Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (5) 1985, S. 467–477

Singuläre Störung von Randwertproblemen durch ein kleines Loch im Gebiet

D. Göhde

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

An einigen Standardfällen wird gezeigt, daß die Störung eines Randwertproblems durch ein kleines Loch im Gebiet singuläre Störeffekte bewirkt. Die Grenzschichtfunktionen lassen sich in erster Näherung aus den Grundlösungen konstruieren.

Некоторыми стандартными случаями показывается, что возмущение краевой задачи малым отверстием в области вызывает сингулярное вырождение. Функции пограничного слоя по первому приближению можно конструировать из основных решений.

By some standard cases it is shown that perturbing a boundary value problem by a small hole in the domain leads to singular perturbation effects. The boundary layers will be constructed, in primary approximation, by means of the fundamental solutions.

Von einem Parameter ε abhängige Differentialgleichungsprobleme heißen singulär gestört, wenn sie für einen gewissen Parameterbereich mit Ausnahme eines Häufungspunktes — üblicherweise als $\varepsilon = 0$ angenommen — sachgemäß gestellt sind, nicht aber das durch Nullsetzen von ε entstehende ausgeartete Problem. Man spricht von regulärer Ausartung, wenn die Lösungen für $\varepsilon \to 0$ wenigstens in Teilgebieten G_ε des Definitionsgebietes G gleichmäßig gegen die Lösung eines geeignet zu wählenden reduzierten Problems konvergieren, wobei noch das Maß der Ausnahmemenge $G \setminus G_\varepsilon$ mit ε gegen 0 geht. Der am frühesten untersuchte typische Fall ist der, daß die höchsten Ableitungen in der Differentialgleichung mit dem Parameter ε als Faktor versehen sind, wodurch für $\varepsilon = 0$ eine Ordnungserniedrigung und damit eine Überbestimmtheit in den Nebenbedingungen eintritt. Bezüglich solcher und einer großen Zahl anderer Arten singulärer Störungen sei z. B. auf die Monographie von Lions [8] verwiesen.

Wir befassen uns hier mit einer neueren Problemstellung, die anscheinend erstmals explizit von Il'in (insbes. [3–5]), in einer Variante wieder neulich von Mazja, Nasarov und Plamenevski [11] aufgegriffen wurde und in die umfangreiche Literatur über die „klassischen" singulären Störprobleme im obigen allgemeinen Sinn einzuordnen ist: Zu untersuchen ist der Einfluß eines kleinen Loches (mit zusätzlichen Randbedingungen) im Definitionsgebiet G eines elliptischen Randwertproblems auf die Lösung dieses Problems im unverletzten Gebiet. Es erweist sich nämlich, daß der Radius ε des der Einfachheit halber kugelförmig gedachten Loches die Rolle eines singulären Störparameters beim Übergang $\varepsilon \to 0$ spielt.

Die hier angeführten Beispiele sollen eine gewisse Übersicht über die Art der eintretenden Effekte in einigen Standardsituationen geben. Um hierbei störenden technischen Aufwand zu vermeiden, beschränken wir uns im allgemeinen auf die — praktisch wohl meist ausreichenden — ersten Approximationen; die Konstruktion höherer Stufen liegt dann ziemlich auf der Hand. Ein Teil der Aufgaben ist schon von Il'in bei etwas anderem Vorgehen behandelt worden, und unsere Ergebnisse sind dann natürlich in seinen enthalten, wenn auch bei der relativen Kompliziertheit seiner Entwicklungen vielleicht nicht auf den ersten Blick zu sehen. Bezüglich anderer kleiner Gebietsdefekte sei z. B. auf [6, 10], in etwas anderem Rahmen auch auf [12] sowie die Literatur über die Homogenisierung bei periodischen Gebietsirregularitäten (z. B. [7]) verwiesen.

*Problemstellungen **I** und **II***

G sei ein beschränktes dreidimensionales Gebiet mit genügend glattem Rand ∂G, das den Koordinatenursprung o im Innern enthält. $w(x) = w(x_1, x_2, x_3)$ sei die Lösung des ungestörten (reduzierten oder globalen) Problems

$$\begin{aligned} G&: \Delta w = h \\ \partial G&: \quad w = g, \end{aligned} \tag{0}$$

wobei Δ der dreidimensionale Laplace-Operator ist und g, h hinreichend reguläre Funktionen sind. K_ε sei die Kugel mit Radius ε um o, $G_\varepsilon = G \setminus \bar{K}_\varepsilon$ das Gebiet mit kleinem Loch. $u = u_\varepsilon$ sei die Lösung des gestörten Problems

$$\mathbf{I} \qquad \begin{aligned} G_\varepsilon&: \Delta u = h \\ \partial G&: \quad u = g \\ \partial K_\varepsilon&: \quad u = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

bzw.

$$\mathbf{II} \qquad \begin{aligned} G_\varepsilon&: \Delta u = h \\ \partial G&: \quad u = g \\ \partial K_\varepsilon&: \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Hierbei ist $r = |x|$ der Abstand des Punktes x vom Ursprung (Lochmittelpunkt) o, $\partial u/\partial r$ also die Normalableitung auf der Kugeloberfläche ∂K_ε.

Im allgemeinen wird w die Zusatzbedingungen auf ∂K_ε nicht erfüllen; diese laufen im Grenzfall $\varepsilon = 0$ auf die zusätzliche Forderung einer Nullstelle bzw. einer stationären Stelle im Gebietsinnern hinaus. Es sind daher zumindest lokale Korrekturen anzubringen.

*Zum Problem **I***

Der Ansatz

$$\begin{aligned} u = u_\varepsilon = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots + \varepsilon^m w_m \\ + v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^{m-1} v_{m-1} + \varepsilon^m v_m + \varepsilon^{m+1} z \end{aligned} \tag{3}$$

mit $w_0 = w$, der Lösung des ungestörten Problems (0), stellt die Lösung des Problems (1) dar, wenn folgende Teilprobleme gelöst werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \setminus K_\varepsilon&: \quad \Delta v_i = 0 \\ \partial K_\varepsilon&: \quad v_i = -w_i \\ v_i(\infty) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, \ldots, m), \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} G&: \Delta w_i = 0 \\ \partial G&: \quad w_i = -\frac{1}{\varepsilon}\, v_{i-1} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} G_\varepsilon&: \Delta z = 0 \\ \partial G&: \quad z = -\frac{1}{\varepsilon}\, v_m \\ \partial K_\varepsilon&: \quad z = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

wie man beim Vergleich der ε-Potenzen sofort feststellt.

Die Konstruktion der Kompensationsfunktionen v_i kann hier direkt mit Hilfe der Kelvin-Transformation bezüglich der Kugel K_ε erfolgen:

Für v_0 wird zunächst eine Hilfsfunktion $\overline{w}_0$ in K_ε als Lösung von

$$\begin{aligned} K_\varepsilon&: \Delta \overline{w}_0 = 0 \\ \partial K_\varepsilon&: \quad \overline{w}_0 = w_0 \quad (= w) \end{aligned} \tag{7}$$

bereitgestellt;

$$v_0(x) := -\frac{\varepsilon}{r}\, \overline{w}_0\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}\, x\right) \tag{8}$$

hat dann die gewünschten Eigenschaften. Für $i \geqq 1$ kann einfach

$$v_i(x) := -\frac{\varepsilon}{r}\, w_i\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}\, x\right) \tag{9}$$

gesetzt werden, wonach alle v_i und w_i abwechselnd zu ermitteln sind.

Für das Restglied gilt zunächst

$$|z(x)| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\partial G} |v_m|$$

nach dem Maximumprinzip. Verfolgt man jedoch die Konstruktionskette (4), (5) hinsichtlich dieses Prinzips, so findet man für $i \geqq 1$

$$\sup_{\partial G} |v_i| \leqq \frac{\varepsilon}{r_0} \sup_{G} |w_i| \leqq \frac{\varepsilon}{r_0} \sup_{\partial G} |w_i| \leqq \frac{1}{r_0} \sup_{\partial G} |v_{i-1}|$$

mit $r_0 = \inf_{\partial G} r$, und wegen $\sup_{\partial G} |v_0| \leqq \frac{\varepsilon}{r_0} \sup_{G} |w_0|$ schließlich die a-priori-Abschätzung

$$|z(x)| \leqq \frac{1}{r_0^{\,m+1}} \sup_{G} |w|$$

— allein durch die Lösung des ungestörten Problems!

Satz 1: *Die Lösung des ungestörten Problems I besitzt die asymptotische Darstellung*

$$u_\varepsilon(x) = w_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i(x) + \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i v_i(x) + \varepsilon^{m+1} z(x)$$

mit der Lösung $w_0 = w$ des ungestörten Problems (0) *und den durch* (7—9) *gegebenen Funktionen w_i und v_i; z ist in G_ε (unabhängig von ε) gleichmäßig beschränkt.*

Die $\varepsilon^i v_i$ sind *Grenzschichtfunktionen* mindestens i-ter Ordnung in der Umgebung des Lochrandes: Sie konvergieren in jedem festen Teilgebiet G_{ε_0} samt allen Ableitungen für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen 0; im ganzen Gebiet G_ε bleiben sie und alle ihre Ableitungen bis zur i-ten Ordnung beschränkt, die Ableitungen höherer Ordnung jedoch im allgemeinen nicht.

Offenbar ist z. B.

$$v_0(x) = -\varepsilon w(o)\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r}o(\varepsilon) \approx c\cdot\frac{1}{r}, \tag{10}$$

also im wesentlichen die Grundlösung. Gegenüber den üblichen Randschichten zur Kompensation nicht angenommener Randwerte, die exponentiell zum Gebietsinnern hin abfallen, weisen diese nur eine Abnahme von Potenzcharakter auf; der Einflußbereich einer „Lochstörung" ist verhältnismäßig groß. Übrigens traten solche schwach abfallenden Grenzschichten schon bei der Untersuchung von singulär gestörten,singulären gewöhnlichen Differentialoperatoren auf [9], und es gibt auch einen einfachen Zusammenhang mit unserem Problem [2].

*Zum Problem **II***

Hier ist als Ausgangspunkt für eine asymptotische Darstellung die Taylorentwicklung von w in $x = o$

$$w(x) = w(o) + w_i x_i + \frac{1}{2!}w_{ij}x_i x_j + \frac{1}{3!}w_{ijk}x_i x_j x_k + R$$

mit Restglied R vierter Ordnung zweckmäßig; es wurde hier $w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}(o)$ gesetzt und die Summierungskonvention benutzt.

Ein homogenes Polynom m-ten Grades $p_m(x)$ geht durch Kelvin-Spiegelung an ∂K_ε im $\mathbf{R}^3$ und Multiplikation mit ε/r in

$$\overline{p}_m(x) = \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{2m+1} p_m(x)$$

über, und es gilt für $m \geqq 1$

$$\frac{\partial\overline{p}_m(x)}{\partial r} = -\frac{m+1}{m}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{2m+1}\frac{\partial p_m(x)}{\partial r},$$

so daß sich in Anwendung auf die Polynome p_m der obigen Taylorentwicklung ($m = 1, 2, 3$) aus dem Ansatz

$$v_0(x) = \sum_{m=1}^{3}\frac{m}{m+1}\overline{p}_m(x)$$

auf ∂K_ε

$$\frac{\partial v_0(x)}{\partial r} = -\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{2m+1}\frac{\partial p_m(x)}{\partial r} = \frac{-\partial w(x)}{\partial r} + \frac{\partial R(x)}{\partial r}$$

ergibt. Ferner hat man nach dem bekannten Verhalten des Laplaceoperators Δ bei Kelvin-Spiegelung an ∂K_ε

$$\Delta v_0(x) = \sum_{m=1}^{3}\frac{m}{m+1}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^5 \Delta' p_m(x') \quad \text{mit} \quad x' = \frac{\varepsilon^2}{r^2}x$$

(Δ' Laplaceoperator bezüglich der Variablen x'), demnach

$$\Delta v_0(x) = \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\,\Delta w(o) + \frac{3}{4}\,x_k'\,\Delta w_{x_k}(o)\right)$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\,h(o) + \frac{3}{4}\,x' \cdot \operatorname{grad} h(o)\right).$$

Für das Restglied z in $u = w + v_0 + z$ gilt dann

$$G_\varepsilon\colon\ \Delta z = -\Delta v_0 = -\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\,h(o) + \frac{3}{4}\,x' \cdot \operatorname{grad} h(o)\right)$$
$$\partial G\colon\quad z = -v_0 = \varepsilon^3 \Phi(x)$$
$$\partial K_\varepsilon\colon \frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial r} = \varepsilon^3 \Psi(x)$$

mit beschränkten Funktionen Φ, Ψ.

Zur Majorisierung von $|z|$ wird angesetzt

$$Z = -\frac{H}{6}\,\frac{\varepsilon^5}{r^3} + \frac{H}{2}\,\frac{\varepsilon^3}{r} + M\,\frac{\varepsilon^5}{r}$$

mit

$$H = \frac{2}{3}\,|h(o)| + \frac{3}{4}\,\varepsilon_0\,|\operatorname{grad} h(o)|, \qquad M = 1 + \sup_{K_\varepsilon} |\psi|.$$

Z erfüllt

$$G_\varepsilon\colon\ \Delta Z = -H\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^5$$
$$\partial K_\varepsilon\colon\ \frac{\partial Z}{\partial r} = -\varepsilon^3 M,$$

und daraus folgt nach dem Maximumprinzip, daß die Funktionen $\pm z - Z$ ihre größten Werte auf dem Rand von G_ε annehmen müssen, nicht jedoch auf dem Randteil ∂K_ε, da dort ihre radialen Ableitungen positiv sind. Also ist in G_ε (nach Zusammenziehen von Konstanten bzw. Ersetzen von Termen durch Schranken)

$$|z(x)| \leqq Z(x) + \sup_{\partial G}\,(|z| - Z) \leqq C \cdot H\varepsilon^2 \cdot \frac{\varepsilon}{r}.$$

Schlägt man nun noch den letzten Summanden ($m = 3$) in v_0 mit zu z, so ergibt sich

Satz 2: *Die Lösung $u = u_\varepsilon$ des Problems II* (2) *besitzt in G_ε die asymptotische Darstellung*

$$u_\varepsilon(x) = w(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^3 x_i\,\frac{\partial w}{\partial x_i}(o) + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^5 \frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}(o)\,x_i x_j + \varepsilon^2 z_\varepsilon$$

mit

$$|z_\varepsilon(x)| \leqq C \cdot H \cdot \frac{\varepsilon}{r} \quad (r \geqq \varepsilon);$$

wenn $h(o) = 0$ ist, kann hierin $H = \varepsilon H'$ gesetzt werden. w ist die Lösung des ungestörten Problems (0), *für C, H bzw. H' können von ε unabhängige Konstanten gewählt werden.*

Um an einem Beispiel zu zeigen, daß die Art der Kompensation des Locheinflusses durch v wesentlich vom Hauptteil des Operators abhängt, betrachten wir neben (1)

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &: \quad -\Delta u + cu = h \\ \partial G &: \qquad\qquad u = g \\ \partial K_\varepsilon &: \qquad\qquad u = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

mit $c = c(x) \geqq 0$, G und K_ε wie oben. Ausgehend von der Lösung w des ungestörten Problems

$$\begin{aligned} G &: \quad -\Delta w + cw = h \\ \partial G &: \qquad\qquad w = g \end{aligned} \tag{12}$$

setzen wir (gegenüber I vereinfachend) $u = u_\varepsilon = w + v + \varepsilon z$ an und wählen nach dem Vorbild (10) $v(x) = -\dfrac{\varepsilon}{r}\, w(o)$. Für z ergibt sich

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &: \quad -\Delta z + cz = \frac{c}{r}\, w(o) \\ \partial G &: \qquad\qquad z = \frac{w(o)}{r} \\ \partial K_\varepsilon &: \qquad\qquad z = -\frac{w(x) - w(o)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Als einfache Majorante für $|z|$ bietet sich $Z = \dfrac{M}{2}\,(R_0 - r)$ an mit

$$M = \max\left\{w(o)\left(\sup_G c(x) + \frac{2}{r_0}\right),\quad 2\sup_{K_\varepsilon}\left|\frac{w(x) - w(o)}{\varepsilon}\right|\right\},$$

$$r_0 = \inf_{\partial G} r, \qquad R_0 = 1 + \sup_G r.$$

Es gilt dann nämlich

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &: \quad -\Delta Z + cZ = \frac{M}{r} + c\,\frac{M}{2}\,(R_0 - r) \geqq \frac{M}{r} \geqq |-\Delta z + cz| \\ \partial G &: \qquad z(x) = \frac{w(o)}{r} \leqq \frac{|w(o)|}{r_0} \leqq Z(x) \\ \partial K_\varepsilon &: \qquad z(x) = \frac{|w(x) - w(o)|}{\varepsilon} \leqq Z(x), \end{aligned}$$

so daß nach der Majorisierungsvariante des Maximumprinzips sofort — unabhängig von ε —

$$|z(x)| \leqq Z(x) \leqq \frac{MR_0}{2}$$

in G_ε folgt. Daher haben wir in erster Näherung wie beim Problem I

Satz 3: *Die Lösung* $u = u_\varepsilon$ *des Problems* (11) *hat die asymptotische Darstellung*

$$u_\varepsilon(x) = w(x) - \frac{\varepsilon}{r}\, w(o) + \varepsilon z(x),$$

z unabhängig von ε beschränkt in G_ε.

Während bei den bisherigen Fällen (asymptotisch) nur eine lokale Abweichung von der Lösung des ungestörten Problems zu beobachten war, soll noch ein andersartiges Beispiel angegeben werden, bei dem die durch ein Loch bewirkte Störung zu nicht regulärer Ausartung im Sinne der singulären Störungstheorie führt. Il'in [5] behandelte einen solchen Fall für die erste bzw. dritte Randwertaufgabe, und in [11] wird allgemeiner das entsprechende Eigenwertproblem betrachtet.

Wir untersuchen das durch ein kleines Loch K_ε gestörte Neumannsche Problem

$$\begin{aligned} G_\varepsilon&: \Delta u = h \\ \partial G&: \frac{\partial u}{\partial n} = g \\ \partial K_\varepsilon&: u = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

(n äußere Normiale). Weglassen der Bedingung auf ∂K_ε führt hier zu einem unlösbaren Problem, sobald

$$4\pi H := \iiint_G h(x)\, dx - \oiint_{\partial G} g(x)\, ds \neq 0 \tag{14}$$

ist, was jetzt angenommen werde. Wir definieren daher ein lösbares reduziertes Problem durch Hinzufügen einer Quelle:

$$\begin{aligned} G&: \Delta w = h \\ \partial G&: \frac{\partial w}{\partial n} = g + \frac{\partial v}{\partial n} \\ &\quad w(o) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

mit

$$v = -\frac{H}{r}. \tag{15'}$$

Wegen

$$4\pi H = \oiint_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial r}\, ds = \oiint_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds$$

und der Normierungsbedingung ist (15) eindeutig lösbar. Setzen wir wieder $u = u_\varepsilon = w - v + z$, so findet sich

$$\begin{aligned} G_\varepsilon&: \Delta z = 0 \\ \partial G&: \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \\ \partial K_\varepsilon&: z = -w(x) + v(x). \end{aligned}$$

Nun ist auf ∂K_ε wegen der Normierungsbedingung $w(x) = \varepsilon \cdot \Phi(x)$, Φ beschränkt, und $v(x) = -H/\varepsilon$. Demnach ist

$$z(x) = -\frac{H}{\varepsilon} + \varepsilon z_0(x)$$

mit beschränktem z_0: Es ist

$$G_\varepsilon\colon \Delta z_0 = 0$$

$$\partial G\colon \frac{\partial z_0}{\partial n} = 0$$

$$\partial K_\varepsilon\colon z_0 = \Phi(x),$$

und Majorante für $|z_0|$ ist die Lösung Z des Dirichletproblems

$$G_\varepsilon\colon \Delta Z = 0$$

$$\partial G\colon \quad Z = 0$$

$$\partial K_\varepsilon\colon \quad Z = \sup_{\partial K_\varepsilon} |\Phi|,$$

denn $Z > 0$ in G_ε und $\partial Z/\partial n < 0$ auf ∂G, so daß das Maximum von $\pm z_0 - Z$ auf ∂K_ε angenommen wird.

Satz 4: *Für die Lösung $u = u_\varepsilon$ des Problems* (13) *gilt*

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{H}{\varepsilon} + \frac{H}{r} + w(x) + \varepsilon z_0(x)$$

mit der Konstanten H aus (14) *und der Lösung w des reduzierten Problems* (15), (15'); *z_0 ist in G_ε beschränkt.*

Schließlich wenden wir uns einem *ebenen* Problem zu, das dem der Durchbiegung einer belasteten, am Rand gestützten Platte mit kleinem Loch entspricht. Zuvor ist jedoch als Hilfsbetrachtung die Lösung des ebenen Analogons von Problem **I** zu entwickeln. G ist jetzt ein beschränktes, genügend glatt berandetes ebenes Gebiet, das den Ursprung o des benutzten Koordinatensystems enthält, und K_ε der offene ε-Kreis um o. Wir betrachten

$$\begin{aligned} G_\varepsilon\colon \Delta u &= h \\ \partial G\colon \quad u &= g \\ \partial K_\varepsilon\colon \quad u &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

und vergleichen mit dem reduzierten Problem

$$\begin{aligned} G\colon \Delta w &= 0 \\ \partial G\colon \quad w &= g. \end{aligned} \tag{17}$$

Satz 5: *Für die Lösung $u = u_\varepsilon$ von* (16) *gilt*

$$u_\varepsilon(x) = w_0(x) + \eta w_1(x) + v_0(x) + \eta v_1(x) + \eta^2 z(x)$$

mit

$$\eta = \frac{-1}{\ln \varepsilon},$$

$$w_0(x) = w(x) \quad \textit{nach } (17),$$

$$w_1(x) \quad \textit{Lösung von} \quad G\colon \Delta w_1 = 0, \qquad \partial G\colon w_1 = -w_0(o) \ln r,$$

$$v_0(x) = w_0(o)\, \eta \ln r,$$

$$v_1(x) = w_1(o)\, \eta \ln r,$$

und z ist in G_ε beschränkt.

Man bestätigt dies leicht, wenn man die Randbedingungen für die Potentialfunktion z aufstellt und unter Berücksichtigung von $|w_i(x) - w_i(o)| \leqq C\varepsilon$ für $x \in \partial K_\varepsilon$ das Maximumprinzip anwendet ∎

Nun gehen wir zur angekündigten Problemstellung über:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &: \Delta\Delta u + f = 0 \\ \partial G &: u = g,\ \Delta u = h \\ \partial K_\varepsilon &: u = 0,\ \Delta u = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

mit dem reduzierten Problem

$$\begin{aligned} G &: \Delta\Delta w + f = 0 \\ \partial G &: w = g,\ \Delta w = h. \end{aligned} \tag{19}$$

Zur Kompensation der Werte von w bzw. Δw auf ∂K_ε benötigt man auch bei erster Näherung zwei Funktionen v_1, v_2:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &: \Delta v_1 = 0 \\ \partial G &: \quad v_1 = 0 \\ \partial K_\varepsilon &: \quad v_1 = -w(o) \end{aligned} \tag{20}$$

und

$$v_2(x) = \frac{-\Delta w(o)}{4 \ln \varepsilon}\, r^2(\ln r - 1), \tag{21}$$

eine Bipotentialfunktion mit $\Delta v_2 = -\Delta w(o) \ln r/\ln \varepsilon$, also $\Delta v_2 = -\Delta w(o)$ auf ∂K_ε. Danach hat man zunächst für z_1 im Ansatz

$$u = w + v_1 + v_2 - \frac{1}{\ln \varepsilon}\, z_1 \tag{22}$$

das folgende Problem:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &: \Delta\Delta z_1 = 0, \\ \partial G &: z_1 = -\frac{\Delta w(o)}{4}\, r^2(\ln r - 1), \\ &\quad \Delta z_1 = -\Delta w(o) \ln r, \\ \partial K_\varepsilon &: z_1 = -\ln \varepsilon\big(w(o) - w(x)\big) - \frac{\Delta w(o)}{4}\, \varepsilon^2(\ln \varepsilon - 1) \\ &\quad =: D_1(x)\, \varepsilon \ln \varepsilon, \\ &\quad \Delta z_1 = -\ln \varepsilon\big(\Delta w(o) - \Delta w(x)\big) =: D_1'(x)\, \varepsilon \ln \varepsilon. \end{aligned}$$

Es liegt nahe, das Verfahren für z_1 an Stelle von u zu wiederholen:

$$z_1 = w_1 + v_3 + v_4 - \frac{1}{\ln \varepsilon}\, z_2, \tag{23}$$

wobei w_1 dem reduzierten Problem (19) mit

$$f = 0, \qquad g = -\frac{\Delta w(o)}{4}\, r^2(\ln r - 1), \qquad h = -\Delta w(o) \ln r$$

genügt, und v_3, v_4 sind wie v_1, v_2 in (20), (21) definiert, jedoch mit w_1 statt w. Für z_2 ergibt sich dann

$$G_\varepsilon\colon \Delta\Delta z_2 = 0$$

$$\partial G\colon z_2 = -\frac{\Delta w_1(o)}{4}\, r^2(\ln r - 1)\,, \qquad \Delta z_2 = -\Delta w_1(o) \ln r$$

$$\partial K_\varepsilon\colon z_2 = D_2(x)\, \varepsilon(\ln \varepsilon)^2\,, \qquad \Delta z_2 = D_2'(x)\, \varepsilon(\ln \varepsilon)^2$$

mit analog D_1, D_1' gebildeten beschränkten Funktionen D_2, D_2'.

Wir wollen die Prozedur nicht fortsetzen, sondern zeigen, daß z_2 in G_ε beschränkt bleibt für $\varepsilon \to 0$. Die Funktion $p = \Delta z_2$ genügt

$$G_\varepsilon\colon p = 0$$

$$\partial G\colon p = -\Delta w_1(o) \ln r$$

$$\partial K_\varepsilon\colon p = D_2'(x)\, \varepsilon(\ln \varepsilon)^2$$

und ist daher beschränkt: $|p| \leqq C_0$. Dasselbe gilt deshalb auch für z_2 wegen

$$G_\varepsilon\colon \Delta z_2 = p$$

$$\partial G\colon\ z_2 = \frac{-\Delta w_1(o)}{4}\, r^2(\ln r - 1)$$

$$\partial K_\varepsilon\colon\ z_2 = D_2(x)\, \varepsilon(\ln \varepsilon)^2$$

— z. B. ist $Z = C_1 - \frac{1}{4} C_0 r^2$ bei genügend großer Konstante C_1 eine absolute Majorante.

Endlich sind in die erhaltene Darstellung (22), (23)

$$u = w + \eta w_1 + v_1 + v_2 + \eta(v_3 + v_4) + \eta^2 z_2$$

für v_1 und v_3 die entsprechenden Entwicklungen gemäß Satz 5 einzusetzen, denn $v_1 + w(o)$ bzw. $v_3 + w_1(o)$ sind Lösungen von (16) mit den Konstanten $w(o)$ bzw. $w_1(o)$ als Randwerte g und $h = 0$. Damit haben wir

Satz 6: *Die Lösung $u = u_\varepsilon$ des Problems* (18) *hat die asymptotische Darstellung*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) = w_0(x) &+ \eta w_1(x) + \eta\big(w_0(o) + \eta w_1(o)\big) \ln r \\ &+ \eta w_2(x) + \eta\big(w_2(o) + \eta w_3(o)\big) \ln r \\ &+ \eta \frac{\Delta w_0(o)}{4}\, r^2(\ln r - 1) + \eta^2 z \end{aligned}$$

mit beschränkten z und Δz, $\eta = -(\ln \varepsilon)^{-1}$, $w_0 = w$ die Lösung des reduzierten Problems (19), *w_1 die eines Problems gleicher Art und w_2, w_3 Lösungen von*

$$G\colon \Delta w_i = 0$$

$$\partial G\colon\ w_i = -w_{i-2}(o) \ln r\,.$$

Schlußbemerkung zur numerischen Auswertung

Wie die Lösungsdarstellungen in den angeführten Fällen zeigen, ist — wenigstens in erster Approximationsstufe — neben der Lösung des ungestörten Problems im allgemeinen als Korrektur lediglich die (mit geeignetem Faktor versehene) Grundlösung nötig. In den behandelten einfachen Fällen konnte sie ohne weiteres explizit angegeben werden. Statt der Grundlösung hätte man selbstverständlich auch die Greensche Funktion benutzen können, was aber hier rechnerisch höchstens Nachteile eingebracht hätte. Bei der Ausdehnung auf allgemeinere Probleme jedoch, insbesondere auf Systeme, dürfte die Benutzung eines auf einer Idee von Trefftz beruhenden, von BECKERT [1] ausgearbeiteten Verfahrens zur punktweisen Berechnung der Ritz-Approximationen über Minimalwerte von Nebenproblemen zum der Aufgabe entsprechenden Variationsproblem von nicht geringem numerischen Interesse sein. Dieses Verfahren liefert sowohl die Lösung des reduzierten Problems als auch die Greensche Funktion bzw. den Greenschen Tensor zum gleichen Problem, und genau diese beiden Schritte erfordert die asymptotische Darstellung der Lösung der gestörten Randwertaufgabe.

LITERATUR

[1] BECKERT, H.: Über die Konstruktion Greenscher Tensoren und ihre Bedeutung für die numerische Mathematik. ZAMM **55** (1975), 83–89.

[2] GÖHDE, D.: Singuläre Störungen eines Dirichletproblems durch kleine Löcher im Gebiet. Wiss. Beiträge IH Zwickau **11** (1985) 2.

[3] Ильин, А. М.: Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай. Мат. Сборник **99** (1976). 514–537.

[4] Ильин, А. М.: Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой шелью. 2. Область с малым отверстием. Мат. Сборник **103** (1977), 265–284.

[5] Ильин, А. М.: Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием. Труды Сем. им. Петровского **6** (1981), 57–82.

[6] Ильин, А. М.: Асимптотика решения краевой задачи для уравнения Пуассона вне цилиндра и вне полуцилиндра. Мат. Сборник **118** (1982), 184–202.

[7] Иосифьян, Г. А., Олейник, О. А., и А. С. Шамаев: О сходимости энергии, тензоров напряжений и частот собственных колебаний в задачах усреднения, возникающих в теории упругости. Докл. Акад. Наук СССР **274** (1984), 1329–1333.

[8] LIONS, J. L.: Perturbations singuliéres dans les próblémes aux limites et en contrôle optimal. Lecture Notes Math. **323** (1973).

[9] Ломов, С. А.: Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением. Изв. Акад. Наук СССР **30** (1966), 525–572.

[10] Мазья, В. Г., Назаров, С. А., и Б. А. Пламеневский: Об асимптотике решений задачи Дирихле в трёхмерной области с вырезанным тонким телом. Докл. Акад. Наук СССР **256** (1981), 37–39.

[11] Мазья, В. Г., Назаров, С. А., и Б. А. Пламеневский: Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями. Изв. Акад. Наук СССР **48** (1984), 347–371.

[12] RAUCH, J., and M. TAYLOR: Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. J. Funct. Anal. **18** (1975), 27–59.

Manuskripteingang: 30. 07. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. DIETRICH GÖHDE
Abt. Math.-Naturwiss. der Ingenieurhochschule
DDR-9541 Zwickau, Dr.-Friedrichs-Ring 2a