_1, -y_2)$. Für $x \in D^+ \cap K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$, $y \in S^+ \cap K(y_0, \delta)$ ist dann $\frac{|y_0 - \bar{y}|}{|x - \bar{y}|} = \frac{|y - y_0|}{|x - \bar{y}|} \leqq C_1$. Also wird

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leqq \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} C_2 \frac{1}{|x - \bar{y}|} A\, |y - y_0|^\beta\, ds_y \\
&\leqq C_2 A C_1 \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} |y - y_0|^{\beta-1}\, ds_y \leqq C_3.
\end{aligned}$$

Untersuchen wir jetzt die Ableitungen $\frac{\partial I_k}{\partial x_j}$. Es ist

$$I_1 = I_1^* - \int\limits_{S\setminus K(y_0,\delta)} \big(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\,\Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} \big(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\big)\, ds_y$$

mit

$$I_1^* = \int\limits_S \big(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\,\Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} \big(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\big)\, ds_y = \pi \mathbf{W}\big(x; \boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_0)\big).$$

Das zweite Integral besitzt in $K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$ beschränkte Ableitungen. Bezeichne $y_x \in S^+$ den Punkt in $K(y_0, \delta)$, der dieselbe x_2-Koordinate wie x hat. Wegen der Gaußschen Formel ist für $x \in D$

$$\begin{aligned} &I_1^*(x + h) - I_1^*(x) \\ &= \pi \mathbf{W}\big(x + h; \boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_x)\big) - \pi \mathbf{W}\big(x; \boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_x)\big) \\ &= \int\limits_S \Big[\big(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\,\Gamma(x + h, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} - \big(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\,\Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}}\Big] \big(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_x)\big)\, ds_y. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial I_1^*}{\partial x_j} = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial x_j} \big(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\,\Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} \big(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_x)\big)\, ds_y.$$

Das Integral über $S \setminus K(y_0, \delta)$ ist in $K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$ beschränkt, es bleibt also das Integral über $S \cap K(y_0, \delta)$ abzuschätzen.
Man erhält (vgl. [2: S. 71])

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{S\cap K(y_0,\delta)} \frac{\partial}{\partial x_j} \big(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\,\Gamma(x, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} \big(\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(y_x)\big)\, ds_y \right| \\ &\leqq C_4 \int\limits_{S\cap K(y_0,\delta)} \frac{1}{|x - y|^2}\, |y - y_x|^\beta\, ds_y \\ &\leqq C_5 \int\limits_{S\cap K(y_0,\delta)} \frac{|x_2 - y_2|^\beta}{\varrho_x^2 + (x_2 - y_2)^2}\, ds_y \leqq C_6 \int\limits_0^y \frac{t^\beta}{\varrho_x^2 + t^2}\, dt \\ &= C_6 \frac{1}{\varrho_x^{1-\beta}} \int\limits_0^{y/\varrho_x} \frac{v^\beta}{1 + v^2}\, dv \leqq C_7 \frac{1}{\varrho_x^{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Weiter ist für $k = 2,4$

$$\left|\frac{\partial I_k}{\partial x_j}\right| \leqq C_8 \int\limits_{S^-\cap K(y_0,\delta)} \frac{|y - y_0|^\beta}{|x - y|^2}\, ds_y \leqq C_8 \int\limits_{S^-\cap K(y_0,\delta)} \frac{|y - y_x|^\beta}{|x - y|^2}\, ds_y = O\left(\frac{1}{\varrho_x^{1-\beta}}\right)$$

und

$$\left|\frac{\partial I_3}{\partial x_j}\right| \leqq C_9 \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} \frac{|y-y_0|^\beta}{|x-\tilde{y}|^2}\, ds_y = C_9 \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} \frac{|\tilde{y}-y_0|^\beta}{|x-\tilde{y}|^2}\, ds_y$$

$$\leqq C_9 \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} \frac{|\tilde{y}-y_x|^\beta}{|x-\tilde{y}|^2}\, ds_y = O\left(\frac{1}{\varrho_x^{1-\beta}}\right).$$

Damit ist der Satz 4.3 bewiesen ∎

Satz 4.4: *Sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $\varphi_1(y_0) = 0$ *im Falle* $R = H$. *Dann ist* $\mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^\pm} \in C^{1,\beta}(D^\pm \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$ *und es gilt* $\mathfrak{f}(x_0) := \lim\limits_{D \ni x \to x_0 \in S} T(\partial_x, \mathfrak{n}_x)\, \mathbf{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) \in L_2^2(S)$.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus Satz 4.2. Es genügt offenbar zu zeigen, daß $\mathfrak{f}(x_0)|_{S^+} \in L_2^2(S^+)$ ist. Wir gehen von der Zerlegung beim Beweis des Satzes 4.3 aus. Auf Grund von Satz 4.1 ist $I_1 \in C^{1,\beta}\left(D \cap K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)\right)$. Bei I_2, I_3, I_4 kann man mit dem Grenzübergang und der Ableitung in das Integral hineingehen. Wegen $\boldsymbol{\varphi} \in C^{0,1}(S)$ folgt für $k = 2,4$ (vgl. [2; S. 75])

$$\left|\frac{\partial I_k}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}\right| \leqq C_{10} \int\limits_{S^- \cap K(y_0,\delta)} \frac{|y-y_0|}{|x_0-y|^2}\, ds_y = O(|\ln x_2^0|)$$

und

$$\left|\frac{\partial I_3}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}\right| \leqq C_{11} \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} \frac{|y-y_0|}{|x_0-\tilde{y}|^2}\, ds_y$$

$$= C_{11} \int\limits_{S^+ \cap K(y_0,\delta)} \frac{|\tilde{y}-y_0|}{|x_0-\tilde{y}|^2}\, ds_y = O(|\ln x_2^0|) \;∎$$

Satz 4.5: *Sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\mathbf{w} = w_1\mathfrak{i}_1 + w_2\mathfrak{i}_2 \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $w_1(x) = 0$ *für* $x_2 = 0$ *im Falle* $R = H$. *Dann hat das Problem* $I_R(D; \mathbf{w})$ *eine eindeutige reguläre Lösung* $\mathfrak{u}_R(x)$. *Sie ist darstellbar in der Form*

$$\mathfrak{u}_R(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(T(\partial_y, \mathfrak{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{w}(y)\, ds_y$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \mathsf{G}_R(x, y)\, \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y, \tag{4.10}$$

wobei $\boldsymbol{\psi}_R(y)$ *eindeutige Lösung von*

$$\mathcal{A}_{IR}^* \boldsymbol{\psi}_R = \mathfrak{f}_R(x_0) \tag{4.11}$$

ist mit

$$\mathfrak{f}_R(x_0) = \lim_{D \ni x \to x_0 \in S} T(\partial_x, \mathfrak{n}_x) \frac{1}{\pi} \int\limits_S \left(T(\partial_y, \mathfrak{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{w}(y)\, ds_y.$$

Beweis: Es ist $\mathfrak{u}_R(x) = -\frac{1}{2} \mathbf{W}_R(x; \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \mathbf{V}_R(x; \boldsymbol{\psi}_R)$. Nach Satz 4.4 ist $\mathfrak{f}_R(x_0) \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.3 und dem Regularitätssatz 3.3

in [2] besitzt $\mathcal{A}^*_{IR}\boldsymbol{\psi}_R = \mathfrak{f}_R(x_0)$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{\psi}_R \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$. Dann ist $\mathbf{V}_R(x; \boldsymbol{\psi}_R)$ regulär mit $\gamma = \frac{1}{2}$ (vgl. [2: Satz 2.1]). Nach Satz 4.3 und Satz 4.4 ist $\mathbf{W}_R(x; \mathbf{w})$ regulär mit $\gamma = 1 - \beta$. Es erfüllt $\mathbf{u}_R$ a priori die Differentialgleichung und die Kontaktbedingungen.

Nun zum Nachweis, daß $\mathbf{u}_R(x)$ die Randbedingung erfüllt. Wir fassen $\mathbf{u}_R(x)$ als Vektor in $D = D^+$ und im Außengebiet D^- auf. Nach der Sprungrelation des elastischen Potentials der doppelten Schicht ist für $x_0 \in S$

$$\{\mathbf{u}_R(x_0)\}^+ = -\frac{1}{2}\left[-\mathbf{w}(x_0) + \mathbf{W}_R(x_0; \mathbf{w})\right] + \frac{1}{2}\mathbf{V}_R(x_0; \boldsymbol{\psi}_R),$$

$$\{\mathbf{u}_R(x_0)\}^- = -\frac{1}{2}\left[+\mathbf{w}(x_0) + \mathbf{W}_R(x_0; \mathbf{w})\right] + \frac{1}{2}\mathbf{V}_R(x_0; \boldsymbol{\psi}_R),$$

also

$$\{\mathbf{u}_R(x_0)\}^+ - \{\mathbf{u}_R(x_0)\}^- = \mathbf{w}(x_0). \tag{4.12}$$

Weiter ist nach der Sprungrelation für das elastische Potential der einfachen Schicht

$$\{T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathbf{u}_R(x_0)\}^- = -\frac{1}{2}\{T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathbf{W}_R(x_0; \mathbf{w})\}^- + \frac{1}{2}\mathcal{A}^*_{IR}\boldsymbol{\psi}_R. \tag{4.13}$$

Nach dem Satz von Ljapunow-Tauber (vgl. [9: S. 228]) ist

$$\{T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathbf{W}_R(x_0; \mathbf{w})\}^- \doteq \{T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathbf{W}_R(x_0; \mathbf{w})\}^+ = \mathfrak{f}_R(x_0).$$

Aus (4.11) und (4.13) folgt

$$\{T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathbf{u}_R(x_0)\}^- \doteq 0. \tag{4.14}$$

Nun ist $\mathbf{W}_R(x; \mathbf{w})$ in D reguläre Lösung der Randkontaktaufgabe mit der Randbedingung $\{T(\partial_{x_0}, \mathbf{n}_{x_0})\, \mathbf{W}_R(x_0; \mathbf{w})\}^+ = \mathfrak{f}_R(x_0)$. Also gelten die notwendigen Lösbarkeitsbedingungen (vgl. [5])

$$\int_S \mathfrak{f}_K(x) \cdot \mathbf{a}_k\, ds = 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{4.15}$$

$$\int_S \mathfrak{f}_G(x) \cdot \mathbf{a}_1{}^+\, ds = 0, \qquad \int_S \mathfrak{f}_G(x) \cdot \mathbf{a}_1{}^-\, ds = 0, \qquad \int_S \mathfrak{f}_G(x) \cdot \mathbf{a}_k\, ds = 0$$

$$(k = 2, 3), \tag{4.16}$$

$$\int_S \mathfrak{f}_H(x) \cdot \mathbf{a}_k\, ds = 0 \qquad (k = 2, 3). \tag{4.17}$$

Wir betrachten den Operator

$$\mathcal{A}_R{}^*\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(x) + \frac{1}{\pi}\int_S \left(T(\partial_y, \mathbf{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(y)\, ds_y, \qquad x \in S. \tag{4.18}$$

Dann gilt

$$N(\mathcal{A}_K{}^*) = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \text{ [2]}, \qquad N(\mathcal{A}_G{}^*) = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1{}^+, \mathbf{a}_1{}^-, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \text{ [3]}$$

und

$$N(\mathcal{A}_H{}^*) = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \text{ [4]}.$$

Wir bilden das Skalarprodukt von (4.11) mit $\boldsymbol{\varphi}(x_0) \in N(\mathcal{A}_R^*)$, integrieren über S und vertauschen im Doppelintegral die Integrationsreihenfolge. Dadurch erhält man

$$-\int_S \boldsymbol{\psi}_R(x_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0}$$

$$+ \int_S \left(\frac{1}{\pi} \int_S \left(T(\partial_{x_0}, \mathfrak{n}_{x_0})\, \mathsf{G}_R(y, x_0)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0}\right) \cdot \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y$$

$$= \int_S \mathfrak{f}_R(x_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0}.$$

Wegen (4.18) und $\boldsymbol{\varphi}(x_0) \in N(\mathcal{A}_R^*)$ folgt

$$-\int_S \boldsymbol{\psi}_R(x_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0} - \int_S \boldsymbol{\varphi}(y) \cdot \boldsymbol{\psi}_R(y)\, ds_y = \int_S \mathfrak{f}_R(x_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0},$$

also

$$-2 \int_S \boldsymbol{\psi}_R(x_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0} = \int_S \mathfrak{f}_R(x_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_0)\, ds_{x_0}.$$

Aus (4.15), (4.16), (4.17) folgt somit

$$\int_S \boldsymbol{\psi}_K(x) \cdot \mathfrak{a}_K\, ds = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{4.19}$$

$$\int_S \boldsymbol{\psi}_G(x) \cdot \mathfrak{a}_1^+\, ds = 0, \quad \int_S \boldsymbol{\psi}_G(x) \cdot \mathfrak{a}_1^-\, ds = 0, \quad \int_S \boldsymbol{\psi}_G(x) \cdot \mathfrak{a}_2\, ds = 0 \tag{4.20}$$

$$\int_S \boldsymbol{\varphi}_H(x \cdot \mathfrak{a}_2\, ds = 0. \tag{4.21}$$

Also ist $\mathfrak{u}_R(x)$ wegen (4.14) und (4.19)—(4.21) im Außengebiet reguläre Lösung der 2. Randkontaktaufgabe mit homogenen Rand- und Kontaktbedingungen und für $|x| \to \infty$ gilt $\mathfrak{u}_R(x) = O(|x|^{-1})$ [5]. Aus dem Eindeutigkeitssatz (vgl. [2—5]) folgt $\mathfrak{u}_R(x) \equiv \mathbf{0}$ in D^-. Aus (4.12) folgt schließlich $\{\mathfrak{u}_R(x_0)\}^+ = \mathfrak{w}(x_0)$, was zu beweisen war ∎

Korrektur: In [2: S. 90] heißt es bei der Konstanten H_1^- im Zähler richtig $+E_0(1 - \nu_0)(1 + \nu_1)(3 - 4\nu_1)$.

LITERATUR

[1] Jentsch, L.: Zur Theorie der Wärmespannungen in Bimetallkörpern. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturw. R. **29** (1980), 49—58.

[2] Jentsch, L.: Über ein Bimetallproblem in der Ebene. Z. Anal. Anw. **1** (1982) 5, 67—92.

[3] Jentsch, L.: Über ein Bimetallproblem der Ebene mit der Kontaktbedingung des reibungsfreien Gleitens. Юбил. сб. трудов Тбилисского Гос. Унив., посв. 80-летию Акад. В. Д. Купрадзе.

[4] Jentsch, L.: Über ein ebenes Bimetallproblem mit einer speziellen Rißbildung. ZAMM (im Druck).

[5] Jentsch, L.: Bimetallprobleme mit verschiedenen Kontaktbedingungen. In: Probleme und Methoden der Mathematischen Physik (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. **63**). Vortrag auf der 8. Tagung über Probleme und Methoden der Math. Physik, Karl-Marx-Stadt (DDR) 20.—24. Juni 1983 (Hrsg.: V. Friedrich u. a.). Leipzig: BSB Teubner Verlagsgesellschaft 1984, 111—121.

[6] Jentsch, L.: Der Greensche Kontakttensor der Elastostatik für zwei fest verbundene Halbebenen. ZAMM **61** (1981), 343—344.

[7] DUDUCHAVA, R.: Integral Equations in Convolution with Discontinuous Presymbols, Singular Integral Equations with Fixed Singularities and Their Applications to Some Problems of Mechanics (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 24). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1979.

[8] JENTSCH, L.: Die Greensche Matrix für zwei aneinander reibungsfrei gleitende elastische Halbräume mit verschiedenen Laméschen Moduln. ZAMM 58 (1978), 209–224.

[9] КУПРАДЗЕ, В. Д., ГЕГЕЛИА, Т. Т., БАШЕЛЕЙШВИЛИ, М. О., и Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ: Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Изд-во Наука 1976.

[10] MAUL, J.: Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik (Schriftenr. ZIMM Akad. Wiss. DDR: H. 24). Berlin: Akademie-Verlag 1976.

Manuskripteingang: 20. 03. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. LOTHAR JENTSCH
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Str. 39–41