Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (1) 1986, S. 39–45

Zur Regularität schwacher Lösungen thermoelastischer Variationsprobleme für stückweise stetige, anisotrope Körper unter Kopplungsbedingungen

R. Funke

Es wird die Regularität schwacher Lösungen thermoelastischer Variationsprobleme für anisotrope, stückweise stetige Körper unter Kopplungsbedingungen des Gleitens der Einschlüsse sowie unter adjungierten Kopplungsbedingungen längs allgemeiner Trennflächen nachgewiesen.

Дается доказательство регулярности слабых решений термоупругих вариационных задач для кусочно-непрерывных, анизотропных тел как в случае скольжения включений вдоль общих поверхностей контакта так и для сопряженных контактных условий.

There are studied regularity properties of weak solutions of variational problems of thermoelasticity for anisotropic, heterogeneous bodies under coupling conditions along the surfaces of discontinuity.

Die klassischen Randwertaufgaben der Thermoelastostatik für stückweise stetige, anisotrope Körper unter Kopplungsbedingungen wurden von H. Beckert in [1] mit Hilfe direkter Methoden der Variationsrechnung untersucht. Dabei wurden neben dem Fall der festen Kopplung, bei dem die verschiedenen Materialien längs der Trennflächen fest verheftet sein sollen, verschiedene neue Kopplungsbedingungen betrachtet. Von besonderem Interesse ist der Fall, bei dem die Materialien längs der Trennfläche S reibungsfrei ohne Abheben gleiten dürfen, d. h. $(u^+ - u^-) \cdot n = 0$ ist. Hierbei bedeutet u^+, u^- den Verschiebungsvektor auf der Innen- bzw. Außenseite von S und n die äußere Normale an S. In [1] wurden weitreichende Regularitätsaussagen für die konstruierten schwachen Lösungen bewiesen, allerdings konnte klassische Regularität der Lösung längs der Trennflächen unter den Kopplungsbedingungen des Gleitens allgemein nicht behauptet werden. In diesem Zusammenhang wies H. Beckert in [1] auf eine interessante Anwendung des Satzes von Poincaré-Brouwer hin. Kann gezeigt werden, daß die Lösung beiderseits der Trennfläche S stetige Grenzwerte u^+, u^- annimmt, so ist $v = u^+ - u^-$ ein auf S stetiges tangentielles Vektorfeld. Wenn S vom topologischen Typ der Kugel ist, muß mindestens ein Punkt $P \in S$ existieren mit $v(P) = 0$, d. h. die Materialien sind in diesem Punkt fest verbunden.

L. Jentsch gelang in [5] die Konstruktion einer im klassischen Sinn regulären Lösung für stückweise homogene, isotrope elastische Körper auch unter den Kopplungsbedingungen des Gleitens ohne Abheben längs der Trennflächen mit Methoden der Theorie singulärer Integralgleichungen. Diese Ergebnisse wurden in [6] auf Probleme der Thermoelastostatik ausgedehnt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Regularität der schwachen Lösung des thermoelastischen Variationsproblems für anisotrope, stückweise stetige Körper unter den Kopplungsbedingungen des Gleitens der Einschlüsse längs allgemeiner Trennflächenteile nachgewiesen. Das geschieht unter natürlichen Voraussetzungen an die Koeffizienten und Flächen, indem der Beweis durch eine zusätzliche Transformation auf den Fall ebener Trennflächenteile zurückgeführt wird. Darüber hinaus wird eine weitere, in einem gewissen Sinn zu der des reibungsfreien Gleitens ohne Abheben adjungierte Kopplungsbedingung betrachtet, welche in [4] eingeführt wurde.

1. Problemstellung

Betrachtet wird ein thermoelastischer Körper aus anisotropem Material, der das Gebiet D ausfülle und im Inneren N Einschlüsse D_p $(p = 1, \ldots, N)$ aus anderem Material enthält. Jeder Einschluß D_p werde von einer geschlossenen, ganz im Inneren von D liegenden Trennfläche S_p berandet. Es sei $D_0 = D - \left(\sum_{p=1}^{N} D_p\right)$. Der Zustand des Körpers wird durch den Verschiebungsvektor

$$u(x) = \big(u_1(x), u_2(x), u_3(x)\big), \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in D$$

beschrieben.

Bekanntlich ist das thermoelastische Potential pro Volumeneinheit ein Ausdruck in den Verzerrungsgrößen

$$\varepsilon_{ih}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right), \tag{1.1}$$

der neben der quadratischen Form in den ε_{ih} noch Terme enthält, die in den Verzerrungsgrößen linear sind und den Beitrag zum Ausdruck bringen, den ein vorgegebenes Temperaturfeld $\theta(x)$ zur Erhöhung der inneren Energie beisteuert. Wird

$$B(u, v) = \int_D a_{ih,jk}(x)\, \varepsilon_{ih}(u)\, \varepsilon_{jk}(v)\, dx \tag{1.2}$$

und

$$b(u) = \int_D b_{ih}(x)\, \theta(x)\, \varepsilon_{ih}(u)\, dx^{1)} \tag{1.3}$$

gesetzt, so ist

$$\frac{1}{2} B(u, u) + b(u) \tag{1.4}$$

das thermoelastische Potential von D. Die Koeffizienten $a_{ih,jk}$ und b_{ih} seien über den abgeschlossenen Teilgebieten $\overline{D}_p$ $(p = 0, 1, \ldots, N)$ hinreichend regulär, etwa

$$a_{ih,jk},\, b_{ih} \in C^r(\overline{D}_p) \qquad (r \geqq 2;\ p = 0, 1, \ldots, N;\ 1 \leqq i, j, h, k \leqq 3). \tag{1.5}$$

Mit

$$A(u) = \int_D f(x)\, u(x)\, dx \tag{1.6}$$

und

$$A_0(u) = \int_S P(s)\, u(s)\, dS, \qquad S = \partial D \tag{1.7}$$

wird die von den Volumenkräften f und den Oberflächenspannungen P geleistete Arbeit bezeichnet. Weiterhin sei

$$A_p(u) = \int_{S_p} P^+_{S_p}(s)\, u^+(s)\, dS + \int_{S_p} P^-_{S_p}(s)\, u^-(s)\, dS \qquad (p = 1, \ldots, N) \tag{1.8}$$

---

1) Über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren.

die Arbeit, welche von den an den Trennflächen S_p angreifenden Spannungen P_{S_p} ($p = 1, \ldots, N$) geleistet wird. Dabei bedeutet + den Grenzwert des gekennzeichneten Vektors auf S_p bei Annäherung längs der Normalen an S_p von D_p aus, — den entsprechenden Grenzwert bei Annäherung von D_0 aus.

Das thermoelastische Variationsproblem ist durch die Forderung bestimmt, daß im Gleichgewicht die Deformationsenergie zum Minimum wird:

$$\pi(u) = \frac{1}{2} B(u, u) + b(u) - A(u) - \sum_{p=0}^{N} A_p(u) \to \underset{u \in V}{\mathrm{Min}}! \tag{1.9}$$

V sei der Abschluß des linearen Raumes aller auf $D - \sum_{p=1}^{N} S_p$ definierten Vektorfunktionen u bezüglich der $H_{1,2}(D)$-Norm, deren Einschränkungen auf $\overline{D}_p$ zu $C^\infty(\overline{D}_p)$, $p = 0, 1, \ldots, N$, gehören und welche noch gewisse Rand- und Kopplungsbedingungen erfüllen. Insbesondere werden betrachtet:

Kopplungsbedingung des reibungsfreien Gleitens:

$$\begin{aligned} &\big(u^+(x) - u^-(x)\big) \cdot n(x) = 0 \text{ für } x \in S_p, \quad p \in \{1, \ldots, N\} \\ &(n(x) \text{ — äußere Normale an } S_p). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Adjungierte Kopplungsbedingung:

$$\begin{aligned} &\big(u^+(x) - u^-(x)\big) \cdot n(x) = 0 \text{ für } x \in S_p, \quad p \in \{1, \ldots, N\}, \\ &u_t^+(x) = 0, \qquad u_t^-(x) = 0 \\ &(u_t \text{ — tangentielle Komponente des Verschiebungsvektors:} \\ &u_t(x) = u(x) - \big(u(x) \cdot n(x)\big) n(x)). \end{aligned} \tag{1.11}$$

2. Regularitätsbeweis

Die Existenz der Lösung von (1.9) unter den Kopplungsbedingungen (1.10) bzw. (1.11) ist durch die Arbeiten von H. Beckert [1] und L. Jentsch [4] gesichert. Aus den bekannten Regularitätssätzen für schwache Lösungen stark elliptischer Systeme ergibt sich die Differenzierbarkeit der Lösung von (1.9) im Inneren der Gebiete D_p ($p = 0, 1, \ldots, N$) und am Rande $S = \partial D$. Das Interesse gilt deshalb dem Verhalten der Lösung u von (1.9) beiderseits der Trennflächen S_p ($p = 1, 2, \ldots, N$) unter den Kopplungsbedingungen (1.10) bzw. (1.11), falls die Koeffizienten $a_{ih,jk}$, b_{ih} stückweise stetig differenzierbare Funktionen über den abgeschlossenen Teilgebieten $\overline{D}_p$ sind (vgl. (1.5)).

Wir zeigen, daß sich die Verschiebungen $u(x)$ einschließlich ihrer Ableitungen sowohl von D_p ($p = 1, 2, \ldots, N$) als auch von D_0 aus stetig bis auf die Trennflächen S_p ($p = 1, 2, \ldots, N$) fortsetzen. Zu diesem Zweck richten wir nach dem Vorbild von [1] den Regularitätsbeweis in [2] für die Lösungen stark elliptischer Variationsprobleme m-ter Ordnung am Rande auf den zu untersuchenden Fall aus. Um die Regularität der Lösung u bis auf die Trennfläche S_p, $p \in \{1, \ldots, N\}$, hin zu erhalten, müssen wir gesondert die

a) tangentialen Ableitungen,
b) normalen Ableitungen

der Lösung beiderseits S_p untersuchen. Während im Teil b) auch unter den Kopplungsbedingungen (1.10) und (1.11) keine zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Übertragung des Beweises aus [2] auftreten, scheitert es bei a) zunächst daran, daß diese Bedingungen nicht translationsinvariant in jeder zu S_p parallelen Richtung sind und somit der im Beweis abzuschätzende Differenzenquotient nicht wieder die gestellten Kopplungsbedingungen erfüllt. Wir führen deshalb die folgende Transformation der Vektorfunktionen aus V durch:

Es sei P ein beliebiger Punkt auf S_p und D_p sei in P von der Klasse C^k ($k \geqq 3$). Dann existiert eine Umgebung $U(P)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gibt eine eineindeutige Abbildung ξ der Klasse C^k, die $J^+ = \bar{U} \cap \bar{D}_p$ auf die abgeschlossene Halbkugel $\bar{K}^+ := \{(y, t)\colon |y|^2 + t^2 \leqq 1,\ t \geqq 0\}$ und $J^- = \bar{U} \cap \bar{D}_0$ auf $\bar{K}^- := \{(y, t)\colon |y|^2 + t^2 \leqq 1,\ t \leqq 0\}$ abbildet.

(ii) Dabei geht $\bar{U} \cap S_p$ in den Kreis $\Gamma := \{(y, t)\colon |y|^2 \leqq 1,\ t = 0\}$ über.

Wir bezeichnen mit E das Urbild von $K = K^+ \cup K^-$ bezüglich der Abbildung ξ. In E wählen wir ein System von drei orthogonalen Einheitsvektoren $\eta^s(x)$ ($s = 1, 2, 3$), so daß gilt:

(i) $\eta^s \in C^{k-1}(\bar{E})$, $s = 1, 2, 3$;
(ii) $\eta^3(x) = n(x)$ für $x \in S_p \cap \bar{U}$.

Dabei ist n wieder die äußere Normale an S_p. Die Konstruktion eines solchen Systems ist unter unseren Voraussetzungen an D_p möglich. Für $x \in E$ zerlegen wir die Verschiebungsvektoren $u(x)$ in Komponenten nach den $\eta^s(x)$:

$$u(x) = \sum_{s=1}^{3} \tilde{u}^s(x)\, \eta^s(x),$$

und setzen $\tilde{u}(x) = \big(\tilde{u}^1(x),\ \tilde{u}^2(x),\ \tilde{u}^3(x)\big)$. Die Kopplungsbedingungen des Gleitens haben für den neuen Vektor $\tilde{u}(x)$ die Form (vgl. (1.10))

$$\big(\tilde{u}^3(x)\big)^+ - \big(\tilde{u}^3(x)\big)^- = 0 \quad \text{für} \quad x \in \bar{U} \cap S_p \tag{2.1}$$

und die adjungierten Kopplungsbedingungen (vgl. (1.11)) haben die Form

$$\begin{aligned} &\big(\tilde{u}^3(x)\big)^+ - \big(\tilde{u}^3(x)\big)^- = 0 \quad \text{für} \quad x \in \bar{U} \cap S_p, \\ &\big(\tilde{u}^s(x)\big)^+ = \big(\tilde{u}^s(x)\big)^- = 0 \quad \text{für} \quad s = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Diese Form der Kopplungsbedingungen hängt in beiden Fällen nicht mehr unmittelbar von der Normalen an S_p ab und ist deshalb translationsinvariant in jeder zu S_p parallelen Richtung.

Anschließend führen wir die topologisch reguläre Transformation ξ auf die Einheitskugel K durch. Es sei $\varphi = \varphi(y, t)$ eine Testfunktion aus C^∞, so daß für gewisse δ und σ mit $0 < \delta < \sigma < 1$ gilt

$$\varphi(y, t) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad |y|^2 + t^2 < \delta \\ 0 & \text{falls} \quad |y|^2 + t^2 > \sigma. \end{cases}$$

Es bezeichne

$$W = \big\{w\colon w(y, t) = \varphi(y, t)\, \tilde{v}\big(\xi^{-1}(y, t)\big),\ v \in V,\ x \in E\big\} \tag{2.3}$$

den Raum der transformierten Vektoren aus V. Für $w, v \in W$ erhalten wir eine neue Bilinearform, in der auch gemischte Glieder in w und v auftreten. Wir fassen entsprechende Koeffizienten zu Matrizen zusammen und führen Multiindizes ein, so daß wir schreiben können:

$$B(w, v) = \int_k \sum_{|p|,|q|=0}^{1} a_{pq} D^p w(y, t)\, D^q v(y, t)\, dy\, dt. \tag{2.4}$$

Analog erhalten wir:

$$b(v) = \int_k \sum_{|p|=0}^{1} b_p D^p v(y, t)\, dy\, dt.$$

Entsprechend seien $F(y, t)$, $P^+(y)$, $P^-(y)$ die Transformierten der Volumenkraft $f(x)$ bzw. der Spannungen $P^+_{S_p}(s)$ und $P^-_{S_p}(s)$. Für den transformierten Lösungsvektor von (1.9), den wir wieder mit u bezeichnen wollen, gilt:

$$\begin{aligned} &B(u, w) = -b(w) + (F, w)_{0,k} + (P^+, w^+)_{0,r} + (P^-, w^-)_{0,r} \\ &\text{für alle } w \in W. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wir können nun folgenden Satz beweisen (mit D_y^s bezeichnen wir die Ableitung in der y-Ebene).

Satz 1: *Es sei* $0 < \delta < 1$ *und* $K_\delta^\pm = \{(y, t) : |y|^2 + t^2 < \delta, \pm t > 0\}$. *Weiter sei* $s = (s_1, s_2)$ *ein Multiindex, so daß* $|s| \leq l + 1$ *mit* $l = \min(r, k - 1)$ *ist. Dann gilt für die Lösung von* (2.5) *die Beziehung* $D_y^s u \in H_{1,2}(K_\delta^\pm)$.

Beweis: Wir halten uns an den Beweis von [2: 9.I/S. 64ff.]. Der Beweis verläuft induktiv. Die Behauptung ist für $|s| = 0$ richtig. Unter der Annahme, daß sie für $|s| = k$ richtig ist, zeigen wir sie für $|s| = k + 1$. D_y^k sei eine beliebige partielle Ableitung in der y-Ebene der Ordnung k. Nach Konstruktion liegt der Lösungsvektor u von (1.9) in $H_{1,2}(D_p)$ bzw. $H_{1,2}(D_0)$, also ist auch $\varphi(y, t)\, u(y, t)$ in $H_{1,2}(K^+)$ bzw. $H_{1,2}(K^-)$. Wir setzen

$$U(y, t) = D_y^k\big(\varphi(y, t)\, u(y, t)\big).$$

Weiter sei $h = (h_1, h_2, 0)$ ein beliebiger Vektor in der y-Ebene mit $0 < |h| < \dfrac{1 - \sigma}{2}$ und $v \in W$. Wir formen zunächst den Ausdruck

$$B\left(\frac{U(y + h, t) - U(y, t)}{|h|}, v(y, t)\right)$$

durch partielle Integration in der y-Ebene unter Beachtung der Induktionsvoraussetzung um. Alle partiellen Integrationen, Differenzenbildungen und Abschätzungen in K^+, K^- berühren die Unstetigkeiten der Koeffizienten nicht, da sie parallel zur Trennfläche $t = 0$ verlaufen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &B\left(\frac{U(y + h, t) - U(y, t)}{|h|}, v(y, t)\right) \\ &= (-1)^k B\left(u, \varphi(y, t)\, D_y^k\left(\frac{v(y - h, t) - v(y, t)}{|h|}\right)\right) \\ &\quad + o\Big(\sum_{|s| \leq k} \|D_y^s u\|_{1,K_\delta} \|v\|_{1,K}\Big), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$(K_\delta = K_\delta^+ \cup K_\delta^-)$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung liegt

$$\varphi(y, t)\, D_y^k \left(\frac{v(y - h, t) - v(y, t)}{|h|}\right)$$

wieder in W, und mit (2.5) können wir schreiben:

$$B\left(u, \varphi(y,t)\, D_y^k\left(\frac{v(y-h,t)-v(y,t)}{|h|}\right)\right)$$
$$= \int_K \varphi(y,t)\left(F(y,t)+b_0(y,t)\right) D_y^k\left(\frac{v(y-h,t)-v(y,t)}{|h|}\right) dy\, dt$$
$$+ \int_K b_1(y,t)\, D^1\left(\varphi(y,t)\, D_y^k\left(\frac{v(y-h),t)-v(y;t)}{|h|}\right)\right) dy\, dt$$
$$+ \int_\Gamma P^+(y)\left(\varphi(y,0)\, D_y^k\left(\frac{v^+(y-h,0)-v^+(y,0)}{|h|}\right)\right) dy$$
$$+ \int_\Gamma P^-(y)\left(\varphi(y,0)\, D_y^k\left(\frac{v^-(y-h,0)-v^-(y,0)}{|h|}\right)\right) dy$$
$$= o\left\{(\|F\|_{k,K} + \sum_{|p|=0}^{1} \|b_p\|_{k+|p|,K} + \|P^+\|_{k+1,\Gamma} + \|P\|^-{}_{k+1,\Gamma})\, \|v\|_{1,K}\right\}. \tag{2.7}$$

Dabei haben wir das erste und zweite Integral auf der linken Seite von (2.7) nach partieller Integration in der y-Ebene mit der Schwarzschen Ungleichung abgeschätzt. Die Randintegrale formen wir in analoger Weise um, wenden die Schwarzsche Ungleichung und anschließend die bekannte Abschätzung für Randintegrale (s. z. B. [3]) an. Da der Differenzenquotient wieder die gestellten Kopplungsbedingungen erfüllt, dürfen wir

$$v(y,t) = \frac{U(y+h,t)-U(y,t)}{|h|}$$

einsetzen und erhalten aus (2.6), (2.7) und nach Anwendung der Gardingschen Ungleichung

$$\left\|\frac{U(y+h,t)-U(y,t)}{|h|}\right\|_{1,K}$$
$$= o\left\{\sum_{|s|\leqq k} \|D_y^s u\|_{1,K_\delta} + \|F\|_{k,K} + \sum_{|p|=0}^{1} \|b_p\|_{|p|+k,K} + \|P^+\|_{k+1,\Gamma} + \|P^-\|_{k+1,\Gamma}\right\}, \tag{2.8}$$

woraus nach einem bekannten Satz (s. z. B. [2: Satz 8.III., S. 55]) die Beziehung $D_y^{k+1}u \in H_{1,2}(K_\delta^\pm)$ folgt ∎

Wie in [1] erwähnt, kann Teil b) des Regularitätsbeweises unter Verwendung dieses Resultats auch unter den Kopplungsbedingungen (1.10) und (1.11) wörtlich nach [2: 10.I/S. 69ff.] geführt werden, so daß sich insgesamt für die Lösung von (2.5) ergibt:

Für beliebiges $\delta < 1$ *ist* $u \in H_{r+2}(K_\delta^\pm)$ *solange* $\nu \leqq 1$, $l = \min(r, k-1)$, *ist.*

Nach Rücktransformation des Lösungsvektors und aus den klassischen Einbettungssätzen erhalten wir folgende Regularitätsaussagen an den Trennflächen S_p ($p = 1, \ldots, N$) für die Lösung des thermoelastischen Variationsproblems (1.9).

Satz 2: *Die Gebiete D_p, $p = 0, 1, \ldots, N$, seien von der Klasse C^∞, für die Koeffizienten $a_{ih,jk}$ und b_{ih} sowie die Funktionen θ und f, eingeschränkt auf die Abschlüsse $\overline{D}_p$, gelte*

$$a_{ih,jk},\ b_{ih},\ \theta,\ f \in C^\infty(\overline{D}_p), \qquad 1 \leqq i, j, h, k \leqq 3,$$

und schließlich sei $P^{\pm}_{S_p} \in C^\infty(S_p)$, $p = 1, 2, \ldots, N$.

Dann gelten auch für die Lösung u von (1.9), *eingeschränkt auf $\overline{D}_p$, unter den Kopplungsbedingungen* (1.10) *bzw.* (1.11) *die Inklusionen $u \in C^\infty(\overline{D}_p)$, $p = 0, 1, \ldots, N$.*

Bei Vorgabe endlicher Differenzierbarkeitsordnung, z. B.

$$D_p \in C^3,$$

$$a_{ih,jk},\ b_{ih},\ \theta \in C^2(\overline{D}_p), \qquad f \in C^1(\overline{D}_p), \qquad (p = 0, 1, \ldots, N),$$

$$P^{\pm}_{S_p} \in C^2(S_p), \qquad p = 1, 2, \ldots, N,$$

folgt noch $u \in C^1(\overline{D}_p)$, $p = 0, 1, \ldots, N$.

LITERATUR

[1] Beckert, H.: Über die klassischen Randwertaufgaben in der Theorie der Wärmespannungen in stückweise stetigen, anisotropen Körpern unter Kopplungsbedingungen. ZAMM **52** (1972), 111–122.

[2] Fichera, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics 8 (1965), 1–176.

[3] Fichera, G.: Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. In: Handbuch der Physik Bd. VI/2, No. 3.
Handbuch der Physik Bd. VI/2, No. 3. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1972, pp. 391–423.

[4] Jentsch, L.: Bemerkungen zu einigen neueren gekoppelten Randwertproblemen der Thermoelastizitätstheorie. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturwiss. Reihe **25** (1976), 39–52.

[5] Jentsch, L.: Zur Existenz von regulären Lösungen der Elastostatik stückweise homogener Körper mit Gleit- und Spreizbedingungen an den Trennflächen zwischen zwei homogenen Teilen. Abh. Sächs. Akad. Wiss. **53** (1977) 2, 3–45.

[6] Jentsch, L.: Thermoelastostatik stückweise homogener Körper mit gleitenden Einschlüssen. Demonstratico Math. *12* (1979), 261–280.

Manuskripteingang: 04. 05. 1984; in revidierter Fassung: 27. 08. 1984

VERFASSER:

Dr. Regina Funke
VEB Polygraph
Buchbindereimaschinenwerke Leipzig
DDR-7050 Leipzig, Zweinaundorfer Str. 59, PSF 18