Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 4 (6) 1985, S. 513–523

Über einen Vergleichssatz

K. MORGENTHAL

Für die Funktional-Differentialungleichungen

$$x'(t) \gtreqless l(t)\, x(t) - \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty)$$

wird ein Vergleichssatz bewiesen, der Resultate von E. Kozakiewicz und A. D. Myškis verallgemeinert.

Для функционально-дифференциальных неравенств

$$x'(t) \gtreqless l(t)\, x(t) - \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty)$$

доказывается теорема о сравнении решений, которая обобщает результаты Э. Козакевича и А. Д. Мышкиса.

A comparison theorem for the functional-differential inequalities

$$x'(t) \gtreqless l(t)\, x(t) - \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty)$$

is proved wich generalizes results of E. Kozakiewicz and A. D. Myškis.

I Einleitung

Vergleichssätze sind für die Untersuchung des Verhaltens der Lösungen von Funktional-Differentialgleichungen und -Differentialungleichungen oft sehr nützlich. Für die Gleichung

$$x'(t) = -\int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty) \qquad (1 =)$$

hat MYŠKIS in [4: §§ 28, 29] Vergleichssätze bewiesen, die bei der Untersuchung der Lösungen der Gleichung eine wesentliche Rolle spielen. KOZAKIEWICZ hat in [1] die Lösungen von (1 =) mit Hilfe eines anderen Vergleichssatzes untersucht (s. auch [4: §§ 32, 33]) und in [2] für die Ungleichungen

$$x'(t) \geqq l(t)\, x(t) - \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty) \quad (2 \geqq)$$

und (2 $\leqq$) Sätze bewiesen, die sein früheres Resultat aus [1] verallgemeinern ((2 $\leqq$) erhält man aus (2 $\geqq$), wenn man „$\geqq$“ durch „$\leqq$“ ersetzt; analog in anderen Fällen).

In der vorliegenden Arbeit geben wir nun einen allgemeinen Vergleichssatz für ($2 \geqq$) und ($2 \leqq$) an, der sowohl die Vergleichssätze von KOZAKIEWICZ aus [2] als auch einen wesentlichen Teil der Ergebnisse von MYŠKIS [4] als Spezialfälle enthält. Das gelingt durch Einführung des Begriffs *reguläre Lösungsschar*. Die Vergleichsmethoden von Myškis und Kozakiewicz erscheinen zunächst ganz verschieden. Wir zeigen nun, daß sie sich nur durch die Art, wie die reguläre Lösungsschar konstruiert wird, unterscheiden.

Unsere Vergleichsmethode läßt sich auch auf andere Funktional-Differentialungleichungen anwenden.

II Vergleichssatz

Sei $-\infty \leqq A < B \leqq +\infty$. Für jedes $t \in [A, B)$ sei M_t eine nichtleere Teilmenge von $[0, +\infty)$. C_t sei der Raum aller auf M_t stetigen reellwertigen Funktionen. Weiter sei bei $A \leqq T < B$ $E(T) = \inf\{t - \tau : T \leqq t < B,\ \tau \in M_t\}$. Der Fall $E(T) = -\infty$ ist nicht ausgeschlossen. Wegen $M_t \subseteqq [0, +\infty)$ ist $E(T) \leqq T$ $(A \leqq T < B)$. Bei $A \leqq T_1 \leqq T_2$ gilt $E(T_1) \leqq E(T_2)$. $\mathscr{E}(T)$ $(A \leqq T < B)$ sei im Fall $E(T) > -\infty$ das Intervall $[E(T), T]$ und im Fall $E(T) = -\infty$ das Intervall $(-\infty, T]$. Ist $x \in C(\mathscr{E}(A) \cup [A, B), \mathbf{R})$ und ist $t \in [A, B)$, so sei x_t die durch $x_t(\tau) = x(t - \tau)$, $\tau \in M_t$, auf M_t definierte Funktion. Es ist $x_t \in C_t$.

Für jedes $t \in [A, B)$ sei L_t ein auf C_t definiertes reellwertiges Funktional. Folgende Eigenschaften seien erfüllt:

A_1: L_t ist linear.

A_2: Aus $\varphi \in C_t$ und $\varphi(\tau) \geqq 0$ $(\tau \in M_t)$ folgt $L_t\varphi \geqq 0$.

A_3: Für jede Funktion $x \in C(\mathscr{E}(A) \cup [A, B), \mathbf{R})$ ist die Funktion $t \to L_t x_t$ auf $[A, B)$ lokal summierbar.

l sei eine auf $[A, B)$ reellwertige lokal summierbare Funktion. Wir betrachten die Ungleichungen

$$x'(t) \geqq l(t)\,x(t) - L_t x_t \qquad (A \leqq t < B) \tag{3 $\geqq$}$$

und ($3 \leqq$). Unter einer Lösung von ($3 \geqq$) verstehen wir eine Funktion $x \in C(\mathscr{E}(A) \cup [A, B), \mathbf{R})$, die auf $[A, B)$ differenzierbar ist und ($3 \geqq$) genügt. Analog verwenden wir den Lösungsbegriff bezüglich ($3 \leqq$). Ist x eine Lösung von ($3 \geqq$), so folgt

$$x(t_2) \geqq x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} l(t)\,x(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L_t x_t\,dt \qquad (A \leqq t_1 \leqq t_2 < B). \tag{4 $\geqq$}$$

Aus ($3 \leqq$) erhält man die entsprechende Ungleichung ($4 \leqq$). Wir betrachten im folgenden ($4 \geqq$) und ($4 \leqq$). Unter einer Lösung von ($4 \geqq$) [bzw. ($4 \leqq$)] verstehen wir eine Funktion $x \in C(\mathscr{E}(A) \cup [A, B), \mathbf{R})$, die ($4 \geqq$) [bzw. ($4 \leqq$)] für alle t_1, t_2 mit $A \leqq t_1 \leqq t_2 < B$ erfüllt.

A nennen wir Anfangspunkt. Wir betrachten auch Lösungen von ($3 \geqq$) und ($3 \leqq$) bzw. ($4 \geqq$) und ($4 \leqq$) mit Anfangspunkten $T > A$; dabei erwähnen wir ausdrücklich, daß x eine Lösung mit dem Anfangspunkt T ist, oder sagen, daß x auf dem Intervall $[T, B)$ Lösung der Ungleichung ist. Sprechen wir einfach von Lösungen, ohne den Anfangspunkt oder das Intervall zu erwähnen, so meinen wir immer Lösungen mit dem Anfangspunkt A.

Nach [2; Th.1] gilt der folgende Satz.

Satz 1. *Sei f eine Lösung von ($4 \geqq$) und g eine Lösung von ($4 \leqq$). Es sei*

$$\left.\begin{aligned} &f(t) \leqq g(t) \qquad (t \in \mathscr{E}(A)),\\ &f(A) = g(A). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dann existiert ein C, $A < C < B$, so daß gilt

$$g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t \leqq C). \tag{6}$$

In Satz 1 kann man, wie einfache Beispiele zeigen, nicht behaupten, daß für alle $t \in [A, B)$ gilt $g(t) \leqq f(t)$. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung läßt sich dies aber zeigen. Das ist der Inhalt unseres Vergleichssatzes. Um ihn formulieren zu können, benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition: g sei eine Lösung von ($4 \leqq$). Wir sagen *g ist in eine reguläre Lösungsschar von ($4 \leqq$) eingebettet*, wenn Funktionen

$$h: \{\mathscr{E}(A) \cup [A, B)\} \times [s_1, s_2) \to \mathbf{R}, \qquad H: [s_1, s_2) \to [A, B),\ H(s_1) = A,$$

und

$$u: [A, B) \to [s_1, s_2), \qquad -\infty < s_1 < s_2 \leqq +\infty,$$

gegeben sind mit den Eigenschaften:

E_1: h ist auf $\{\mathscr{E}(A) \cup [A, B)\} \times [s_1, s_2)$ stetig. Bei jedem $t \in \mathscr{E}(A) \cup [A, B)$ ist die Funktion $h(t; \cdot)$ auf $[s_1, s_2)$ monoton nichtfallend.
E_2: $h(t; s_1) \equiv g(t) \qquad \big(t \in \mathscr{E}(A) \cup [A, B)\big)$.
E_3: Bei jedem $s \in [s_1, s_2)$ ist $h(\cdot, s)$ auf $[H(s), B)$ Lösung von ($4 \leqq$).
E_4: u ist auf $[A, B)$ stetig und monoton nichtfallend. Für jedes $t \in [A, B)$ gilt:
  $E_{4,1}$: Für jedes $s \in [s_1, u(t)]$ ist $H(s) \leqq t$.
  $E_{4,2}$: $h(t; \cdot)$ ist auf $[s_1, u(t)]$ streng monoton wachsend.

Satz 2: *Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Darüber hinaus lasse sich g in eine reguläre Lösungsschar von ($4 \leqq$) einbetten, wobei*

$$f(t) \leqq h\big(t; u(t)\big) \qquad (A \leqq t < B) \tag{7}$$

gelten möge. Dann folgt

$$g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t < B). \tag{8}$$

Beweis: A) Wir betrachten das Intervall J aller $C \in [A, B)$, für die gilt

$$g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t \leqq C). \tag{9}$$

Nach Satz 1 gibt es Werte C mit $A < C < B$, für die (9) erfüllt ist, J reduziert sich also nicht nur auf den Punkt A. Wegen der Definition von J und der Voraussetzung (7) gilt für alle $t \in J$

$$h(t; s_1) \leqq f(t) \leqq h\big(t; u(t)\big). \tag{10}$$

Daher hat die Gleichung

$$f(t) = h(t; s) \tag{11}$$

bei $t \in J$ nach $E_{4,2}$ genau eine Lösung $s \in [s_1, u(t)]$. Diese bezeichnen wir mit $s = v(t)$. Es gilt also bei $t \in J$

$$f(t) = h\big(t; v(t)\big) \qquad s_1 \leqq v(t) \leqq u(t). \tag{12}$$

Die Funktion v ist auf J stetig und wegen (12) und $E_{4,1}$ ist

$$H\big(v(t)\big) \leqq t \qquad (t \in J). \tag{13}$$

Wegen $f(A) = g(A) = h(A; s_1)$ ist $v(A) = s_1$.

Wir zeigen nun, daß v auf J monoton nichtfallend ist. Ist das nicht der Fall, so gibt es in J zwei Punkte P und Q mit $Q < P$ und $v(P) < v(Q)$. Wegen $v(P) \geqq s_1$

$= v(A)$ gilt auch $v(A) < v(Q)$. Ist daher $s^* = \max\{v(t): A \leqq t \leqq P\}$ und ist R die größte im Intervall $[A, P]$ gelegene Stelle, in der das Maximum angenommen wird, so gilt $A < R < P$ und

$$v(t) \leqq s^* \qquad (A \leqq t \leqq R), \tag{14}$$

$$v(R) = s^*, \tag{15}$$

$$v(t) < s^* \qquad (R < t \leqq P). \tag{16}$$

Wir betrachten die Funktion $h(\cdot; s^*)$. Es gilt

$$f(t) \leqq h(t; s^*) \qquad \bigl(t \in \mathscr{E}(R)\bigr), \tag{17}$$

$$f(R) = h(R; s^*). \tag{18}$$

Ist nämlich $t \in \mathscr{E}(A)$, so gilt wegen der Voraussetzung (5) und der Monotonie von $h(t; \cdot)$

$$f(t) \leqq g(t) = h(t; s_1) \leqq h(t; s^*),$$

und ist $A \leqq t \leqq R$, so ist wegen (14) und der Monotonie von $h(t; \cdot)$

$$f(t) = h\bigl(t; v(t)\bigr) \leqq h(t; s^*).$$

Also gilt tatsächlich (17). (18) folgt aus (15). Nach E_3 ist $h(\cdot; s^*)$ auf $[H(s^*), B)$ Lösung von ($4 \leqq$). Wegen (13) ist $H(s^*) = H\bigl(v(R)\bigr) \leqq R$, so daß $h(\cdot; s^*)$ auch auf $[R, B)$ Lösung von ($4 \leqq$) ist. Da f natürlich auf $[R, B)$ Lösung von ($4 \geqq$) ist und da (17), (18) gelten, ist Satz 1 auf f, $h(\cdot; s^*)$ und den Anfangspunkt R anwendbar. Er liefert die Existenz eines S, $R < S < B$, mit

$$h(t; s^*) \leqq f(t) \qquad (R \leqq t \leqq S). \tag{19}$$

Andererseits ist, da u eine monoton nichtfallende Funktion ist, $u(R) \leqq u(t)$ $(R \leqq t \leqq P)$. Also gilt bei $R \leqq t \leqq P$ die Abschätzung $s_1 \leqq s^* = v(R) \leqq u(R) \leqq u(t)$, d. h., s^* liegt im Intervall $[s_1, u(t)]$, in dem $h(t; \cdot)$ nach $E_{4.2}$ streng monoton wächst. $v(t)$ liegt nach (12) ebenfalls in diesem Intervall. Wegen (16) erhalten wir daher

$$f(t) = h\bigl(t; v(t)\bigr) < h(t; s^*) \qquad (R < t \leqq P) \tag{20}$$

im Widerspruch zu (19). Damit ist gezeigt, daß v tatsächlich auf J monoton nichtfallend ist.

B) Es ist $J \subseteqq [A, B)$. Wir nehmen nun an, daß J ein echtes Teilintervall von $[A, B)$ ist. Ist dann $C^* = \sup J$, so gilt

$$A < C^* < B, \tag{21}$$

$$g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t \leqq C^*), \tag{22}$$

$$g(C^*) = f(C^*) \tag{23}$$

und in jeder rechtsseitigen Umgebung von C^* gibt es Punkte t mit $f(t) < g(t)$. (22) und (23) besagen $C^* \in J$ und $v(C^*) = s_1$. Da außerdem auch $v(A) = s_1$ gilt und da v nach A) auf J monoton nicht fällt, folgt $v(t) = s_1$ $(A \leqq t \leqq C^*)$. Daher ist

$$f(t) = h\bigl(t; v(t)\bigr) = h(t; s_1) = g(t) \qquad (A \leqq t \leqq C^*).$$

Beachtet man dies und außerdem (5), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} f(t) &\leqq g(t) \qquad \bigl(t \in \mathscr{E}(C^*)\bigr), \\ f(C^*) &= g(C^*). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Hieraus folgt nach Satz 1 die Existenz eines Punktes T, $C^* < T < B$, so daß $g(t) \leqq f(t)$ $(C^* \leqq t \leqq T)$ gilt — im Widerspruch dazu, daß in jeder rechtsseitigen Umgebung von C^* Punkte t liegen mit $f(t) < g(t)$. Die Annahme, daß J ein echtes Teilintervall von $[A, B)$ ist, hat also zum Widerspruch geführt. Daher ist $J = [A, B)$ ∎

Nach dem eben durchgeführten Beweis gilt die folgende Ergänzung zu Satz 2:

Die durch

$$f(t) = h\bigl(t; v(t)\bigr) \qquad \bigl(A \leqq t < B,\ s_1 \leqq v(t) \leqq u(t)\bigr)$$

definierte Funktion v ist auf $[A, B)$ monoton nichtfallend.

Die Monotonie von v wird in den Anwendungen oft gebraucht, s. z. B. [3].

III Spezialfälle

Als Anwendung zeigen wir, daß die in der Einleitung erwähnten Vergleichssätze von Kozakiewicz [2: Th. 1″ und Th. 2] und der Satz [4: Th. 35] von Myškis Spezialfälle von Satz 2 sind. Schließlich gehen wir noch auf den Satz [4: Th. 34] von Myškis ein.

A) Satz 3: $(4\ \leqq)$ *möge eine Lösung g_0 besitzen mit*

$$0 \leqq g_0(t) \qquad \bigl(t \in \mathcal{E}(A)\bigr), \tag{25}$$

$$0 < g_0(t) \qquad (A \leqq t < B). \tag{26}$$

f und g mögen die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllen. Dann gilt:

(i) $g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t < B)$.

(ii) *Die durch*

$$v(t) = \frac{f(t) - g(t)}{g_0(t)} \qquad \bigl(t \in [A, B)\bigr)$$

definierte Funktion v ist auf $[A, B)$ monoton nichtfallend.

Beweis: Wir wenden Satz 2 an, und zwar setzen wir $s_1 = 0$, $s_2 = +\infty$,

$$h(t; s) = g(t) + s g_0(t) \qquad \bigl(t \in \mathcal{E}(A) \cup [A, B),\ 0 \leqq s < +\infty\bigr),$$

$$H(s) \equiv A \qquad (0 \leqq s < +\infty).$$

Weiter wählen wir eine beliebige auf $[A, B)$ stetige, positive, monoton nichtfallende Funktion u, für die gilt

$$u(t) \geqq \frac{f(t) - g(t)}{g_0(t)} \qquad (A \leqq t < B). \tag{27}$$

Wir können dann leicht nachprüfen, daß g damit in eine reguläre Lösungsschar von $(4\ \leqq)$ eingebettet ist. Da g und g_0 Lösungen von $(4\ \leqq)$ sind, ist bei $s \geqq 0$ auch $h(\cdot; s)$ Lösung von $(4\ \leqq)$. Die Monotonie von $h(t; \cdot)$ folgt aus den Voraussetzungen (25) und (26). Da wir u so gewählt haben, daß (27) gilt, ist auch (7) erfüllt. Also ist Satz 2 anwendbar, wobei offenbar $v(t) = \dfrac{f(t) - g(t)}{g_0(t)}$ gilt ∎

Setzen wir voraus, daß g selbst schon (25) und (26) erfüllt, so können wir in Satz 3 $g_0 = g$ setzen. Wir erhalten dann den folgenden Spezialfall.

Satz 4: *f und g mögen die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllen. Weiter sei*

$$0 \leqq g(t) \qquad (t \in \mathscr{E}(A)),$$

$$0 < g(t) \qquad (A \leqq t < B).$$

Dann gilt:

(i) $g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t < B)$.

(ii) *Die durch $q(t) = f(t)/g(t)$ $(t \in [A, B))$ definierte Funktion q ist auf $[A, B)$ monoton nichtfallend.*

Aussage (i) von Satz 3 ist äquivalent mit [2: Th. 1″]; Satz 4 ist der Vergleichssatz [2: Th. 2] von KOZAKIEWICZ. Für Anwendungen s. z. B. [2, 3].

B) Wir betrachten die Ungleichungen

$$x'(t) \geqq l(t)\, x(t) - \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty) \qquad (28 \geqq)$$

und (28 $\leqq$). Die reelle Funktion l sei auf $[A, B)$ lokal summierbar, der Kern r erfülle die folgenden Voraussetzungen (s. MYŠKIS [4]):

1. σ ist stetig auf $[A, B)$.
2. $r(t, \tau)$ ist definiert für $A \leqq t < B$, $0 \leqq \tau \leqq \sigma(t)$. Es ist $r(t, 0) \equiv 0$ $(A \leqq t < B)$ und bei jedem $t \in [A, B)$ ist die Funktion $r(t, \cdot)$ monoton nichtfallend auf $[0, \sigma(t)]$.
3. Die Funktion $t \to r(t, \sigma(t))$ ist stetig auf $[A, B)$.
4. $\lim\limits_{\substack{t' \to t \\ A \leqq t' < B}} \int_{\tau=0}^{\min(\sigma(t),\sigma(t'))} |r(t,\tau) - r(t',\tau)|\, d\tau = 0 \qquad (A \leqq t < B)$.

Im vorliegenden Fall ist

$$M_t = [0, \sigma(t)],\ C_t = C[(0, \sigma(t)], \mathbf{R}),$$

$$E(T) = \inf\{t - \sigma(t) : T \leqq t < B\}, \qquad L_t\varphi = \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} \varphi(\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (\varphi \in C_t).$$

L_t erfüllt die Eigenschaften A_1—A_3: A_1 gilt offensichtlich, A_2 folgt aus der Monotonie von $r(t, \cdot)$ und A_3 ist ebenfalls erfüllt, denn wegen der Voraussetzungen über den Kern r ist die Funktion

$$t \to L_t x_t = \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau)$$

stetig auf $[A, B)$, wenn x eine auf $\mathscr{E}(A) \cup [A, B)$ stetige Funktion ist (s. [4]). Bei den angegebenen Voraussetzungen sind die Sätze 1—4 also auf (28 $\geqq$) und (28 $\leqq$) und die entsprechenden integrierten Ungleichungen anwendbar.

C) Wir setzen jetzt $l(t) \equiv 0$ und betrachten zwei Ungleichungen mit verschiedenen Kernen:

$$x'(t) \leqq -\int_{\tau=0}^{\sigma(t)} x(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty) \qquad (29 \leqq)$$

und

$$\bar{x}'(t) \geqq -\int_{\tau=0}^{\bar{\sigma}(t)} \bar{x}(t-\tau)\, d\bar{r}(t,\tau) \qquad (-\infty < A \leqq t < B \leqq +\infty). \qquad (30 \geqq)$$

Die Kerne r und $\bar{r}$ mögen die in B) angegebenen Voraussetzungen erfüllen. Die zu $\bar{r}$ gehörenden Größen werden ebenfalls mit einem Querstrich gekennzeichnet: $\bar{\sigma}$, $\bar{E}$ usw. Dann gilt der folgende Satz 5. Um ihn einfach formulieren und beweisen zu können, treffen wir folgende Vereinbarung: Wir setzen bei $A \leqq t < B$

$$\begin{aligned} r(t, +\infty) &= r(t, \tau) \equiv r(t, \sigma(t)) \quad (\sigma(t) \leqq \tau < +\infty), \\ \bar{r}(t, +\infty) &= \bar{r}(t, \tau) \equiv \bar{r}(t, \bar{\sigma}(t)) \quad (\bar{\sigma}(t) \leqq \tau < +\infty). \end{aligned} \tag{31}$$

Satz 5: *Es sei*

$$\bar{r}(\bar{t}, +\infty) - \bar{r}(\bar{t}, \tau) \leqq r(t, +\infty) - r(t, \tau) \quad (A \leqq t \leqq \bar{t} < B, 0 \leqq \tau < +\infty). \tag{32}$$

Sei f eine Lösung von (30 $\geqq$) und g eine Lösung von (29 $\leqq$), wobei gilt

$$f(t) \leqq g(t) \qquad (t \in \bar{\mathscr{E}}(A) \cap \mathscr{E}(A)), \tag{33}$$

$$f(A) = g(A). \tag{34}$$

Weiter seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

g ist auf $\mathscr{E}(A)$ monoton nichtwachsend, (35)

g ist auf $[A, B)$ streng monoton fallend, (36)

$g(t - \tau) \geqq 0$, falls $A \leqq t < B$, $0 \leqq \tau \leqq \sigma(t)$ und τ Wachstumspunkt der Funktion $r(t, \cdot)$ ist, (37)

$$f(t) \leqq g(A) \qquad (A \leqq t < B). \tag{38}$$

Dann folgt:

(i) $g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t < B)$.

(ii) *Die durch*

$$f(t) = g(t - v(t)) \qquad (A \leqq t < B, 0 \leqq v(t) \leqq t - A)$$

definierte Funktion v ist auf $[A, B)$ monoton nichtfallend.

Anmerkungen: 1. $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ sei eine monoton nichtfallende Funktion. Ein Punkt $\tau_0 \in [a, b]$ heißt *Wachstumspunkt* von g, wenn es in jeder Umgebung von τ_0 Werte $\tau \in [a, b]$ gibt mit $g(\tau) \neq g(\tau_0)$.

2. Wir benutzen beim Beweis das folgende einfache Lemma (s. [4: Anhang III]).

Lemma 1: *g_1, g_2 seien zwei auf $[a, b]$ monoton nichtfallende Funktionen mit*

$$g_1(b) - g_1(\tau) \geqq g_2(b) - g_2(\tau) \qquad (a \leqq \tau \leqq b).$$

f sei auf $[a, b]$ stetig und monoton nichtfallend. Weiter sei $f(\tau) \geqq 0$ in allen Wachstumspunkten τ von g_1. Dann folgt

$$\int_a^b f(\tau)\, dg_1(\tau) \geqq \int_a^b f(\tau)\, dg_2(\tau).$$

Beweis von Satz 5: g ist als Lösung von (29 $\leqq$) auf $\mathscr{E}(A) \cup [A, B)$ definiert. Ist $E(A) = -\infty$, also $\mathscr{E}(A) = (-\infty, A]$, so ist $\bar{\mathscr{E}}(A) \cap \mathscr{E}(A) = \bar{\mathscr{E}}(A)$ und (33) lautet

$$f(t) \leqq g(t) \qquad (t \in \bar{\mathscr{E}}(A)). \tag{39}$$

Ist $E(A) > -\infty$, so setzen wir g so auf $\big(-\infty, E(A)\big)$ fort, daß g auf dem ganzen Intervall $(-\infty, A]$ stetig und monoton nichtwachsend wird und (39) erfüllt. Wegen (35) und (33) ist dies möglich. g ist dann also in jedem Fall auf $(-\infty, A]$ monoton nichtwachsend und erfüllt (39).

g ist nach Voraussetzung eine Lösung von (29 $\leqq$). Wir werden nun zeigen, daß g unter den angegebenen Voraussetzungen auch eine Lösung von (30 $\leqq$) ist und daß darüber hinaus g sich in eine spezielle reguläre Lösungsschar von (30 $\leqq$) einbetten läßt, wobei (7) gilt. Da f eine Lösung von (30 $\geqq$) ist und da (39) und (34) gelten, erhalten wir dann nach Satz 2 die Behauptung.

Wir setzen $s_1 = 0$, $s_2 = B - A$ und

$$h(t; s) = g(t - s) \qquad (t \in \bar{\mathscr{E}}(A) \cup [A, B),\ 0 \leqq s < B - A),$$

$$H(s) = A + s \qquad (0 \leqq s < B - A),$$

$$u(t) = t - A \qquad (A \leqq t < B).$$

E_1 ist erfüllt, da g stetig und monoton nichtwachsend ist. E_2 und $E_{4.1}$ gelten offensichtlich. $E_{4.2}$ folgt aus der Voraussetzung (36). Zu zeigen bleibt E_3. Wir wählen also ein s mit $0 \leqq s < B - A$ und betrachten die Funktion $h(\cdot\,; s)$. Bei $H(s) \leqq t < B$ ist $A \leqq t - s < B - s \leqq B$, also gilt nach (29 $\leqq$)

$$g'(t - s) \leqq -\int_{\tau=0}^{\sigma(t-s)} g(t - s - \tau)\, dr(t - s, \tau). \tag{40}$$

Sei $R_{t,s} = \max\big(\sigma(t - s), \bar{\sigma}(t)\big)$. Wegen (31) und der Voraussetzung (32) ist

$$\bar{r}(t, R_{t,s}) - \bar{r}(t, \tau) \leqq r(t - s, R_{t,s}) - r(t - s, \tau) \qquad (0 \leqq \tau \leqq R_{t,s}).$$

Beachten wir dies, die Monotonie von g und (37), so können wir nach Lemma 1 abschätzen:

$$\int_{\tau=0}^{\sigma(t-s)} g(t - s - \tau)\, dr(t - s, \tau) = \int_{\tau=0}^{R_{t,s}} g(t - s - \tau)\, dr(t - s, \tau)$$

$$\geqq \int_{\tau=0}^{R_{t,s}} g(t - s - \tau)\, d\bar{r}(t, \tau) = \int_{\tau=0}^{\bar{\sigma}(t)} g(t - s - \tau)\, d\bar{r}(t, \tau).$$

Hieraus und aus (40) erhalten wir also

$$g'(t - s) \leqq -\int_{\tau=0}^{\bar{\sigma}(t)} g(t - s - \tau)\, d\bar{r}(t, \tau) \qquad \big(H(s) \leqq t < B\big).$$

Das heißt, bei jedem $s \in [0, B - A)$ ist $h(\cdot\,; s)$ auf $[H(s), B)$ Lösung von (30 $\leqq$). E_3 ist also auch erfüllt. Speziell ist $g = h(\cdot\,; 0)$ auf $[A, B)$ Lösung von (30 $\leqq$).

Es gilt bei $t \in [A, B)$

$$h\big(t; u(t)\big) = g\big(t - u(t)\big) = g(A).$$

Daher ist wegen der Voraussetzung (38) auch (7) erfüllt. Wenden wir Satz 2 auf f, g und die angegebene spezielle reguläre Lösungsschar an, erhalten wir die Behauptung ∎

Aus den Voraussetzungen (33) und (35) folgt offenbar

$$f(\bar{t}) \leqq g(t) \qquad \big(t \in \mathscr{E}(A),\ \bar{t} \in \bar{\mathscr{E}}(A),\ t \leqq \bar{t}\big). \tag{41}$$

Es zeigt sich nun, daß es in Satz 5 genügt, statt (33) und (35) nur (41) vorauszusetzen.

Satz 6: *In Satz 5 sei die Voraussetzung* (35) *weggelassen und* (33) *ersetzt durch* (41). *Die restlichen Voraussetzungen seien unverändert. Dann bleibt die Aussage von Satz* 5 *gültig.*

Beweis: Man sieht leicht, daß es bei den angegebenen Voraussetzungen eine auf $\mathscr{E}(A)$ stetige Funktion ψ gibt mit den Eigenschaften:

$$\psi \text{ ist auf } \mathscr{E}(A) \text{ monoton nichtwachsend,} \tag{42}$$

$$\psi(t) \leqq g(t) \quad \big(t \in \mathscr{E}(A)\big), \quad 0 \leqq \psi(t) \quad \big(t \in \mathscr{E}(A),\, g(t) \geqq 0\big), \tag{43}$$

$$f(t) \leqq \psi(t) \quad \big(t \in \bar{\mathscr{E}}(A) \cap \mathscr{E}(A)\big); \tag{44}$$

$$\psi(A) = g(A) = f(A). \tag{45}$$

Sei

$$g^*(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{bei} \quad t \in \mathscr{E}(A), \\ g(t) & \text{bei} \quad A \leqq t < B. \end{cases} \tag{46}$$

Aus (37), (43) und (46) folgt: $0 \leqq g^*(t-\tau) \leqq g(t-\tau)$, falls $A \leqq t < B$, $0 \leqq \tau \leqq \sigma(t)$ und τ Wachstumspunkt von $r(t,\cdot)$ ist. Daher gilt

$$\int_{\tau=0}^{\sigma(t)} g^*(t-\tau)\, dr(t,\tau) \leqq \int_{\tau=0}^{\sigma(t)} g(t-\tau)\, dr(t,\tau) \qquad (A \leqq t < B). \tag{47}$$

Da g eine Lösung von ($29 \leqq$) ist, folgt aus (47), daß auch g^* Lösung von ($29 \leqq$) ist. f und g^* erfüllen alle Voraussetzungen von Satz 5. Hieraus folgt die Behauptung ∎

Wir haben die Sätze 5 und 6 für die Differentialungleichungen ($30 \geqq$) und ($29 \leqq$) formuliert und bewiesen. Sie lassen sich analog auch für die entsprechenden integrierten Ungleichungen beweisen.

Nimmt man in Satz 6 für f und g Lösungen der Gleichungen ($30 =$) und ($29 =$), so erhält man den erwähnten Vergleichssatz [4: Th. 35] von Myškis, mit dem in [4] viele Abschätzungen durchgeführt werden. Die Formulierung für Lösungen der Ungleichungen, die durch Satz 6 gegeben wird, ist für die Anwendung wichtig. In [4] erscheint Satz 6 als Folgerung aus einem anderen Vergleichssatz, s. [4: § 28 Fundamentalsatz über den Vergleich von Lösungen]. Hier ist er also, ebenso wie die Ergebnisse von Kozakiewicz, eine Folgerung aus unserem Satz 2. Von unserem Standpunkt aus unterscheiden sich die Beweise der Sätze 3 und 5 nur durch die Art, wie die reguläre Lösungsschar konstruiert wird.

D) Wir gehen noch kurz auf den eben erwähnten Fundamentalsatz über den Vergleich von Lösungen [4: Th. 34] ein. Dazu betrachten wir wieder ($30 \geqq$) und ($29 \leqq$). Es gilt der folgende Satz.

Satz 7: *Für zwei Werte* $T, \overline{T} \in (A, B)$ *sei*

$$\bar{r}(\bar{t}, +\infty) - \bar{r}(\bar{t}, \tau) \leqq r(t, +\infty) - r(t, \tau)$$

$$(A \leqq t < T,\ A \leqq \bar{t} < \overline{T},\ t \leqq \bar{t},\ 0 \leqq \tau < +\infty).$$

Sei f eine Lösung von ($30 \geqq$) *und g eine Lösung von* ($29 \leqq$), *wobei* (41) *und* (34) *gelten. Weiter seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$g \textit{ ist auf } [A, \overline{T}] \textit{ streng monoton fallend,} \tag{48}$$

$g(t-\tau) \geqq 0$, *falls* $A \leqq t < T$, $0 \leqq \tau \leqq \sigma(t)$ *und* τ *Wachstumspunkt von* $r(t,\cdot)$ *ist,*

$$f(t) \leqq g(A) \qquad (A \leqq t \leqq \overline{T}), \tag{49}$$

$$f(\overline{T}) \leqq g(T). \tag{50}$$

Dann folgt:

(i) $T \leqq \overline{T}$.
(ii) $g(t) \leqq f(t) \qquad (A \leqq t \leqq T)$.
(iii) *Sei W die Menge derjenigen $t \in [A, \overline{T}]$, für die gilt $f(t) \geqq g(T)$.*

Auf W sei durch

$$f(t) = g\big(t - v(t)\big) \qquad \big(t \in W,\ A \leqq t - v(t) \leqq T\big) \tag{51}$$

eine Funktion v definiert. Dann ist diese Funktion auf W monoton nichtfallend.

Nimmt man in Satz 7 für f und g Lösungen der Gleichungen (30 =) und (29 =), so erhält man [4: Th. 34]. (i) und (ii) entsprechen den dort б) und г) genannten Aussagen, während die dortigen Aussagen a) und в) aus (iii) folgen.

Die Aussagen (i) und (ii) von Satz 7 folgen sofort aus Satz 6. Setzt man nämlich $T^* = \min(T, \overline{T})$, so sind für das Intervall $[A, T^*)$ alle Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt. Also erhalten wir nach diesem Satz $g(t) \leqq f(t)$ $(A \leqq t < T^*)$. Wegen der Stetigkeit von f und g gilt dies auch für $t = T^*$. Wäre nun $\overline{T} < T$, so wäre $T^* = \overline{T}$ und wir würden wegen der strengen Monotonie von g auf $[A, T]$ und wegen (50) erhalten

$$g(T) < g(\overline{T}) \leqq f(\overline{T}) \leqq g(T).$$

Da dies nicht gelten kann, muß $T \leqq \overline{T}$ sein, also $T^* = T$. Damit sind (i) und (ii) als richtig erkannt.

(iii) ist nur zum Teil eine direkte Folgerung aus Satz 6. Zunächst sieht man, daß nach der Definition von W und der Voraussetzung (49) für $t \in W$ gilt

$$g(T) \leqq f(t) \leqq g(A).$$

Da g auf $[A, T]$ streng monoton fällt, folgt hieraus, daß durch (51) tatsächlich auf W eine Funktion v definiert wird. Wegen (34) ist $v(A) = 0$. Nach (ii) und (48) ist $f(t) \geqq g(t) \geqq g(T)$ $(A \leqq t \leqq T)$. Also gilt $[A, T] \subseteqq W$, und nach Satz 6 ist v auf $[A, T]$ monoton nichtfallend. Ist $T = \overline{T}$, so ist nichts mehr zu beweisen, im Fall $\overline{T} > T$ bleibt aber noch die Monotonie von v auf $W \cap [T, \overline{T}]$ zu zeigen. Bis auf diesen Teil folgt Satz 7 also direkt aus Satz 6 und damit aus unserem Satz 2.

Wir zeigen zum Schluß, daß sich die *Monotonie von v auf $W \cap [T, \overline{T}]$* in ähnlicher Weise zeigen läßt wie die Monotonie im Beweis von Satz 2. Wir führen nicht alle Einzelheiten des Beweises aus.

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß man analog wie beim Beweis von Satz 6 sieht, daß es genügt, den Beweis für den Fall eines auf $\mathcal{E}(A)$ monoton nichtwachsenden g zu führen. Sei dies also erfüllt. Weiter sei g im Fall $E(A) > -\infty$ wie im Beweis von Satz 5 auf $\big(-\infty, E(A)\big)$ fortgesetzt, wobei (39) erfüllt sei. Ist nun v auf $W \cap [T, \overline{T}]$ nicht monoton nichtfallend, so gibt es in $W \cap [T, \overline{T}]$ zwei Punkte P und Q mit $Q < P$ und $v(P) < v(Q)$. Sei dann $s^* = \max\{v(t) : t \in W \cap [A, P]\}$ und sei R die größte Stelle in $W \cap [A, P]$, in der das Maximum angenommen wird. Dann ist $0 \leqq s^*$, $T \leqq R < P \leqq \overline{T}$ und

$$v(t) \leqq s^* \qquad (A \leqq t \leqq R,\ t \in W), \tag{52}$$

$$v(R) = s^*, \tag{53}$$

$$v(t) < s^* \qquad (R < t \leqq P,\ t \in W). \tag{54}$$

Es gilt

$$A \leqq t - v(t) \leqq T \qquad (t \in W), \tag{55}$$

also auch $A \leqq R - v(R) \leqq T$. Wäre nun $R - v(R) = T$, so wäre für alle $t \in W$ mit $R < t$

$$v(t) = t - \big(t - v(t)\big) > R - T = v(R) = s^*$$

im Widerspruch zu (54). Also ist

$$A \leqq R - v(R) < T. \tag{56}$$

Wegen der strengen Monotonie von g auf $[A, T]$ folgt hieraus

$$f(R) = g\big(R - v(R)\big) > g(T). \tag{57}$$

Wir betrachten nun die durch $\tilde{g}(t) = g(t - s^*)$ $(t < T^{**})$ definierte Funktion $\tilde{g}$, $T^{**} = \min(\overline{T}, T + s^*)$. Wegen $R < \overline{T}$ und (56) ist $R < T^{**}$. Wählen wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so ist $R + \varepsilon < \min(T^{**}, P)$ und wegen (56) und (57) gilt für $R \leqq t \leqq R + \varepsilon$

$$A \leqq t - s^* < T, \tag{58}$$

$$f(t) > g(T). \tag{59}$$

Nach (59) ist $t \in W$ für $R \leqq t \leqq R + \varepsilon$. Da außerdem $R + \varepsilon < P$ ist, gilt nach (54)

$$v(t) < s^* \qquad (R < t \leqq R + \varepsilon). \tag{60}$$

Beachten wir (48) sowie (55), (58) und (60), so erhalten wir

$$f(t) = g\big(t - v(t)\big) < g(t - s^*) = \tilde{g}(t) \qquad (R < t \leqq R + \varepsilon). \tag{61}$$

Andererseits kann man wie beim Beweis von Satz 5 sehen, daß $\tilde{g}$ auf $[R, T^{**})$ Lösung von (30 $\leqq$) ist. Außerdem kann man wegen (52), (53) und der Definition von W zeigen

$$f(t) \leqq \tilde{g}(t) = g(t - s^*) \qquad \big(t \in \overline{\mathscr{E}}(R)\big),$$

$$f(R) = \tilde{g}(R) = g(R - s^*).$$

Wenden wir nun Satz 1 auf $f, \tilde{g}$ und den Anfangspunkt R an, so erhalten wir die Existenz eines C mit $R < C < T^{**}$ und $\tilde{g}(t) \leqq f(t)$ $(R \leqq t \leqq C)$, was im Widerspruch zu (61) steht. Damit ist die Monotonie von v auf $W \cap [T, \overline{T}]$ bewiesen ∎

LITERATUR

[1] Kozakiewicz, E.: Über das asymptotische Verhalten der nichtschwingenden Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit nacheilendem Argument. Wiss. Z. Humb.-Univ. Berlin, Math.-Nat. R. 13 (1964), 577–589.

[2] Kozakiewicz, E.: On the asymptotic behaviour of positive solutions of two differential inequalities with retarded argument. In: Differential Equations (Proc. Conf. Keszthely (Hungary) 1975, ed.: M. Farkas) Coll. Math. Soc. J. Bolyai 15 (1977), 309–319.

[3] Morgenthal, K.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit Nachwirkung. Z. Anal. Anw. 4 (1985), 107–124.

[4] Мышкис, А. Д.: Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (изд-не 2-ое). Москва: Изд-во Наука 1972.

Manuskripteingang: 02. 04. 1984

VERFASSER:

Dr. Klaus Morgenthal
Sektion Mathematik der Humboldt-Universität
DDR-1086 Berlin, Unter den Linden 6