Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (6) 1985, S. 481–492

Die Cartan-Algebra der äußeren Differentialformen als Supermannigfaltigkeit: Automorphismen, Jordan-Automorphismen und ihre Realisierung als Diffeomorphismen

A. Uhlmann

Herrn Prof. Dr. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

In der Cartan-Algebra der äußeren Differentialformen über einer Mannigfaltigkeit zählen wir konstruktiv alle Automorphismen, alle zerlegenden und alle Funktionenunteralgebren auf. Wir geben ferner eine Klasse von Jordan-Automorphismen an. Die Automorphismen bzw. Jordan-Automorphismen wirken als Diffeomorphismen transitiv auf gefaserten Räumen über der gegebenen Mannigfaltigkeit M. Die Dimensionen dieser Räume sind 15 bzw. 24 falls $\dim M = 3$, und 32 bzw. 64 falls $\dim M = 4$ ist.

В алгебре Картана для внешних дифференциальных форм над многообразием перечисляются конструктивным образом все автоморфизмы, все разлагающие и все функциональные подалгебры. Кроме этого указывается на один класс автоморфизмов Иордана. Автоморфизмы или соответственно автоморфизмы Иордана действуют как диффеоморфизмы транзитивно на расслоенных пространствах над данным многообразием M. В случае $\dim M = 3$ размерность этих пространств 15 и 24, а в случае $\dim M = 4$ — 32 и 64, соответственно.

In the Cartan algebra we constructively enumerate all automorphisms, all splitting and function subalgebras, and a class of Jordan automorphisms. We show representability of the automorphisms resp. Jordan automorphisms as diffeomorphisms on a fibred space over the given manifold M. Its dimensionality is 15 resp. 24 if $\dim M = 3$, and 32 resp. 64 if $\dim M = 4$.

0. Einleitung

Im Folgenden wollen wir die Algebra $\underline{A}$ der glatten äußeren Cartanschen Differentialform über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M als Beispiel für eine glatte Supermannigfaltigkeit betrachten. („Algebra" bedeutet hier: Ring über den reellen Zahlen, „glatt" heißt von der Klasse $C^{(\infty)}$.) Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht im Folgenden: Wir ‚vergessen' die Herkunft der Algebra $\underline{A}$ und betrachten nur ihre algebraische Struktur, d. h. die Art und Weise, wie man in ihr addiert und multipliziert. Eigenschaften der durch $\underline{A}$ definierten „Supermannigfaltigkeit" sind also Operationen, Mengen usw. in $\underline{A}$, die nicht von einer konkreten Realisierung (z. B. als Differentialformen auf M) abhängen. Ein solches Vorgehen ist im vorliegenden Fall äquivalent zu den sonst üblichen Verfahren [2, 4, 5]. Es schließt außerdem an die bekannte Tatsache an, daß man aus der Kenntnis der Algebra $C^{(\infty)}(M)$ aller auf einer glatten Mannigfaltigkeit definierten glatten Funktionen die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphismen rekonstruieren kann. An die Stelle der Algebra $C^{(\infty)}(M)$, die M kennzeichnet, setzen wir also die Algebra $\underline{A}$ der glatten äußeren Differentialformen, die auf M definiert sind und fragen nach Eigenschaften, die in jeder zu A isomorphen Algebra aufzufinden sind.

Aus diesem umfangreichen Programm wählen wir hier zwei Probleme aus: Die Gestalt der Automorphismen und der Jordan-Automorphismen. Außerdem deuten wir an, wie diese Morphismen als Diffeomorphismen auf über M liegenden gefaserten

Räumen realisiert werden können. Die Jordan-Automorphismen kommen übrigens ganz zwangsläufig ins Spiel. Heuristisch gesehen liegt dies nahe, denn in einem gewissen Sinne ist $\underline{A}$ nur ‚wenig vom Kommutativen abweichend'. Für kommutative Algebren aber sind Jordan-Automorphismen und Automorphismen nichts Verschiedenes.

Nun sei noch kurz kommentiert, wie sich das von uns gewählte Beispiel der Algebra der glatten Cartanschen Differentialformen von einer allgemeinen, mittels einer Garbe Φ definierten Supermannigfaltigkeit im Hinblick auf die genannten Morphismen unterscheidet. Die Erweiterung der Diffeomorphismengruppe der Basismannigfaltigkeit M besteht dann aus Morphismen, die in den Halmen über den Punkten von M operieren. Lokal sind die Halme Φ_p von Φ Algebren, die Graßmann-Erweiterungen von kommutativen Algebren $\underline{F}_p$ ($p \in M$) sind, deren Radikal trivial ist. Mit naheliegenden Modifikationen gestattet es die vorzustellende Methode, die Konstruktion der in Φ_p operierenden Jordan-Automorphismen und Automorphismen auf die Bestimmung der Ableitungen (Derivationen) von $\underline{F}_p$ zurückzuführen. Der eigentliche Vorteil, den die Cartan-Algebra der glatten Differentiale vor allgemeineren Situationen bietet, besteht in der durchsichtigen Weise des Zusammenklebens der lokalen zu den globalen Morphismen.

Das Studium der geometrischen Objekte, die lokal als Graßmann-Algebren mit Koeffizienten aus gegebenen Algebren realisiert werden können, wurde in den letzten ein bis zwei Jahrzehnten besonders durch physikalische Interessen angeregt. Diese entstammen sowohl der zweiten Quantisierung von Fermisystemen als auch Versuchen, Fermionen und Bosonen einer gemeinsamen Symmetrie zu unterwerfen, eben der „Supersymmetrie" [1, 3, 8, 9]. Um auf einer Supermannigfaltigkeit allerdings Physik treiben zu können, muß man auf ihr Feldgrößen, Lagrange-Funktionen usw. konstruieren — genau so wie auf einer Mannigfaltigkeit Physik erst mit Hilfe weiterer geometrischer u. a. Objekte getrieben werden kann. Diese Fragen werden wir hier jedoch nicht berühren.

Die Anregung, als Beispiel für eine glatte Supermannigfaltigkeit die Cartan-Algebra zu betrachten, verdanke ich A. Trautmann, der in einer Vorlesung [6] die zugehörende Super-Lie-Algebra mit Hilfe der Nijenhuis-Ableitungen elegant charakterisierte. Die Bestimmung der Automorphismen der Algebren, die aus $C^{(\infty)}(M)$ durch Adjunktion von Graßmann-Variablen entstehen, findet man in [7].

1. Einige elementare Eigenschaften

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\underline{A}$ die Algebra der reellen Cartanschen Differentialformen der Klasse $C^{(\infty)}$. Jedes Element $a \in \underline{A}$ besitzt genau eine Darstellung

$$a = a_{(0)} + a_{(1)} + \cdots + a_{(m)} \quad \text{mit} \quad m = \dim M, \tag{1.1}$$

wobei $a_{(k)}$ eine auf ganz M definierte glatte k-Form ist, die die k-te Komponente von a genannt wird. Bei diesem Sprachgebrauch werden die reellen glatten Funktionen als (glatte) 0-*Formen* bezeichnet.

Das Element a in (1.1) ist genau dann nilpotent, wenn $a_{(0)}$ die Null ist. Die nilpotenten Elemente bilden ein Ideal, das wir mit $\underline{S}$ bezeichnen wollen:

$$\underline{S} = \{a \in \underline{A} : a_{(0)} = 0\}. \tag{1.2}$$

Die j-te Potenz $\underline{S}^j$ von $\underline{S}$ besteht aus allen Elementen (1.1), deren homogene Komponenten $\hat{A}_{(k)}$ für $k < j$ gleich der Null sind. Ist $j > m$, so besteht $\underline{S}^j$ nur aus der Null von $\underline{A}$. Das Ideal $\underline{S}$ ist das Radiakal von $\underline{A}$, d. h., es ist der Durchschnitt aller maximalen Ideale. Ist $p \in M$ ein Punkt so ist,

$$\underline{I}_p = \{a \in \underline{A} : a_{(0)}(p) = 0\} \tag{1.3}$$

ein maximales Ideal. Ein so gewinnbares Ideal heißt auch *Punktideal*. Man weiß, daß ein maximales Ideal genau dann von der Gestalt (1.3) und daher ein Punktideal ist, wenn es endliche Kodimension besitzt. Genau dann ist jedes maximale Ideal von endlicher Kodimension und daher Punktideal, wenn M kompakt ist. Offenbar ist $\underline{S}$ auch als Durchschnitt aller Punktideale gewinnbar.

Ein Automorphismus w von $\underline{A}$ heißt *Superstruktur*, wenn gilt:

a) w^2 ist der identische Automorphismus.
b) Ist $w(a) = a$, so liegt a im Zentrum von $\underline{A}$.
c) Ist $w(a) = -a$, so gilt $a^2 = 0$.

Superstrukturen sind also spezielle Spiegelungen an zentralen Elementen. Gemäß der jetzt üblichen Terminologie wird ein Paar $\{\underline{A}, w\}$ eine *superkommutative Algebra* genannt. Eine wichtige Superstruktur w_0 ist in $\underline{A}$ gegeben durch

$$w_0(\sum a_{(j)}) = \sum (-1)^j a_{(j)}, \tag{1.4}$$

wobei $a_{(j)}$ die j-te homogene Komponente eines allgemeinen Elements bezeichnet.

Ist w eine Superstruktur von $\underline{A}$, so heißt ein Element a *w-gerade* bzw. *w-ungerade*, wenn $w(a) = a$ bzw. $w(a) = -a$ ist. Eine lineare Abbildung T von $\underline{A}$ in $\underline{A}$ nennt man *w-gerade*, wenn $Tw = wT$ ist. Analog ist eine *w-ungerade* Abbildung durch $wT + Tw = 0$ gekennzeichnet. Eine Abbildung T wollen wir *w-invers* nennen, wenn $TwTw = id$ ist. Jede w-inverse Abbildung ist umkehrbar und es gilt $T^{-1} = wTw$. Für w_0-gerade und w_0-ungerade sagen wir wie üblich einfach *gerade* bzw. *ungerade*.

Sei $\underline{A}_{(k)}$ die Menge der k-Formen aus $\underline{A}$. Es ist $\underline{A}_{(0)}$ die Algebra der auf M glatten Funktionen, d. i. $C^{(\infty)}(M)$. Es ist

$$\underline{A} = \underline{A}_{(0)} + \underline{S}, \qquad \underline{A}_{(0)} \cap \underline{S} = 0. \tag{1.5}$$

Wir rekapitulieren kurz, wie man alle Automorphismen T von $\underline{A}$ mit der Eigenschaft

$$T(ga) = gT(a) \quad \text{für alle} \quad g \in \underline{A}_{(0)} \quad \text{und} \quad a \in \underline{A} \tag{1.6}$$

bestimmt. Sei $p \in M$. Nach (1.6) läßt T die Menge aller $g \in \underline{A}_{(0)}$ elementweise fest. Sei $\underline{J}_p$ das von diesen g mit $g(p) = 0$ in $\underline{A}$ erzeugte Ideal. Es ist $T(\underline{J}_p) = \underline{J}_p$ und T induziert folglich einen Automorphismus in $\underline{A}/\underline{J}_p$, der T_p genannt werde. Die Faktoralgebra ist aber eine (reelle und unitale) Graßmann-Algebra mit $m = \dim M$ Erzeugenden und deren Automorphismen sind bekannt [2]: Sei $\{U, x_1, \ldots, x_m\}$ eine Karte von M mit $p \in U$. T_p bewirkt dann die Ersetzung von $dx_j + \underline{J}_p$ durch $b_{j,p}(1 + 2c_p) + \underline{J}_p$. Hierbei sind $b_{1,p}, \ldots, b_{m,p}, c_p$ ungerade Elemente von $\underline{A}$ mit $b_{1,p}b_{2,p} \ldots b_{m,p} \not\subset \underline{J}_p$. Jede solche Ersetzung charakterisiert umgekehrt mod $\underline{J}_p$ genau einen Automorphismus von $\underline{A}/\underline{J}_p$, wenn als zusätzliche Normierung das Verschwinden der m-ten homogenen Komponente von c gefordert wird. Diese mod $\underline{J}_p$ eindeutig bestimmten Elemente von $\underline{A}$ schließen sich zu eindeutig bestimmten glatten Differentialen

$$\underline{b}^j : p \to b_{j,p} + \underline{J}_p \quad \text{und} \quad c : p \to c_p + \underline{J}_p \quad \text{auf } U \tag{1.7}$$

zusammen. Die b^j transformieren sich bei Koordinatenwechsel so wie die dx_j, während c ein Element aus $\underline{A}$ ist.

Lemma 1.1: *Sei T ein Automorphismus von $\underline{A}$, der die Bedingung (1.6) erfüllt. Dann gibt es genau ein ungerades Vektordifferential $\vec{b}$ und ein ungerades Element c mit $c_{(m)} = 0$ wie folgt. Bezüglich jeder Karte $\{U, x_1, \ldots, x_m\}$ ist die Beschränkung von*

$T(a)$ auf U durch die Substitution $dx^j \to b^j(1 + 2c)$ in der Beschränkung von a auf U bestimmt. Dabei bezeichnen $b^1, \ldots, b^m$ die Komponenten von $\vec{b}$ bezüglich der gewählten Karte. Im Gültigkeitsbereich der Karte darf $b^1 b^2, \ldots, b^m$ nicht Null werden.

Korollar 1.2: *Die Menge der Automorphismen, die (1.6) erfüllen, wird gemäß Lemma 1 in eineindeutiger Weise durch Paare $(\vec{b}, c)$ charakterisiert, wobei c ein ungerades Element mit $c_{(m)} = 0$ und $\vec{b}$ ein glattes ungerades Vektordifferential ist, dessen m-te Potenz nirgends auf M verschwindet.*

Da c ungerade ist, ist die Bedingung $c_{(m)} = 0$ für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension trivial erfüllt. Da b^j und c ungerade sind, ist $(1 + c)^k = (1 - kc)$ und $(1 - c)\, b^j = b^j(1 + c)$. Daher läßt sich die fragliche Ersetzung

$$dx^j \to b^j \to (1 + c)^{-1}\, b^j(1 + c) = b^j(1 + 2c) \tag{1.8}$$

schreiben. Sei T_1 der Automorphismus, der durch die lokale Ersetzung von dx^j durch b^j charakterisiert ist. Offenbar ist T_1 ein gerader Automorphismus. Sei T_2 durch

$$a \to T_2(a) = (1 + c)^{-1}\, a(1 + c) \tag{1.9}$$

gekennzeichnet. Dann gilt $T = T_2 T_1$ und überdies sieht man: T_2 ist w_0-invers. Also haben wir

Korollar 1.3: *Jeder Automorphismus, der die Bedingung (1.6) erfüllt, ist das Produkt zweier Automorphismen derselben Eigenschaft, von denen einer w_0-gerade und der andere w_0-invers ist.*

Es ist leicht zu sehen, daß jeder innere Automorphismus auf die Gestalt (1.9) mit ungeraden c gebracht werden kann. Hieraus schließt man weiter auf das Gelten von

Korollar 1.4: *Ein Automorphismus T, der die Bedingung (1.6) erfüllt, ist genau dann ein innerer Automorphismus, wenn $w_0 T w_0 = T^{-1}$, T also w_0-invers ist.*

Schließlich betrachten wir noch die Superstrukturen, die die Eigenschaft (1.6) haben. Für sie gilt

Korollar 1.5: *Sei w eine Superstruktur, die die Bedingung (1.6) erfüllt. Dann ist w das Produkt von w_0 mit einem inneren Automorphismus. Insbesondere ist w_0 die einzige gerade Superstruktur in der betrachteten Menge.*

Ist daher w eine Superstruktur der Eigenschaft (1.6), so gibt es genau ein Element c mit

$$w(a) = (1 + c)^{-1}\, w_0(a)\, (1 + c), \qquad w_0(c) = -c. \tag{1.10}$$

Da $A_{(0)}$ nur aus zentralen Elementen besteht, besitzt jeder innere Automorphismus trivialerweise die Eigenschaft (1.6). Umgekehrt ist ein Automorphismus der Eigenschaft (1.6), der das Vektordifferential $\vec{dx} = \{dx^1, \ldots, dx^m\}$ durch ein anderes ungerades Vektordifferential $\vec{b}$ ersetzt, nur im trivialen Fall $\vec{dx} = \vec{b}$ ein innerer. Man kann hieraus folgern: Die Gruppe der Automorphismen der Eigenschaft (1.6) ist das semidirekte Produkt der Gruppe der in ihr enthaltenen geraden Automorphismen mit der Gruppe der inneren Automorphismen.

Die Gruppe aller Automorphismen der Eigenschaft (1.6) bildet eine Untergruppe der folgenden Gruppe:

$$\mathrm{Aut}_0\,(A) = \{T \in \mathrm{Aut}\,(A) : T(I_p) = I_p \quad \text{für alle} \quad p \in M\}. \tag{1.11}$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Aut}\,(A)$ die Gruppe aller Automorphismen von A. Übrigens ist Aut_0 ein Normalteiler und $\mathrm{Aut}\,(A)/\mathrm{Aut}_0\,(A)$ ist isomorph der Gruppe der Diffeomorphismen von M.

2. Zerlegende und Funktionen-Algebren

Wir hatten die Unteralgebra der auf M glatten Funktionen mit $\underline{A}_{(0)}$ bezeichnet (0-*Formen*). Ist aber die Algebra der Funktionen in $\underline{A}$ algebraisch ausgezeichnet? Diese Frage wird durch die Existenz von Automorphismen von $\underline{A}$, die $\underline{A}_{(0)}$ auf von $\underline{A}_{(0)}$ verschiedene Unteralgebren abbilden, verneint. Wir wollen alle Unteralgebren angeben, die durch Anwendung eines Automorphismus von $\underline{A}$ entstehen können. Hierzu beginnen wir mit einer etwas allgemeineren Aufgabe: Da das Radikal von jedem Automorphismus auf sich abgebildet wird, sind die gesuchten Unteralgebren in der Menge der zerlegenden (*splitting*) Unteralgebren enthalten.

Eine Unteralgebra $\underline{F}$ von $\underline{A}$ heißt *zerlegend*, wenn die zu (1.5) analoge Beziehung

$$\underline{A} = \underline{F} + \underline{S}, \qquad \underline{F} \cap \underline{S} = 0 \tag{2.1}$$

erfüllt ist. Jede zerlegende Unteralgebra ist wegen $\underline{F} \simeq \underline{A}/\underline{S} \simeq \underline{A}_{(0)}$ isomorph zu $\underline{A}_{(0)}$. Insbesondere ist $\underline{F}$ kommutativ.

Unser Ziel ist, auf konstruktivem Wege die beiden folgenden Sätze zu zeigen.

Satz 2.1: *Ist $\underline{F}$ eine zerlegende Unteralgebra von $\underline{A}$, so gibt es genau dann einen Automorphismus T von $\underline{A}$ mit*

$$T(\underline{A}_{(0)}) = \underline{F}, \tag{2.2}$$

wenn $\underline{F}$ im Zentrum von $\underline{A}$ enthalten ist. Es kann dann $T \in \mathrm{Aut}_0\,(\underline{A})$ gewählt werden.

Dieser Satz rechtfertigt, als *Funktionenalgebren* genau diejenigen Unteralgebren $\underline{F}$ von $\underline{A}$ zu bezeichnen, die zerlegend sind und nur aus zentralen Elementen bestehen. Vom Standpunkt der algebraischen Struktur von $\underline{A}$ sind daher alle Funktionenalgebren gleichberechtigt. So gesehen ist die Herausstellung einer speziellen Funktionenalgebra, z. B. die Auszeichnung von $\underline{A}_{(0)}$, die Eingabe einer zusätzlichen Struktur, die mit der Fixierung einer Eichung verglichen werden könnte.

Satz 2.2: *Ist $\underline{F}$ eine zerlegende Unteralgebra von $\underline{A}$, so gibt es einen Jordan-Automorphismus V von $\underline{A}$ so, daß das Bild $V(\underline{F})$ von $\underline{F}$ unter V eine Funktionenalgebra, d. h. eine zentrale und zerlegende Unteralgebra von $\underline{A}$ ist.*

Beweis von Satz 2.1: Wir nehmen dazu an, $\underline{F}$ sei eine im Zentrum von $\underline{A}$ enthaltene zerlegende Unteralgebra, die von $\underline{A}_{(0)}$ verschieden ist. Da wir zwei direkte Summendarstellungen $\underline{F} + \underline{S} = \underline{A}_{(0)} + \underline{S}$ haben, gibt es zu jedem $g \in \underline{A}_{(0)}$ genau ein $f \in \underline{F}$ mit $f - g \in \underline{S}$. Setzen wir $F = i_F g$, so ist die Abbildung

$$i_F : g \to f, \qquad g \in \underline{A}_{(0)}, \tag{2.3}$$

ein Isomorphismus von $\underline{A}_{(0)}$ auf $\underline{F}$. Sei nun s wie folgt bestimmt: Die Menge

$$\{g - i_F g,\ g \in \underline{A}_{(0)}\} \tag{2.4}$$

ist enthalten in $\underline{S}^s$, aber nicht in $\underline{S}^{s+1}$. Da sie im Zentrum von $\underline{A}$ liegt, ist entweder s gerade und $s < \dim M$ oder es ist $s = \dim M$. Wegen der Definition von s gibt es genau eine lineare Abbildung $g \to \Phi(g)$ von $\underline{A}_{(0)}$ in die s-Formen so, daß

$$g - i_F g - \Phi(g) \in \underline{S}^{s+1} \quad \text{für alle} \quad g \in \underline{A}_{(0)} \tag{2.5}$$

gilt. Da i_F ein Isomorphismus ist, folgt nach einer leichten Rechnung die Gültigkeit der Relation

$$\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1)\, g_2 + g_1 \Phi(g_2) \qquad \text{für alle} \qquad g_1, g_2 \in \underline{A}_{(0)}. \tag{2.6}$$

Es ist also Φ eine Ableitung der differenzierbaren Funktionen in die glatten s-Formen. Nun wird die Tatsache benutzt, daß jede Ableitung von $\underline{A}_{(0)}$ in $\underline{A}_{(0)}$ notwendigerweise eine Liesche Ableitung nach einem Vektorfeld ist. Durch s-maliges Verjüngen mit Vektorfeldern erhält man aus Φ also eine Liesche Ableitung. Daher ist $\Phi(g)$ lokal eine Linearkombination der Ableitung von g, deren Koeffizienten s-Formen sind. Hieraus folgt nun sofort die Existenz eines Vektordifferentials $\vec{r}$ vom Grade s derart, daß (bezüglich einer Karte)

$$\Phi(g) = r^j \frac{\partial}{\partial x^j}\, g \tag{2.7}$$

ist. Nun ist klar, daß man auf vielerlei Weise Φ zu einer Ableitung von $\underline{A}$ in $\underline{A}$ fortsetzen kann. Als elegante Lösung des letzteren Problems bietet sich die *Nijenhuis*-Ableitung an, die als Lie-Ableitung nach einem Vektordifferential [6] verstanden werden kann. Sei E_j das Kovektordifferential, das lokal das Zurückziehen (*pull back*) der Kartendifferentiale dx^j bewirkt. Es ist bekanntlich durch $E_j g = 0$ für 0-Formen und durch $E_j\, dx^i a + dx^i E_j a = \delta_j{}^i a$ für beliebige Differentiale a eindeutig charakterisiert. Zeige weiterhin $\underline{d}$ die Bildung des totalen Differentials an. Dann erfüllt die Nijenhuis-Ableitung

$$L = (r^j E_j)\, \underline{d} + \underline{d}(r^j E_j) \tag{2.8}$$

die Beziehung

$$L(ab) = L(a)\, b + a L(b) \quad \text{für alle} \quad a, b \in \underline{A}. \tag{2.9}$$

Dies kann man leicht nachrechnen oder damit argumentieren, daß der Antikommutator zweier schiefer Ableitungen stets eine Ableitung ist. Offenbar stimmt L auf $\underline{A}_{(0)}$ mit Φ überein und es ist überdies L nilpotent, da es den Grad um s erhöht. Also ist die Exponentialreihe

$$T_s = id + L + (1/2)\, L \circ L + \cdots \tag{2.10}$$

abbrechend und definiert somit einen Automorphismus von $\underline{A}$. Also ist $T^{-1}(\underline{F}) = \underline{F}'$ wieder eine Funktionenalgebra. Wiederholt man die obige Konstruktion mit $\underline{F}'$, so findet man, daß die zugehörige Zahl s' größer als s ist, da jetzt aus $g \in \underline{A}_{(0)}$, $f' \in \underline{F}'$ und $f' - g \in \underline{S}$ stets $f' - g \in \underline{S}^{s+1}$ folgt. Wir kommen also zu einer leicht einsehbaren Induktion, die spätestens nach $m/2$ oder $(m+1)/2$ Schritten abbricht ∎

Damit ist gleichzeitig der folgende Satz gezeigt.

Satz 2.3: *Sei F eine Funktionenalgebra. Es gibt dann Vektordifferentiale*

$$r_{(2)}, r_{(4)}, \ldots, r_{(m)} \tag{2.11}$$

wie folgt: Die mit ihnen gemäß (2.8) *gebildeten Nijenhuis-Ableitungen $L_2, L_4, \ldots, L_m$ bestimmen Automorphismen $T_k = \exp L_k$ so, daß für den Automorphismus*

$$T = T_2 T_4 \ldots T_m \tag{2.12a}$$

gilt

$$T(\underline{A}_{(0)}) = \underline{F}. \tag{2.12b}$$

Bemerkung: Einige der $r_{(k)}$ können Null und damit die zugehörenden Automorphismen die Identität sein. Ist m gerade, so ist die Numerierung in (2.11) $2, 4, \ldots, m-2, m$. Ist m ungerade, so ist sie $2, 4, \ldots, m-1, m$.

Korollar 2.4: *Jeder nach Satz 2.3 gewinnbare Automorphismus liegt in* $\mathrm{Aut}_0(\underline{A})$. *Ist m gerade, so sind alle Automorphismen im Produkt* (2.12) *und somit T gerade. Ist m ungerade, so sind alle T_{2k} gerade und T_m ist w_0-invers.*

Korollar 2.5: *Jedes* $T \in \mathrm{Aut}_0'$ *besitzt eine Darstellung* $T = T'T''$, *wobei T' die Bedingung* (1.6) *erfüllt und T'' nach der Vorschrift von Satz* 2.3 *konstruiert wurde.*

Korollar 2.6: *Durchläuft T in* $T(\underline{A}_0)$ *die Menge der nach Satz* 2.3 *durch beliebige Wahl der Vektordifferentiale* (2.11) *bestimmten Automorphismen* (2.12), *so wird jede Funktionenalgebra von A genau einmal erhalten.*

Korollar 2.7: *Ist* $m = \dim M$ *gerade, so ist jeder w_0-inverse Automorphismus ein innerer. Ist* $m = \dim M$ *ungerade, so wird die Gruppe der w_0-inversen Automorphismen von den inneren Automorphismen und den gemäß Satz* 2.3 *konstruierten T_m erzeugt.*

Korollar 2.8: *Jede Superstruktur w ist eindeutig schreibbar als $w = w_0T$ mit w_0-inversen T. T ist genau dann w_0-invers, wenn T auch w-invers für beliebige Superstrukturen w von A ist. Mit einer beliebigen Superstruktur w kann* Aut_0 *als das semidirekte Produkt der Gruppe der w-geraden Automorphismen aus* Aut_0' *mit dem Normalteiler der w-inversen Automorphismen dargestellt werden.*

Alle diese Behauptungen folgen in elementarer Weise aus Satz 2.3 und dem beim Beweis dieses Satzes Gesagten.

Beweis von Satz 2.2: Wir nehmen an, $\underline{F}$ sei eine zerlegende Unteralgebra von A. Ist $f \in \underline{F}$, so schreiben wir abkürzend f_+ und f_- für den geraden bzw. ungeraden Teil von f. Für zwei Elemente aus $\underline{F}$ haben wir dann

$$(ff')_+ = f_+f_+' + f_-f_-', \tag{2.13}$$

$$(ff')_- = f_+f_-' + f_-f_+'. \tag{2.14}$$

Nun ist $\underline{F}$ kommutativ und daher die linke Seite von (2.13) symmetrisch in f und f'. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber symmetrisch in den geraden und schiefsymmetrisch in den ungeraden Teilen. Daher muß

$$f_-f_-' = 0 \quad \text{für alle} \quad f, f' \in \underline{F} \tag{2.15}$$

gelten. Weiterhin impliziert $f_+ = 0$ die Beziehung $f \in \underline{S}$, und da $\underline{F}$ zerlegend ist, folgt hieraus $f = 0$. Es ist daher die Zuordnung

$$f \to f_+, \qquad f \in \underline{F}, \tag{2.16}$$

ein Isomorphismus von $\underline{F}$ auf eine Unteralgebra $\underline{F}_+$ von $\underline{A}$. Wir haben schon $\underline{F}_+ \cap \underline{S} = \{0\}$ gezeigt. $\underline{F}_+ + \underline{S} = \underline{A}$ ist ebenso trivial. Also ist $\underline{F}_+$ zerlegend und, da $\underline{F}_+$ aus geraden Elementen besteht, auch zentral. Somit ist $\mathbf{F}_+$ eine Funktionenalgebra. Da (2.16) ein Isomorphismus ist, gibt es zu jedem $g \in \mathbf{F}_+$ genau ein $f \in \underline{F}_+$ mit $f_+ = g$. Wir definieren dann die Abbildung Q von $\underline{F}_+$ in $\underline{A}$ durch $Q(g) = f_-$. Der zu (2.16) inverse Isomorphismus ist daher

$$g \to g + Q(g), \qquad g \in \underline{F}_+. \tag{2.17}$$

Aus (2.13)—(2.15) lesen wir für alle $g_1, g_2 \in \underline{F}_+$

$$Q(g_1 g_2) = Q(g_1)\, g_2 + g_1 Q(g_2), \tag{2.18}$$

$$Q(g_1)\, Q(g_2) = 0 \tag{2.19}$$

ab und überdies ist $Q(g)$ stets ungerade für $g \in \underline{F}_+$.

Wir nehmen, um auf gewohntem Boden zu bleiben, zunächst zusätzlich

$$\underline{F}_+ = \underline{A}_{(0)} \tag{2.20}$$

an. Ein schon beim Beweis von (2.7) benutztes Argument zeigt dann die Existenz eines ungeraden Vektordifferentials $\vec{q}$ an, das lokal zu

$$Q(g) = q^j \frac{\partial}{\partial x^j}\, g \tag{2.21}$$

Anlaß gibt. Nun setzen wir Q zu einer ungeraden Nijenhuis-Ableitung von $\underline{A}$ in $\underline{A}$ fort. Wir definieren

$$K = K_{\vec{q}} = (q^j E_j)\, \underline{d} - \underline{d}(q^j E_j) \tag{2.22}$$

und bemerken, daß K als Kommutator einer geraden und einer ungeraden Ableitung wieder ungerade ist, also

$$K(ab) = K(a)\, b + w_0(a)\, K(b) \quad \text{für alle} \quad a, b \in \underline{A} \tag{2.23}$$

erfüllt. K und Q stimmen auf $\underline{A}_{(0)}$ überein.

Wir setzen nun

$$T(a) = T_{\vec{q}}(a) = a + K(a_+), \qquad 2a_+ = a + w_0(a) \tag{2.24}$$

und zeigen

Lemma 2.9: *$a \to T(a)$ ist ein Jordan-Automorphismus, der bei Gültigkeit von* (2.20) *auf $\underline{F}_+$ mit* (2.17) *übereinstimmt.*

Beweis: Der zweite Teil der Behauptung ist klar, da $\underline{F}_+$ nur aus geraden Elementen besteht, die $g = g_+$ erfüllen. Da $K(a_+)$ ungerade ist, gilt

$$T(a)\, T(a) = a^2 + aK(a_+) + K(a_+)\, a = a^2 + a_+ K(a_+) + K(a_+)\, a_+ .$$

Andererseits haben wir

$$T(a)^2 = a^2 + K\big((a^2)_+\big) = a^2 + K\big((a_+)^2\big) = a^2 + a_+ K(a)_+ + w_0(a_+)\, K(a_+),$$

was wegen $w_0(a_+) = a_+$ zu $T(a^2) = T(a^2)$ führt. Also ist

$$T(ab + ba) = (Ta)\, T(b) + T(b)\, T(a) \quad \text{für alle} \quad a, b \in A, \tag{2.25}$$

d. h., T ist ein Jordan-Homomorphismus ∎

Bemerkung: Man sieht leicht, daß für ungerade Vektordifferentiale $\vec{q}, \vec{r}$

$$T_{\vec{r}+\vec{q}} = T_{\vec{r}} T_{\vec{q}}, \qquad T_{\vec{q}} + T_{-\vec{q}} = id \tag{2.26}$$

gilt. Also ist

$$\vec{q} \to T_{\vec{q}} \tag{2.27}$$

ein Isomorphismus der additiven Gruppe der ungeraden Vektordifferentiale in die eben konstruierte Gruppe der Jordan-Automorphismen (2.24).

Wir beenden nun den Beweis von Satz 2.2 mit dem Fall, daß (2.20) nicht erfüllt ist. Da $\underline{F}_+$ und $\underline{A}_{(0)}$ beide aus geraden Elementen bestehen, gibt es einen nach der Vorschrift von Satz 2.3 konstruierten geraden Automorphismus T' so, daß $T'(\underline{F}_+) = \underline{A}_{(0)}$ ist und die durch $T'(\underline{F}) = \tilde{\underline{F}}$ definierte zerlegende Algebra die Bedingung $\tilde{\underline{F}}_+ = \underline{A}_{(0)}$ erfüllt ∎

Satz 2.10: *Sei $\underline{F}$ eine zerlegende Unteralgebra von $\underline{A}$. Dann gibt es einen Automorphismus T' und einen Jordan-Automorphismus*

$$T'' = id + K \cdot \left(\frac{1 + w_0}{2}\right), \tag{2.28}$$

so daß der Jordan-Automorphismus $T = T''T'$ die Unteralgebra $\underline{F}$ isomorph auf $\underline{A}_{(0)}$ abbildet. Hierbei ist K eine ungerade Ableitung, die mit $\underline{d}$ schief vertauscht.

Wir müssen an dieser Stelle noch die Rolle der Bedingung (2.19) hervorheben, die bei allgemeiner Wahl von q in (2.22) nicht erfüllt ist. Dies ist natürlich, denn der allgemeine Jordan-Automorphismus transformiert eine zerlegende oder Funktionen-Algebra in eine zerlegende Jordan-Algebra. Die Jordan-Automorphismen operieren transitiv auf der Menge der zerlegenden Jordan-Unteralgebren von $\underline{A}$.

Wir bemerken noch Folgendes: Ist $m = \dim M$ ungerade und q ein homogenes Vektordifferential vom Grade m, so ist der nach Vorschrift (2.24) gebildete Jordan-Automorphismus sogar ein Automorphismus, denn in diesem Fall ist stets

$$K(a_+) = K(a) \quad \text{und} \quad id + K = \exp K.$$

Alle gemäß Vorschrift (2.24) gebildeten Jordan-Automorphismen sind w_0-invers. Ist ferner

$$T_j' = \exp L_j \quad \text{und} \quad T_j'' = id + K_j \left(\frac{1 + w_0}{2}\right)$$

mit geraden L_j und ungeraden K_j, so ist $T_1''T_1'T_2''T_2' = T''T'$, wobei $T' = T_1'T_2'$ und T'' der mit der Ableitung $K = K_1 + T_1'K_2(T_1')^{-1}$ gebildete Jordan-Automorphismus ist.

Korollar 2.12: *Die Gesamtheit der durch Satz 2.10 beschriebenen Jordan-Automorphismen $T = T''T'$ bilden eine Gruppe. Diese ist das semidirekte Produkt der Gruppe der in ihnen enthaltenen geraden Automorphismen mit dem Normalteiler der w_0-inversen Jordan-Automorphismen.*

3. Realisierung von (Jordan-) Automorphismen als Diffeomorphismen auf kanonisch assoziierten Mannigfaltigkeiten

Erinnern wir uns zunächst daran, daß die Basismannigfaltigkeit M aus $\underline{A}$ wie folgt gewinnbar ist: Jedes maximale Ideal endlicher Kodimension von $\underline{A}$ ist ein Punktideal (1.3). Diese Menge von Punktidealen schließt sich auf genau eine Weise so zu einer glatten Mannigfaltigkeit zusammen, daß die Automorphismen von $\underline{A}$ auf ihr Diffeomorphismen induzieren. (Jedes System $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in \underline{A}$, das zusammen mit $\underline{S}$ das Ideal $\underline{I}_p$ erzeugt, definiert ein Koordinatensystem in einer Umgebung von $p \in M$.) Allerdings sind die Punktideale eine zu grobe Probe für die Geometrie der Algebra $\underline{A}$, da sie alle das Radikal enthalten.

Es bezeichne Λ die Graßmann-Algebra mit $m = \dim M$ Erzeugenden über den reellen Zahlen. Wir führen vier Mannigfaltigkeiten ein, die wir (provisorisch, da keine Standardbezeichnung zur Verfügung steht)

$$\text{G-Raum } (\underline{A}),\ \text{EG-Raum } (\underline{A}),\ \text{JG-Raum } (\underline{A}),\ \text{EJG-Raum } (\underline{A}) \tag{3.1}$$

nennen wollen: Ihre Punkte seien folgende Objekte:

EG-Punkt: Ein Homomorphismus β von $\underline{A}$ auf Λ. (3.2)

G-Punkt: Der Nullraum eines EG-Punktes, d. h. jedes durch ein β annullierte Ideal. (3.3)

EJG-Punkt: Ein Jordan-Homomorphismus β von $\underline{A}$ auf Λ. (3.4)

JG-Punkt: Nullraum eines EJG-Punktes. (3.5)

Offenbar induziert jeder Automorphismus sowohl eine Transformation des EG-Raumes als auch des G-Raumes auf sich. Jeder Jordan-Automorphismus bildet EJG-Punkte auf EJG-Punkte, JG-Punkte auf JG-Punkte und damit auch den EJG-Raum und den JG-Raum auf sich ab. (Für G-Raum ($\underline{A}$) sagen wir auch einfach G-Raum usw.)

Satz 3.1: *Die Punktmengen G-Raum ($\underline{A}$) und EG-Raum ($\underline{A}$) können auf genau eine Weise so mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen werden, daß die Automorphismen von $\underline{A}$ auf ihnen Diffeomorphismen induzieren.*

Mit dem Analogon dieses Satzes für den JG- und den EJG-Raum wollen wir uns hier nicht befassen. Wir wollen vielmehr noch den Beweis von Satz 3.1 skizzieren.

Sei β ein Homomorphismus von $\underline{A}$ auf Λ, definitionsgemäß also ein EG-Punkt, und $\underline{J} := \operatorname{Ker} \beta$ das Ideal der durch β auf die Null abgebildeten Elemente. Da Λ genau ein maximales Ideal $\underline{S}_\Lambda$ enthält und $\Lambda/\underline{S}_\Lambda$ den reellen Zahlen isomorph ist, gibt es genau ein maximales Ideal $\underline{I}$ von $\underline{A}$ mit $\underline{J} \subset \underline{I}$ und $\underline{I}$ ist ein Punktideal. Da $\beta(\underline{I}) = \underline{S}$ ist, haben wir $\beta(\underline{I}^{m+1}) = 0$. Also gilt

Lemma 3.2: *Es gibt einen Punkt $p \in M$ so, daß mit $\underline{I} = \underline{I}_p$*

$$\underline{I}^{m+1} \subset \underline{J} \subset \underline{I} \tag{3.6}$$

gilt.

Betrachten wir nun $\underline{A}_{(0)}$. Diese Unteralgebra muß in das Zentrum von Λ abgebildet werden. Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Graßmann-Basis von Λ. Sei ferner

$$\beta(g) = g(p) + R_{k+1}(g) + \cdots \quad \text{für alle} \quad g \in \underline{A}_{(0)}. \tag{3.7}$$

(Hier muß die reelle Zahl $g(p)$ als Vielfaches der Eins von Λ gedacht werden. R_j bezeichnet ein homogenes Polynom der e_i vom Grade j.) Man sieht leicht, daß

$$R_k(g_1 g_2) = R(g_1)\, g_2(p) + g_1(p)\, R_k(g_2) \tag{3.8}$$

sein muß. Hieraus folgt, daß der Koeffizient $R_{k,j_1,\ldots}$ in

$$R_k(g) = \sum R_{k,j_1,j_2,\ldots} e_{j_1} e_{j_2} \ldots, j_1 < j_2 < \cdots, \tag{3.9}$$

eine Linearkombination der partiellen Ableitungen von g im Punkte p sein muß. Wählen wir ein Koordinatensystem $\{x_1, \ldots, x_m\}$ und die Basis $e_1, \ldots, e_m$ so, daß $\beta(b_j) = e_j$ immer dann ist, wenn in einer Umgebung von p gilt $b_j = dx_j$, so verhalten sich die Koeffizienten der partiellen Ableitungen wie Tensoren im Punkte p. Es gibt daher eine Nijenhuis-Ableitung L so, daß

$$\beta(Lg) = R_k(g) \tag{3.10}$$

ist. Da $\beta(g)$ ein zentrales Element ist, muß k gerade (oder gleich dim M) sein, wenn R_k nicht identisch verschwindet. Sei L durch (2.8) gegeben und sei T der gemäß (2.10) zugehörende Automorphismus. Dann gilt für alle g aus $\underline{A}_{(0)}$

$$\beta(T^{-1}g) - g(p) \in \underline{S}^{k+1}. \tag{3.11}$$

Hieraus folgt durch Induktion nach k

Lemma 3.3: *Sei β ein* EG-*Punkt. Dann gibt es einen Automorphismus T von $\underline{A}$ so, daß $T\underline{d} = \underline{d}T$ gilt und mit $\beta' := \beta \circ T^{-1}$*

$$\beta'(g) = g(p) \quad \text{für alle} \quad g \in \underline{A}_{(0)} \tag{3.12}$$

ist.

Sind aber β' und β'' zwei EG-Punkte mit $\beta'(g) = \beta''(g) = g(p)$ für alle $g \in \underline{A}_{(0)}$, so gibt es einen Automorphismus T' der in Lemma 1.1 beschriebenen Gestalt mit $\beta'' = \beta' \circ T'$.

Satz 3.4: *Für $p \in M$ sei*

$$\text{p-Aut}\,(\underline{A}) := \{T \in \text{Aut}\,(\underline{A}) : T(\underline{I}_p) = \underline{I}_p\}, \tag{3.13}$$

$$\text{pE-Aut}\,(\underline{A}) := \{T \in \text{Aut}\,(\underline{A}) : T(\underline{I}_p \cap \underline{A}_{(0)}) = \underline{I}_p \cap \underline{A}_{(0)}\}. \tag{3.14}$$

Dann ist

$$\text{G-Raum}\,(\underline{A}) \simeq \text{Aut}\,(\underline{A})/\text{p-Aut}\,(\underline{A}), \tag{3.15}$$

$$\text{EG-Raum}\,(\underline{A}) \simeq \text{Aut}\,(\underline{A})/\text{pE-Aut}\,(\underline{A}). \tag{3.16}$$

Korollar 3.5: *Sei $p \in M$ und $\underline{I}_p$ das zugehörende Punktideal. Sei $\underline{F}$ eine Funktionenalgebra von $\underline{A}$. Dann ist das von $\underline{F} \cap \underline{I}_p$ in $\underline{A}$ erzeugte Ideal ein G-Punkt. Jeder G-Punkt ist auf diese Weise gewinnbar.*

Schließlich wollen wir noch die Dimension der G- und JG-Räume angeben:

$$\dim\,(\text{G-Raum}) = m2^{m-1}, \qquad \text{wenn } \dim M = m \text{ gerade ist}.$$

$$\dim\,(\text{G-Raum}) = m(2^{m-1} + 1), \qquad \text{wenn } \dim M = m \text{ ungerade ist}.$$

$$\dim\,(\text{JG-Raum}) = m2^m, \qquad \text{wenn } m = \dim M \text{ ist}.$$

Für $m = 4$ sind also die Dimensionen des G- und JG-Raumes gleich 32 und 64. Für $m = 3$ erhalten wir 15 und 24.

LITERATUR

[1] Березин, Ф. А.: Метод вторичного квантования. Москва: Изд.-во Наука 1965.

[2] Березин, Ф. А.: Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. Москва: Изд-во Московского Университета 1983.

[3] Гольфанд, Ю. А., и Е. П. Лихтман: Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности. Письмо в ж. экспер. теор. физики **13** (1971), 452—455.

[4] Konstant, B.: Graded Manifolds, graded Lie Theory, and Prequantisation (Lecture Notes in Math. 570). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1977.

[5] Лейтес, Д. А.: Введение в теорию супермногообразий. Успехи Мат. Наук **35** (1980), 3—57.

[6] Trautmann, A.: The Lie Super Algebra of the Cartan Algebra. Lecture at the Banach Centre, Warshawa 1983 (to be published).
[7] Uhlmann, A.: On Associative Algebras of Superfunctions. In: Quantum Theory of Particles and Fields (Eds.: J. Lukierski and B. Jancewicz). Singapore: World Scientific Publ. 1983, 188—200.
[8] Wess, J., und B. Zumino: Supergauge Transformations in four Dimensions. Nucl. Phys. B 70 (1974), 39—50.
[9] Волков,й Д. В., и В. П. Акулов: О возможном универсальном взаимодействий нейтрино. Письмо в ж. экспер. теор. физики 16 (1972), 621—624.

Manuskripteingang: 18. 06. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. Armin Uhlmann
Sektion Physik und Naturwiss.-Theor. Zentrum
der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz