

Universale Rettungskurven I¹⁾

R. KLÖTZLER

Es wird in dieser Arbeit nach einer Kurve minimaler Länge geforscht, welche von jedem Punkt eines beliebigen Sees gegebener Dicke bei beliebiger Startrichtung ans Ufer führt. Mit Mitteln der Dualität bei Steuerungsproblemen wird analytisch im Teil I unter speziellen Strukturannahmen eine (bis auf Kongruenz) eindeutige Lösung gefunden.

В работе разведывается кривая наименьшей длины, доводящей с озера данной ширины к берегу при условиях, что исходная точка и начальное направление произвольны. Посредством двойственности в задачах оптимального управления и при частных структурных предположениях в части I находится аналитически единственное до конгруэнтности решение проблемы.

Object of this paper is the search for a curve of minimal length and with the property by arbitrary starting directions to join each point and the shore of any lake with given thickness. In part I the unique solution (apart from congruence) is found by means of duality in optimal control and a special structure hypothesis.

1. Einleitung

Ein Pilot eines Flugzeuges sei in einem See notgelandet. Es stehe ein motorgetriebenes Rettungsboot zur Verfügung. Wie groß muß dann jenes Mindestquantum an Bewegungsenergie sein, mit dem der Pilot unter ungünstigsten Umständen mit Sicherheit das Seeufer erreicht, wenn keine Sicht vorliegt, keine geographische Kenntnis bez. des Sees und Aufschlagpunktes, sondern lediglich die Kenntnis, daß der See die Dicke Δ_0 besitzt? Mit der Lösung dieser Aufgabe steht zugleich die Klärung des Problems, welchen Kurs das Rettungsboot einzuschlagen hat, damit es während seiner Fahrt (ungeachtet der gewählten Startrichtung) garantiert auf das Ufer auftrifft oder dieses berührt. — Es ist evident, daß der geradlinige Kurs bestimmt nicht der optimale ist, denn bei einem See mit sehr großem Durchmesser relativ zur Dicke würde ein geradliniger Kurs in „Längsrichtung“ des Sees dazu führen, daß mit der verfügbaren Energie das Ufer nicht erreicht wird. Es ist vielmehr zu erwarten, daß ein recht „sperriger“ Kurs eine optimale Lösung bildet.

In Anlehnung an entsprechende Termini von W. BLASCHKE [2] und H. MIKOWSKI [5] (dort beschränkt auf konvexe Mengen) benutzen wir dabei die Begriffe Dicke und Durchmesser in folgendem Sinne. Ist h die Stützfunktion eines ebenen Bereichs \mathfrak{B} und $h(\varphi)$ ihr Wert zum Richtungswinkel φ , so heißt

$$B(\varphi) := h(\varphi) + h(\varphi + \pi) \quad \text{Breite von } \mathfrak{B} \text{ in Richtung } \varphi,$$

$$\Delta(\mathfrak{B}) := \min_{[0, 2\pi]} B(\varphi) \quad \text{Dicke von } \mathfrak{B},$$

$$D(\mathfrak{B}) := \max_{[0, 2\pi]} B(\varphi) \quad \text{Durchmesser von } \mathfrak{B}.$$

¹⁾ Der abschließende Teil II dieses Beitrages wird in Kürze ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen.

Nach einigen geometrischen Vordiskussionen wird die gestellte Aufgabe auf die analytische Form eines Steuerungsproblems gebracht und mit Mitteln der Dualitätstheorie zu Steuerungsproblemen gelöst gemäß R. KLÖTZLER [3] und ANDREJEWA und KLÖTZLER [1]. Der Autor dankt Prof. F. L. TSCHERNOUSKO (Moskau) für dessen Anregung zu dieser interessanten Fragestellung.

2. Geometrische Vorbetrachtungen

Unter der stillschweigenden Annahme, daß auf dem See keine Strömungen herrschen, ist der zurückgelegte Weg des Rettungsbootes proportional der aufgewandten Bewegungsenergie. Aus diesem Grunde ist die Ausgangsfrage offensichtlich damit äquivalent, unter den gegebenen Umständen eine Bahnkurve \mathcal{C} kleinster Länge $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ zu finden, die bei beliebiger Struktur eines Sees der Dicke Δ_0 , beliebigem Startpunkt im See und beliebiger Drehung (Startrichtung) garantiert ans Ufer führt.

Ist \mathfrak{B} der Bereich eines Sees der Dicke Δ_0 , so hat auch $\mathfrak{B} = \text{conv } \mathfrak{B}$ die Dicke Δ_0 . Wenn man also mit \mathcal{C} den Rand $\partial\mathfrak{B}$ von \mathfrak{B} erreicht, so garantiert auch den Rand $\partial\mathfrak{B}$ von \mathfrak{B} . Aus diesem Grunde genügt es, sich im weiteren auf *konvexe* Seen der Dicke Δ_0 zu beschränken. Da aber wiederum jeder konvexe Bereich $\mathfrak{B} \subset \mathbb{E}^2$ der Dicke Δ_0 in einen Parallelstreifen Σ der Dicke Δ_0 eingebettet werden kann, genügt es sogar, sich bei unseren weiteren Diskussionen auf streifenförmige Seen Σ der Dicke Δ_0 zu beschränken.

Wir wollen noch die folgende Vereinbarung treffen: Ist der Startpunkt von \mathcal{C} auf $\partial\mathfrak{B}$, so wollen wir zulassen, daß der Pilot in der Aufregung der Notlandung gar nicht bemerkt, schon am Ufer zu sein, und einen ungünstigen Kurs hinaus auf den See einschlägt. Wenn er aber aus dem Startpunkt heraus ist, soll die Aufmerksamkeit des Piloten inzwischen so geschärft sein, daß er jede Berührung mit $\partial\mathfrak{B}$ bemerkt. Schließlich können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit den Startpunkt aller zu untersuchenden Bahnkurven in einen willkürlichen, aber festen Anfangspunkt A legen, da die Bestimmung der optimalen Kurven ohnehin nur bis auf Kongruenz interessiert. Aus dieser vorgenommenen Sicht empfiehlt sich die Verwendung der folgenden Definition.

Definition: Eine rektifizierbare Kurve \mathcal{C} des \mathbb{E}^2 mit der Parameterdarstellung $z(s)$ zum Bogenlängenparameter $s \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$ heißt (*universale*) *Rettungskurve* (zur gegebenen Dicke Δ_0), wenn unter Verwendung der Bezeichnung $\mathcal{C}_0 = \{z(s) \in \mathbb{E}^2 \mid s' \in (0, \mathcal{L}(\mathcal{C}))\}$ jeder die Voraussetzungen $z(0) \in \Sigma$ und $\mathcal{C}_0 \cap \text{int } \Sigma \neq \emptyset$ erfüllende Parallelstreifen Σ der Dicke Δ_0 die Eigenschaft $\partial\Sigma \cap \mathcal{C}_0 \neq \emptyset$ besitzt.

Hilfssatz 1: Ist \mathcal{C} eine Rettungskurve, so muß $\Delta(\text{conv } \mathcal{C}) \geq \Delta_0$ sein.

Beweis: Wäre für eine Rettungskurve \mathcal{C} die Eigenschaft $\Delta(\text{conv } \mathcal{C}) < \Delta_0$ erfüllt, so können wir einen Parallelstreifen Σ der Dicke Δ_0 finden, so daß $\text{conv } \mathcal{C} \subset \text{int } \Sigma$ und damit $\mathcal{C} \subset \text{int } \Sigma$ gilt. \mathcal{C} würde also nicht den Rand $\partial\Sigma$ von Σ treffen im Widerspruch zu seiner Eigenschaft als Rettungskurve ■

Hilfssatz 2: Gilt für eine rektifizierbare Kurve \mathcal{C} des \mathbb{E}^2 die Gleichung $\Delta(\text{conv } \mathcal{C}) \geq \Delta_0$, so ist \mathcal{C} eine Rettungskurve.

Beweis: \mathcal{C} genüge den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 und besitze eine Parameterdarstellung $z(s)$ in Abhängigkeit des Bogenlängenparameters s . Wir nehmen an, \mathcal{C} ist keine Rettungskurve. Dann gibt es einen speziellen Parallelstreifen Σ der Dicke Δ_0 , welcher die Eigenschaften $z(0) \in \Sigma$, $\mathcal{C}_0 \cap \text{int } \Sigma \neq \emptyset$ und $\partial\Sigma \cap \mathcal{C}_0 = \emptyset$ besitzt. Wegen $\mathcal{C}_0 \cap \text{int } \Sigma \neq \emptyset$ und $\Delta(\text{conv } \mathcal{C}) \geq \Delta_0$ enthält $\partial\Sigma \cap \text{conv } \mathcal{C}$ mindestens

zwei verschiedene Punkte. Einer von diesen, P genannt, ist dann garantiert ungleich $z(0)$. Der Fall $P \in \mathbb{C}_0$ kann nicht eintreten, da dann \mathbb{C} entgegen der Annahme doch eine Rettungskurve wäre. Daher muß P als Element von $\text{conv } \mathbb{C}$ konvexe Linearkombination zweier Punkte P_1 und P_2 von \mathbb{C} sein: $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ mit $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2$), $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Da \mathbb{C} keine Rettungskurve sein soll, können $P_1 = z(s_1)$ und $P_2 = z(s_2)$ nicht auf dem gleichen Randkontinuum (der Geraden) \mathbb{G} von Σ liegen, dem auch P angehört; sie liegen vielmehr auf verschiedenen Seiten von \mathbb{G} . Da \mathbb{C} eine zusammenhängende Punktmenge ist, existiert ein $\bar{s} \in (s_1, s_2)$ mit $z(\bar{s}) \in \mathbb{G} \subset \partial \Sigma$ und $z(\bar{s}) \in \mathbb{C}_0$ wegen $\bar{s} > 0$. Somit wäre \mathbb{C} doch eine Rettungskurve im Widerspruch zur Annahme' ■

Hilfssatz 3: *Unter allen Rettungskurven gibt es eine von kleinster Länge. Wir nennen eine solche optimale Rettungskurve.*

Beweis: Im Sinne unserer einführenden Überlegungen können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von den zu betrachtenden Rettungskurven \mathbb{C} der Parameterdarstellung $z(s)$ verlangen, daß sie alle im gleichen Anfangspunkt A starten, d. h., $z(0) = A$. Die Menge \mathfrak{M} aller rektifizierbaren Kurven des E^2 mit gleichem Anfangspunkt A und gleichmäßig nach oben beschränkter Länge ist nach D. HILBERT im metrischen Raum Q (vgl. [4: S. 46]) folgenkompakt. Außerdem ist $\Delta(\text{conv } \dots)$ nach W. BLASCHKE [2] auf \mathfrak{M} ein stetiges Funktional in der Metrik von Q . Deshalb bildet nach Hilfssatz 1 die Teilmenge \mathfrak{M}_0 aller Rettungskurven von \mathfrak{M} eine folgenkompakte und abgeschlossene Menge in Q . Da weiterhin in Q das Funktional \mathfrak{L} der Bogenlänge unterhalbstetig ist, besitzt es nach dem Satz von Weierstraß auf \mathfrak{M}_0 und damit in der Menge aller Rettungskurven ein Minimum ■

Hilfssatz 4: *Hat eine optimale Rettungskurve \mathbb{C} die Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Punkte einfach sind und in einer Halbebene bezüglich einer durch Start- und Zielpunkt von \mathbb{C} verlaufenden Geraden liegen, so sind sämtliche Punkte von \mathbb{C} Randpunkte von $\text{conv } \mathbb{C}$.*

Beweis: A und Z seien Start- bzw. Zielpunkte einer optimalen Rettungskurve \mathbb{C} (wir lassen auch zu, daß A und Z zusammenfallen können). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß gemäß Abbildung 1 \mathbb{C} oberhalb der Geraden g verläuft.

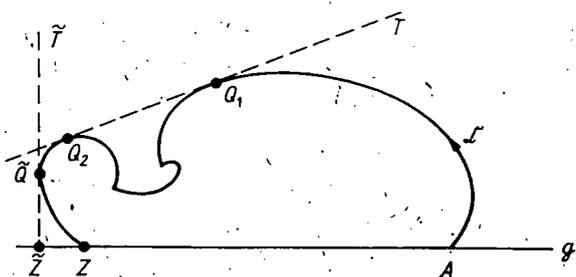


Abb. 1

Wäre nun \mathbb{C} nicht vollkommen auf dem Rand $\partial(\text{conv } \mathbb{C})$ von $\text{conv } \mathbb{C}$ enthalten, so gäbe es eine spezielle Sekante T von \mathbb{C} mit zwei voneinander verschiedenen Berührungspunkten Q_1 und Q_2 , so daß $\overline{Q_1 Q_2} \subset \mathbb{C}$ ist. Setzen wir diese Strecke durch die Bogenstücke $\widehat{AQ_1}$ und $\widehat{Q_2 Z}$ von \mathbb{C} fort, so hätte die entstehende Kurve $\hat{\mathbb{C}} = \widehat{AQ_1} \cup \overline{Q_1 Q_2} \cup \widehat{Q_2 Z}$ die Eigenschaft $\text{conv } \hat{\mathbb{C}} = \text{conv } \mathbb{C}$ und eine kleinere Länge als \mathbb{C} . Das steht im Widerspruch zur Optimalität von \mathbb{C} ■

Hilfssatz 5: *Hat eine optimale Rettungskurve \mathcal{C} die im Hilfssatz 4 vorausgesetzte Eigenschaft, so sind im Start- und Zielpunkt A bzw. Z die Senkrechten zur Verbindungsstrecke \overline{AZ} Stützgeraden von $\text{conv } \mathcal{C}$.*

Beweis: Wir verdeutlichen unsere Schlußweise wieder an Abbildung 1. Wir nehmen etwa an, daß der Hilfssatz 5 im Zielpunkt Z nicht erfüllt sei. Dann legen wir an $\text{conv } \mathcal{C}$ von links eine Stützgerade \overline{T} senkrecht zu g . Der Berührungspunkt von \overline{T} mit $\text{conv } \mathcal{C}$ sei \overline{Q} , der Schnittpunkt von \overline{T} mit g sei \overline{Z} . Nach Voraussetzung ist $\overline{Z} \neq Z$. Deshalb hat die Kurve $\overline{\mathcal{C}} = \overline{A\overline{Q}} \cup \overline{\overline{Q}\overline{Z}}$ eine kleinere Länge als \mathcal{C} , wenn $\overline{A\overline{Q}}$ das entsprechende Bogenstück auf \mathcal{C} von A nach \overline{Q} bezeichnet. Da wegen $\text{conv } \overline{\mathcal{C}} \supset \text{conv } \mathcal{C}$ die Dicke $\Delta(\text{conv } \overline{\mathcal{C}}) \geq \Delta(\text{conv } \mathcal{C})$ ist, stellt $\overline{\mathcal{C}}$ nach Hilfssatz 2 eine Rettungskurve kleinerer Länge als \mathcal{C} dar. Das steht im Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von \mathcal{C} . Folglich war die Annahme falsch. Entsprechend schließen wir für den Punkt A ■

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchungen wird zunächst unter allen Rettungskurven, die die in Hilfssatz 4 genannte spezielle Eigenschaft besitzen, auf analytischem Wege die optimale Rettungskurve (eindeutig bis auf Kongruenz) gefunden. Die dazu eingesetzten Hilfsmittel zur Dualität bei Steuerungsproblemen werden im nachfolgenden Kapitel bereitgestellt.

3. Hilfsmittel aus der Dualitätstheorie bei Steuerungsproblemen

Aus dem oben schon erwähnten Artikel [1] entnehmen wir speziell für Steuerungsprobleme zu Funktionen einer Variablen ein Kriterium über Minimalfolgen von Prozessen. Wir betrachten dazu das Steuerungsproblem

$$J(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (1)$$

bez. aller Zustandsfunktionen $x \in X$ und Steuerfunktionen $u \in U(x)$, die den vektoriellen Nebenbedingungen (Zustandsgleichungen) $\dot{x} = g(t, x, u)$ auf $[0, T]$ sowie den Randbedingungen $b(x) = 0$ zu den Punkten $t = 0$ und $t = T$ genügen. Dabei ist mit $p > 1$

$$X := \{x \in W_p^{1,n}(0, T) \mid (t, x(t)) \in \overline{G} \text{ für alle } t \in [0, T]\},$$

$$U(x) := \{u \in L_p^r(0, T) \mid u(t) \in V(t, x(t)) \text{ fast überall auf } [0, T]\}.$$

G sei im Sinne von C. B. MÖRREY ein starkes Lipschitzgebiet des E^{1+n} ; f und die n Komponenten g^i von g setzen wir als stetige Funktionen voraus. V sei eine stetige normale mengenwertige Abbildung von \overline{G} in den E^r . Ein Paar (x, u) zulässiger Zustands- und Steuerfunktionen zu (1) nennen wir einen *Prozeß* (zu (1)), ihre Gesamtheit bezeichnen wir mit \mathfrak{P} . Eine Folge $(x_k, u_k) \in \mathfrak{P}$ heißt *Minimalfolge* zu (1); wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} J(x_k, u_k) = \inf_{\mathfrak{P}} J$ gilt.

Mit $\tilde{\mathcal{E}}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen S auf \overline{G} mit folgenden Eigenschaften:

1. Es existiert eine (von S abhängige) Zerlegung von $[0, T]$ in endlich viele Intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ ($\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_{s+1} = T$), so daß S stetig differenzierbar auf jedem Teilgebiet

$$G_i(S) = \{(t, \xi) \in G \mid t \in (\tau_i, \tau_{i+1})\}$$

ist und stetig auf \overline{G}_i fortgesetzt werden kann.

2. S genügt in $G_i(S)$ ($i = 0, \dots, \kappa$) der Hamilton-Jacobischen Differentialungleichung

$$S'_i(t, \xi) + \mathcal{H}(t, \xi, S_i(t, \xi)) \leq 0, \tag{2}$$

wobei \mathcal{H} die Hamilton-Funktion zu (1) gemäß

$$\mathcal{H}(t, \xi, y) := \sup_{v \in V(t, \xi)} H(t, \xi, v, y)$$

und

$$H(t, \xi, v, y) := -f(t, \xi, v) + y^T g(t, \xi, v)$$

die Pontrjaginsche Funktion ist.

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen sowie

$$\hat{Q} := \{\zeta \in C[0, T]^n \mid (t, \zeta(t)) \in \bar{G} \text{ und } b(\zeta) = 0\}$$

gilt dann nach [1] in leichter Modifikation des dortigen Satzes 4 folgendes Minimalfolgen-Kriterium.

Satz 1: Es sei $S \in \hat{\mathcal{C}}$ von der Art, daß $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, S_i(\cdot, \cdot))$ beschränkt und stetig in jedem Teilgebiet $G_i(S)$ ($i = 0, \dots, \kappa(S)$) ist. Außerdem sei x eine in jedem der Intervalle (τ_i, τ_{i+1}) stetige und auf $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ stetig fortsetzbare Funktion, die (bez. der Konvergenz dem Maße nach) als Grenzfunktion einer Folge von Zustandfunktionen x_k zulässiger Prozesse $(x_k, u_k) \in \mathfrak{P}$ aufgefaßt werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen ist (x_k, u_k) dann eine Minimalfolge zu (1), wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T H(t, x_k(t), u_k(t), S_i(t, x_k)) dt = \int_0^T \mathcal{H}(t, x, S_i(t, x)) dt, \tag{3a}$$

$$S'_i(t, x(t)) + \mathcal{H}(t, x(t), S_i(t, x(t))) = 0 \text{ f.ü. in } (0, T), \tag{3b}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\kappa} S(t, x_k(t)) \Big|_{\tau_i+0}^{\tau_{i+1}-0} = \inf_{\zeta \in \hat{Q}} \sum_{i=0}^{\kappa} S(t, \zeta(t)) \Big|_{\tau_i+0}^{\tau_{i+1}-0}. \tag{3c}$$

Gilt (3) für (x_k, u_k) und x , so muß diese Bedingung in entsprechender Weise auch für jede andere Minimalfolge $(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k)$ und \tilde{x} erfüllt sein, wenn \tilde{x}_k dem Maße nach gegen \tilde{x} konvergiert.

4. Zur Lösung eines zugeordneten Steuerungsproblems

Wir wollen uns in diesem Abschnitt damit begnügen, unter allen Rettungskurven \mathcal{C} , die der Eigenschaft von Hilfssatz 4 genügen, diejenigen kleinster Länge zu finden. Für diese ist nach Hilfssatz 4 \mathcal{C} ein Randstück von $\text{conv } \mathcal{C}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir uns im Sinne von Abbildung 1 die Gerade y so gelegt denken, daß sie durch den Pol O eines Polarkoordinatensystems geht und die Richtung des Leitstrahls zum Winkel $\varphi = 0$ einnimmt. Anfangs- und Endpunkt A bzw. Z von \mathcal{C} denken wir uns in symmetrischer Lage zu O . Ist dann h die Stützfunktion zu $\text{conv } \mathcal{C}$ in Abhängigkeit von $\varphi \in [0, \pi]$, so hat wegen Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5 nach [2] die Länge von \mathcal{C} die Integraldarstellung

$$L(\mathcal{C}) = \int_0^{\pi} h(t) dt. \tag{4a}$$

Wegen Hilfssatz 5 gilt

$$\dot{h}(0) = \dot{h}(\pi) = 0 \quad (4b)$$

und infolge der symmetrischen Lage von A und Z bez. O gilt

$$h(0) = h(\pi) = \alpha. \quad (4c)$$

Nach den Hilfssätzen 1 und 2 ist für alle $t \in [0, \pi]$ die Breite $B(t)$ von $\text{conv } \mathcal{C}$ durch die Bedingung

$$B(t) = h(t) + \alpha |\cos t| \geq \Delta_0 \quad (4d)$$

eingeschränkt. Außerdem ist nach [2] zu fast allen Winkeln t die Ungleichung

$$\dot{h}(t) + \dot{h}(t) \geq 0 \quad (4e)$$

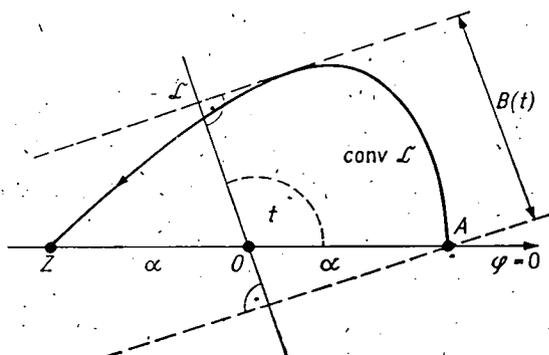


Abb. 2

erfüllt. Mit $x^1 = h$, $x^2 = \dot{h}$, $x^3 = \alpha$, $u = \dot{h} + h$ lautet folglich nach (4) die analytische Formulierung des zu Anfang dieses Abschnitts gestellten „eingeschränkten“ Optimierungsproblems:

$$J(x, u) = \int_0^\pi x^1(t) dt \rightarrow \inf \quad (5a)$$

unter den Zustandsgleichungen

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -x^1 + u, \quad \dot{x}^3 = 0, \quad (5b)$$

den Zustandsrestriktionen

$$x^1(t) + x^3 |\cos t| \geq \Delta_0, \quad (5c)$$

den Steuerrestriktionen

$$u(t) \geq 0 \text{ fast überall} \quad (5d)$$

und den Randbedingungen

$$x^1(0) = x^1(\pi) = x^3, \quad x^2(0) = x^2(\pi) = 0. \quad (5e)$$

²⁾ Da $h^2(t) + \dot{h}^2(t)$ das Quadrat des Abstandes des Berührungspunktes der Stützgeraden an $\text{conv } \mathcal{C}$ zum Winkel t von O darstellt, tritt eigentlich noch hinzu $(x^1)^2 + (x^2)^2 < N$ bei hinreichend großem N . Wir verzichten hier jedoch darauf.

Wir bemerken, daß auch unser eingeschränktes geometrisches Optimierungsproblem eine optimale Lösung besitzt; man zeigt dies mit gleichen Schlußweisen wie zum Beweis von Hilfssatz 3. Dennoch braucht das zugeordnete Steuerungsproblem (5) bei weitem keinen optimalen Prozeß aufzuweisen. Das liegt daran, daß wir in (5), wie in jedem allgemeinen Steuerungsproblem (1), die x^i als Elemente des $W_p^1(0, \pi)$ bzw. $W_p^1(0, T)$ und damit als stetige Funktionen auffassen. Zu jedem zulässigen \mathcal{C} mit endlichen Krümmungsradien haben die zugeordneten x^i in der Tat diese Eigenschaft. Wenn jedoch \mathcal{C} auch Geradenstücke enthält, besitzt x^2 Sprungstellen und ist somit als Zustandsfunktion nicht mehr zulässig. Wir können jedoch \mathcal{C} durch eine Folge von zulässiger stetig gekrümmter Kurven \mathcal{C}_k im Sinne der Metrik von Q beliebig genau annähern. Deshalb kommt der Berechnung des Infimums zu (5a) und einer zugeordneten Minimalfolge von Prozessen (x_k, u_k) die gleiche Bedeutung zu wie der Berechnung der optimalen Lösung zum eingeschränkten geometrischen Ausgangsproblem (vgl. dazu auch entsprechende Diskussionen in [1] und [3]).

Nunmehr wenden wir Satz 1 routinemäßig auf Problem (5) an. Hier lautet die Pontrjaginsche Funktion

$$H(t, \xi, v, y) = -\xi^1 + y_1 \xi^2 + y_2(-\xi^1 + v) + y_3 \cdot 0$$

und die Hamilton-Funktion berechnet sich zu

$$\mathcal{H}(t, \xi, y) = \begin{cases} -\xi^1 + y_1 \xi^2 - y_2 \xi^1 & \text{falls } y_2 \leq 0 \text{ ist} \\ \infty & \text{falls } y_2 > 0 \text{ ist.} \end{cases} \quad (6)$$

Da wir im weiteren die Bedingung (2) zu erfüllen suchen, kommt für uns in (6) nur der Fall $y_2 \leq 0$ in Betracht. In diesem Falle gilt $H(t, \xi, v, y) = \mathcal{H}(t, \xi, y)$ nur für $v \geq 0$ mit $v \cdot y_2 = 0$.

Für $S \in \mathcal{S}$ im Sinne von Satz 1 machen wir den Ansatz

$$S(t, \xi) = a(t) + \sum_{i=1}^3 y_i(t) \xi^i \quad \text{mit } y_i \in C^1(\tau_j, \tau_{j+1}). \quad (7)$$

Die Bedingung (2) lautet dann

$$a(t) + \sum_{i=1}^3 y_i(t) \xi^i - \xi^1 + y_1(t) \xi^2 - y_2(t) \xi^1 \leq 0 \quad (8a)$$

$$\text{für alle } t \in (\tau_j, \tau_{j+1}) \quad (j = 0, \dots, \kappa(S))$$

unter den Nebenbedingungen

$$\xi^1 + \xi^3 |\cos t| \geq \Delta_0. \quad (8b)$$

Nach (3b) fordern wir für $\xi = x(t)$ die Gleichheit in (8a). Aus diesem Grunde nimmt zu allen festen $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ die linke Seite von (8a) ihr Maximum unter der Nebenbedingung (8b) für $\xi = x(t)$ an. Nach KUHN und TUCKER ist notwendig und hinreichend dafür die Existenz eines Multiplikators $\mu(t) \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\dot{y}_1(t) - y_2(t) + \mu(t) - 1 = 0, \quad (9a)$$

$$\dot{y}_2(t) + y_1(t) = 0, \quad (9b)$$

$$\dot{y}_3(t) + \mu(t) |\cos t| = 0, \quad (9c)$$

$$\mu(t) [x^1(t) + x^3 |\cos t| - \Delta_0] = 0. \quad (9d)$$

(9a) und (9b) zusammengefaßt führt auf

$$\dot{y}_2 + y_2 = \mu - 1 \quad \text{fast überall auf } (0, \pi). \quad (10)$$

Für x fordern wir in allen $t \neq \tau_j$ ($j = 0, \dots, \kappa$) das Erfülltsein der Bedingung (5b) mit

$$u(t) \geq 0 \quad \text{und} \quad u(t) \cdot y_2(t) = 0 \quad (11)$$

und natürlich die Gültigkeit von (5c). Wir setzen $x^3 = \text{const} = c$ auf ganz $[0, \pi]$. Aus der Kenntnis von x und y berechnen wir a als stückweise stetig differenzierbare Funktion aus (8a) so, daß durch Einsetzen von $\xi = x(t)$ in (8a) das Gleichheitszeichen erzielt wird.

Zur Realisierung der Bedingung (3c) bemühen wir uns, die Existenz von

$$\min_{\hat{Q}} \sum_{j=0}^{\kappa} S(t, \zeta, (t)) \Big|_{\tau_j+0}^{\tau_{j+1}-0}$$

zu sichern und seinen Wert sowie seine Minimalstellen zu berechnen. Unter Beachtung der in \hat{Q} verankerten Randbedingungen $\zeta^1(0) = \zeta^1(\pi) = \zeta^3$, $\zeta^2(0) = \zeta^2(\pi) = 0$ und Nebenbedingungen $\zeta^1(\tau_j) + \zeta^3(\tau_j) |\cos \tau_j| \geq \Delta_0$ ist notwendig und hinreichend für diese Existenz die Gültigkeit der nachstehenden Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$y_1(\pi) - y_1(0) + y_3(\pi) - y_3(0) - \nu(0) \cdot 2 = 0, \quad (12a)$$

$$y_1(\tau_j - 0) - y_1(\tau_j + 0) - \nu(\tau_j) = 0, \quad (12b)$$

$$y_2(\tau_j - 0) - y_2(\tau_j + 0) = 0, \quad (12c)$$

$$y_3(\tau_j - 0) - y_3(\tau_j + 0) - \nu(\tau_j) |\cos \tau_j| = 0 \quad (12d)$$

mit Lagrangeschen Multiplikatoren $\nu(0) \geq 0$ und $\nu(\tau_j) \geq 0$ (für $\tau_j \neq 0$, $\tau_j \neq \pi$), die die Komplementaritätsbedingungen

$$\nu(0) [x^1(0) + x^3 - \Delta_0] = 0, \quad (12e)$$

$$\nu(\tau_j) [x^1(\tau_j) + x^3 |\cos \tau_j| - \Delta_0] = 0 \quad (12f)$$

erfüllen. (12c) läßt uns folgern, daß generell y_2 stetig zu sein hat.

Man bestätigt leicht, daß mit $\tau(S) = 5$ und $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 = \frac{\pi}{2} < \tau_4 = \pi - \tau_2 < \pi - \tau_1 = \tau_5$ das folgende Funktionensystem die Bedingungen (9) bis (12) erfüllt:

$$\left. \begin{aligned} x^1(t) &= \begin{cases} c \cos t & \text{in } [0, \tau_1] \\ \Delta_0 - c \cos t & \text{in } [\tau_1, \tau_2] \\ \Delta_0 \sin t & \text{in } [\tau_2, \tau_3] \end{cases} \\ &\text{mit } x^1(\pi - t) = x^1(t), \\ x^2(t) &= \dot{x}^1(t), \\ x^3(t) &= c = \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \tau_1), (\tau_2, \tau_3] \\ 1 & \text{in } [\tau_1, \tau_2] \end{cases} \quad \text{mit } \mu(\pi - t) = \mu(t), \quad (13b)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \tau_1), (\tau_2, \tau_3] \\ \Delta_0 & \text{in } (\tau_1, \tau_2) \end{cases} \quad \text{mit } u(\pi - t) = u(t), \quad (13c)$$

$$y_1(t) = -\dot{y}_2(t),$$

$$y_2(t) = \begin{cases} -1 + \cos(t - \tau_1) & \text{in } [0, \tau_1] \\ 0 & \text{in } [\tau_1, \tau_2] \\ -1 + \cos(t - \tau_2) & \text{in } [\tau_2, \tau_3] \end{cases} \quad (13d)$$

mit $y_2(\pi - t) = y_2(t)$,

$$y_3(t) = - \int_0^t \mu(s) |\cos s| ds \text{ in } [0, \pi];$$

$$\begin{aligned} v(0) = v(\tau_1) = v(\tau_2) = v(\tau_4) = v(\tau_5) = 0, \\ v(\tau_3) = y_1(\tau_3 - 0) - y_1(\tau_3 + 0). \end{aligned} \quad (13e)$$

Dabei errechnen sich τ_1, τ_2 und c aus der Bedingung (12a) und aus den Stetigkeitsforderungen von x^1 in $t = \tau_1$ und $t = \tau_2$. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$2 \sin \tau_1 - \int_0^\pi \mu(t) |\cos t| dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad 2 \sin \tau_1 = \sin \tau_2, \quad (14a)$$

$$c \cos \tau_1 = \Delta_0 - c \cos \tau_1 \quad \text{bzw.} \quad 2c \cos \tau_1 = \Delta_0, \quad (14b)$$

$$\Delta_0 - c \cos \tau_2 = \Delta_0 \sin \tau_2. \quad (14c)$$

(14b) und (14a) ergeben unter Elimination von c

$$1 - \frac{\cos \tau_2}{2 \cos \tau_1} = \sin \tau_2$$

bzw. mit (14a)

$$2 \cos \tau_1 - \sqrt{1 - 4 \sin^2 \tau_1} = 4(\sin \tau_1) (\cos \tau_1). \quad (15)$$

Setzen wir $\sigma = \sin \tau_1$, so erhalten wir nach einer kleinen Umformung aus (15) die biquadratische Gleichung

$$\sigma^4 - \sigma^3 - \sigma^2 + \sigma - \frac{3}{16} = \left(\sigma^3 - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{5}{4}\sigma + \frac{3}{8}\right) \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (16)$$

Diese hat die vier reellen Nullstellen

$$\sigma_1 \approx -1,04307, \quad \sigma_2 \approx 0,28600, \quad \sigma_3 = 0,5, \quad \sigma_4 \approx 1,25707.$$

Davon erfüllt nur σ_2 die wegen $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 = \frac{\pi}{2}$ notwendigen Restriktionen $0 < \sigma_i < 0,5$; auch (15) wird damit befriedigt. Das ergibt

$$\tau_1 = \arcsin \sigma_2 \approx 16,61843^\circ, \quad c = \Delta_0 / (2 \cos \tau_1) \approx 0,52180 \Delta_0,$$

$$\tau_2 = \arcsin (2 \sin \tau_1) \approx 34,88934^\circ, \quad \beta = \arcsin (\Delta_0 / c) \approx 62,44467^\circ$$

und

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}) = 2\Delta_0 [\tan \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \tan (\beta - \tau_2)] \approx 2,27829 \Delta_0.$$

Wir skizzieren wesentliche Elemente des Funktionensystems (13) durch die nachfolgende Abbildung 3.

Man beachte sehr wohl, daß durch (13) keine zulässige Zustandsfunktion zu (5) beschrieben wird, denn $x^2 = \dot{x}^1$ ist nicht einmal stetig in $t = \tau_1$ und $t = \tau_2$. In Analogie zu [1: S. 42] können wir aber leicht zu x eine Folge zulässiger Prozesse

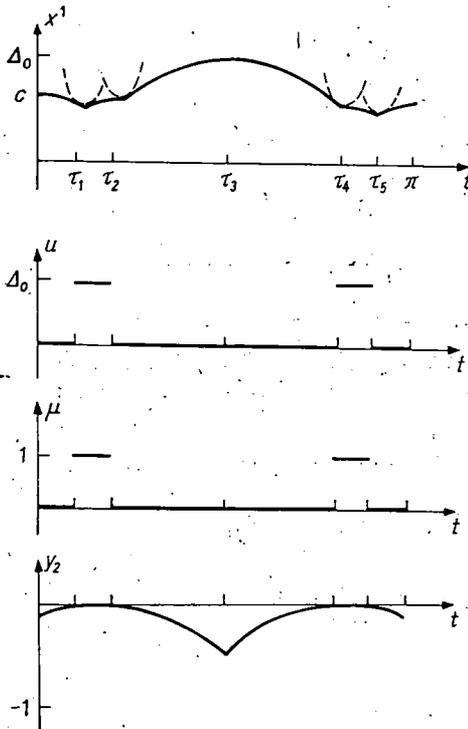


Abb. 3

(x_k, u_k) konstruieren, für die x_k dem Maß nach gegen x konvergiert und für die sämtliche Bedingungen von (3) erfüllt sind. Dies geschieht, indem wir den Graph von x^1 in Umgebungen seiner Knickstellen τ_1, τ_2, τ_4 und τ_5 von oben durch zweipunktig berührende Parabeln (in Abb. 3 gestrichelt angedeutet) des Gleichungstyps $x^1 = kt^2 + a_k t + b_k$ abrunden. Dieser abgerundete Graph ist Graph einer Stützfunktion x_k^1 , aus der wir den gesamten zugeordneten zulässigen Prozeß (x_k, u_k) durch $x_k^2 := \hat{x}_k^1$, $u_k := \hat{x}_k^1 + x_k^1$ definieren. x^1 ist somit in $[0, \tau]$ Grenzfunktion der Folge regulärer Stützfunktionen x_k^1 , also selber Stützfunktion. Sie beschreibt gemäß (13a) und Abb. 2 den oberen Rand $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ eines konvexen Bereiches $\text{conv } \mathcal{C}^*$, dessen unterer Rand (Basis) die Strecke \overline{AZ} der Länge $2 \cdot c$ ist. Der Bereich $\text{conv } \mathcal{C}^*$ ist dabei im Sinne der von M. SHOLÄNDER in [6] eingeführten Bezeichnung ein ungleichseitiges, aber gleichschenkliges Yamanouti-Dreieck. Es entsteht als konvexe Hülle eines gleichschenkligen Dreiecks \widehat{ARZ} der Basis \overline{AZ} , der Höhe Δ_0 , und allen Kreisbögen um A, Z, R vom Radius Δ_0 (bis zum Schnitt mit den Dreieckseiten) gemäß Abb. 4.

Zusammenfassend haben wir somit folgendes Resultat erhalten:

Satz 2: *Unter allen Rettungskurven, deren sämtliche Punkte einfach sind und auf einer Seite der Verbindungsgeraden von Start- und Zielpunkt liegen, hat die Randkurve \mathcal{C}^* des Yamanouti-Dreiecks gemäß Abb. 4 und analytischer Darstellung (13) die kleinste Länge. Sie beträgt $\approx 2,27829\Delta_0$.*

Anmerkung 1: Man kann leicht zeigen, daß unter allen der Eigenschaft von Hilfssatz 4 genügenden Rettungskurven die im Satz 2 angegebene Kurve \mathcal{C}^* bis auf Kongruenz die *einzigste* optimale ist.

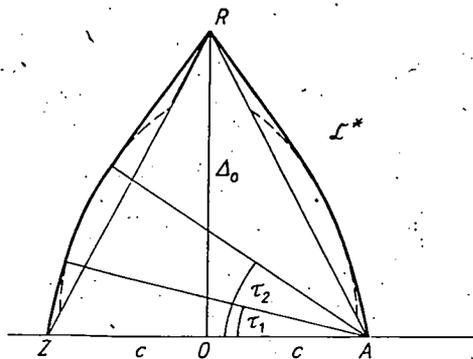


Abb. 4

Beweis: Gäbe es noch eine andere optimale Rettungskurve mit der Stützfunktion \hat{x}^1 über $[0, \pi]$, so existiert nach [2] eine Folge regulärer zulässiger Stützfunktionen \tilde{x}_k^1 , die im $W_p^1(0, \pi)$ gegen \hat{x}^1 konvergiert. Nach Satz 1 müßte dann auch die Bedingung (3) durch $(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k)$ mit $\tilde{x}_k^2 := \tilde{x}_k^1, \tilde{u}_k := \tilde{x}_k^1 + \tilde{x}_k^1$ erfüllt sein. Dabei wählen wir S genauso wie in der Konstruktion von Kapitel 4. Somit müßte \tilde{x} wegen (3b) und (3c) — bei gleichem y^2 und damit gleichem μ bzw. $\nu(\tau_j)$ — auch den Bedingungen (9d) und (12c/f) genügen. Somit ist wegen $\nu(\tau_3) \neq 0$ und $\mu(t) > 0$ in $(\tau_1, \tau_2) \cup (\tau_4, \tau_5)$

$$\hat{x}^1(\tau_3) = \Delta_0 \quad \text{und} \quad \hat{x}^1(t) + \hat{x}^3 |\cos t| = \Delta_0, \tag{17}$$

für $t \in (\tau_1, \tau_2) \cup (\tau_4, \tau_5)$,

wobei $\hat{x}^3 = \hat{x}^1(0) = \hat{x}^1(\pi)$ bedeutet. Dort, wo aber $\mu(t) = 0$ ist, gilt $y_2(t) < 0$. Und da nach (3a) — angewandt auf $(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k)$ und \tilde{x} —

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\pi \tilde{u}_k(t) y_2(t) dt = 0$$

gelten muß neben $\tilde{u}_k \geq 0$ und $y_2(t) \leq 0$, konvergiert \tilde{u}_k notwendig auf $[0, \pi] \setminus ((\tau_1, \tau_2) \cup (\tau_4, \tau_5))$ dem Maße nach gegen die Nullfunktion. Daraus resultiert unter Beachtung der ersten Gleichung von (17), daß \hat{x}^1 in (τ_2, τ_4) die Darstellung $\hat{x}^1 = x^1 + A \cos t$ besitzt. Die Konstante A hat dabei wegen der Stetigkeit von \hat{x}^1 in $t = \tau_2$ und $t = \tau_4$ und wegen der zweiten Relation von (17) die Bedingungen

$$x^1(\tau_2) + A \cos \tau_2 = \Delta_0 - \hat{x}^3 |\cos \tau_2|,$$

$$x^1(\tau_4) + A \cos \tau_4 = \Delta_0 - \hat{x}^3 |\cos \tau_4|$$

zu erfüllen. Wegen

$$x^1(\tau_2) = \Delta_0 - \hat{x}^3 |\cos \tau_2| \quad \text{und} \quad x^1(\tau_4) = \Delta_0 - \hat{x}^3 |\cos \tau_4|$$

mit $\tau_4 = \pi - \tau_2$ entnehmen wir daraus notwendig $A = \hat{x}^3 - \hat{x}^3 = 0$. Unter nochmaliger Beachtung der Konvergenz von $u_k \rightarrow 0$ dem Maß nach in $(0, \tau_1)$ und (τ_5, π) kommen wir schließlich zu dem Schluß, daß $\hat{x}^1 \equiv x^1$ gelten muß.

Anmerkung 2: Ob diese im Satz 2 genannte Kurve \mathcal{C}^* generell Rettungskurve kleinster Länge ist, wird im zweiten Teil dieser Arbeit untersucht werden.

LITERATUR

- [1] ANDREJEWA, J. A., und R. KLÖTZLER: Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen I, II. ZAMM 64 (1984), 35–44 und 147–154.
- [2] BLASCHKE, W.: Kreis und Kugel. Leipzig: Teubner-Verlag 1916.
- [3] KLÖTZLER, R.: Globale Optimierung in der Steuerungstheorie. ZAMM 63 (1983), T 305 bis T 312.
- [4] LJUSTERNIK, L. A., und W. I. SOBOLEW: Elemente der Funktionalanalysis. Berlin: Akademie-Verlag 1955.
- [5] MINKOWSKI, H.: Theorie der konvexen Körper. In: Gesammelte Abh. 2. Leipzig: Teubner-Verlag 1911, S. 131–229.
- [6] SHOLANDER, M.: On certain minimum problems in the theory of convex curves. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1952), 139–173.

Manuskripteingang: 03. 08. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. ROLF KLÖTZLER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz