Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (1) 1986, S. 47–57

Ein Regularitätssatz für ein lineares System von Variationsungleichungen mit einer Halbraumnebenbedingung

M. Fuchs

Wir betrachten lineare nichtdiagonale elliptische Systeme von Variationsungleichungen für den Fall, daß die zulässige Funktionenklasse durch eine Dirichletsche Randbedingung und eine Halbraumnebenbedingung $u \cdot a \geqq \theta$ (für einen gewissen fixierten Vektor $a \in \mathbf{R}^N$) charakterisiert ist. Mit Hilfe potentialtheoretischer Methoden wird die Stetigkeit der Lösung unter der Voraussetzung gezeigt, daß das Hindernis $\theta\colon \Omega \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion ist.

Рассматриваются линейные недиагональные эллиптические системы вариационных неравенств в случае, когда допустимый класс функций характеризуется краевым условием Дирихле и условием типа полупространства $u \cdot a \geqq \theta$ ($a \in \mathbf{R}^N$ — фиксированный вектор). С помощью теоретико-потенциальных методов показывается непрерывность решения при условии, что препятствие $\theta\colon \Omega \to \mathbf{R}$ является непрерывной функцией.

We consider linear non-diagonal elliptic systems of variational inequalities where the admissible class of functions is characterized by Dirichlet boundary conditions and a half-space constraint $u \cdot a \geqq \theta$ for some fixed vector $a \in \mathbf{R}^N$. By potential theoretic arguments we show continuity of the solution provided the obstacle $\theta\colon \Omega \to \mathbf{R}$ is a continuous function.

0. Einführung

Wir betrachten das System von Variationsungleichungen

$$A(u, v - u) := \int_\Omega A_{\alpha\beta}^{ij} D_\alpha u^i D_\beta (v^j - u^j)\, dx \geqq 0 \tag{0.1}$$

in der Klasse

$$\mathbf{K} := \{v \in H^{1,2}(\Omega)^N \mid v = \psi \text{ auf } \partial\Omega,\ v \cdot a \geqq \theta \text{ f. ü. auf } \Omega\} \tag{0.2}$$

mit vorgegebenen Funktionen $\psi \in H^{1,2}(\Omega)^N$, $\theta\colon \Omega \to \mathbf{R}$ bei festem Einheitsvektor $a \in \mathbf{R}^N$. Ist die Matrix $(A_{\alpha\beta}^{ij})_{\substack{1 \leq \alpha,\beta \leq n \\ 1 \leq i,j \leq N}}$ der Leitkoeffizient stark elliptisch, so gibt es bekanntlich genau eine Lösung $u \in \mathbf{K}$ von (0.1) (vgl. [12: Th. 2.1]). Unser Ziel ist der Nachweis der Regularität von u, wenn das Hindernis θ eine stetige Funktion ist.

Zuvor wollen wir unser Resultat mit bekannten Ergebnissen vergleichen: Im skalaren Fall ($N = 1$) ist das Problem vollständig behandelt (vgl. [12] für eine Übersicht), zum Regularitätsbeweis wird die Penalisierungsmethode benutzt, indem man (0.1) durch eine elliptische Gleichung mit einem Parameter ersetzt und für die zugehörigen Lösungen a priori Abschätzungen beweist, die Konvergenz gegen die Lösung von (0.1) garantieren. Für Systeme sind solche Abschätzungen nicht möglich, so daß in der Literatur nur Spezialfälle behandelt werden. Am besten bekannt ist der Fall zweier unabhängiger Variabler (der bei vielen geometrischen Problemen auftritt, vgl. z. B. [7]), bei unserem Problem beispielsweise erfüllt u eine umgekehrte Hölder-Ungleichung und ist somit stetig ganz unabhängig davon, ob θ regulär ist.

In höheren Dimensionen $n \geqq 3$ hat man nur die Arbeit [8] von Hildebrandt und Widman, in der das Hauptgewicht auf der Behandlung einer quadratisch wachsenden Nicht-Linearität liegt; die Hindernismenge ist eine beschränkte konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}^N$, auf der linken Seite des Systems steht ein skalarer elliptischer Operator. Durch Vergleich mit $v = (1 - \eta)\, u + \eta \bar{u}$ ($\bar{u}$ = Mittelwert), wo das Gewicht η zusammengesetzt ist aus Abschneidefunktionen und der Green-Funktion zum betrachteten Operator, führt die aus [9, 10] bekannte Technik direkt auf eine Morrey-Bedingung für ∇u. Für volle Systeme kennt man ansonsten nur die „$H^{2,2}$-Resultate" von Frehse [1].

Wir behandeln das Regularitätsproblem für (0.1), (0.2) mit potential-theoretischen Argumenten: Zunächst läßt sich (0.1) in ein System mit einem Maß μ auf der rechten Seite transformieren, und durch Test mit der zugehörigen Green-Matrix [2, 3] folgt eine Darstellungsformel für die Lösung, aus der sich mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Evans [6] die Regularität von u ablesen läßt, vorausgesetzt, $\theta\colon \Omega \to \mathbf{R}$ ist stetig. Höhere Regularität folgt dann mit Standardargumenten (vgl. Abschnitt 4).

Da bereits im Fall elliptischer Systeme unstetige schwache Lösungen auftreten, wenn die Koeffizienten nur meßbar sind, können wir nur stetige Koeffizienten zulassen, die zudem sehr stark elliptisch sein müssen, um die Existenz von Lösungen zu garantieren. Ferner benötigen wir lokale positive Definitheit der Green-Matrix, die sich durch Bedingungen an die Koeffizienten stets herstellen läßt (vgl. (1.3)).

1. Bezeichnungen und Voraussetzungen

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqq 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, auf dem für $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$, $i, j = 1, \ldots, N$ Funktionen $A_{\alpha\beta}^{ij} \in C^{0,\delta}(\bar{\Omega})$ für ein $\delta \in\,]0, 1[$ vorgegeben sind, die mit Konstanten $\lambda, \Lambda > 0$ die Elliptizitätsbedingung

$$\begin{aligned} &A_{\alpha\beta}^{ij}(x)\, \xi_\alpha{}^i \xi_\beta{}^j \geqq \lambda\, |\xi|^2, \qquad x \in \Omega, \qquad \xi \in \mathbf{R}^{nN}, \\ &\|A_{\alpha\beta}^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \Lambda \end{aligned} \tag{1.1}$$

erfüllen. Wir verlangen folgende Definitheitsbedingung:

Es gibt ein $\mu > 0$ mit

$$E_{x_0}(y)\, v \cdot v \geqq \mu\, |v|^2\, |y|^{2-n} \quad \text{für alle } v \in \mathbf{R}^N,\ y \in \mathbf{R}^n,\ x_0 \in \Omega. \tag{1.2}$$

Hierbei ist E_{x_0} die durch Fourier-Transformation gewonnene Fundamentalmatrix zum Operator $-D_\alpha\big(A_{\alpha\beta}^{ij}(x_0)\, D_\beta\big)$ mit in $x_0 \in \Omega$ eingefrorenen Koeffizienten (vgl. [11, 13]). Die Ungleichung (1.2) ist z. B. dann erfüllt, wenn (0.1) dicht bei einem zerfallenden System liegt, d. h., wenn

$$\|A_{\alpha\beta}^{ij} - a_{\alpha\beta} B^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \varepsilon_0(n, N, \lambda, \Lambda) \tag{1.3}$$

mit strikt positiv definiten Matrizen $(a_{\alpha\beta})_{1 \leqq \alpha, \beta \leqq n}$, $(B^{ij})_{1 \leqq i, j \leqq N}$ gilt. Zum Beweis untersucht man, welches System von der Differenz der beiden Fundamentalmatrizen gelöst wird und schätzt damit das Wachstum ab (vgl. [2: Lemma 1.3]). Das führt auf (1.3). (Entsprechendes gilt im Fall $\|A_{\alpha\beta}^{ij} - \delta_{ij} a_{\alpha\beta}^i\| \leqq \varepsilon_0$.) Schließlich seien $a \in \mathbf{R}^N$, $|a| = 1$, $\theta \in C^0(\Omega)$ und $\psi \in H^{1,2}(\Omega)^N$ mit $a \cdot \psi \geqq \theta$ f. ü.; die Klasse $\mathbf{K}$ wird wie in (0.2) definiert und beschreibt die Menge aller Funktionen mit Randwerten ψ, die der Halbraumnebenbedingung genügen.

2. Das Resultat

Wir beweisen hier die Stetigkeit der schwachen Lösung des Systems (0.1) sowie die Hölder-Stetigkeit der ersten Ableitung außerhalb der Kontaktmenge, wobei das letztgenannte Resultat später verallgemeinert wird.

Theorem 1: *Unter den Voraussetzungen aus Abschnitt* 1 *sei* $u \in \mathbf{K}$ *die eindeutige Lösung von* (0.1). *Dann ist* u *stetig auf* Ω *und Hölder-stetig differenzierbar außerhalb der Kontaktmenge* $I := \{x \in \Omega \mid a \cdot u(x) = \theta(x)\}$.

Bemerkungen: 1. Anstelle von (0.1) kann man allgemeinere lineare Probleme

$$A^*(u, v - u) := A(u, v - u) - \int_\Omega f \cdot (v - u)\, dx - \int_\Omega D(v - u) \cdot F\, dx \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in \mathbf{K} \tag{0.1)*$$

nach derselben Methode behandeln, vorausgesetzt $f \in L^{q/2}(\Omega)^N$, $F \in L^q(\Omega)^{nN}$ für ein $q > n$.

2. Die sehr starke Elliptizitätsbedingung (1.1) garantiert die Existenz einer schwachen Lösung zu (0.1) in der Klasse $\mathbf{K}$. Man kann sie durch die Legendre-Hadamard-Bedingung ersetzen, wenn man statt (0.1) das System

$$A^{**}(u, v - u) := A(u, v - u) + \int_\Omega B_\alpha^{ij} D_\alpha u^i (v^j - u^j)\, dx + \int_\Omega a^{ij} u^i (v^j - u^j)\, dx \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in \mathbf{K} \tag{0.2)**$$

betrachtet und verlangt, daß die Form A^{**} streng koerziv ist auf $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)^N$. Die nachfolgend benötigten Eigenschaften der Green-Matrix findet man dann in [3].

3. Hilfssätze

Seien ab jetzt die Voraussetzungen des Theorems gültig. Nach orthogonaler Transformation kann man o. E. $a = e^N$ annehmen, und nach dem Satz von Riesz findet man ein (positives) Radon-Maß μ auf Ω mit

$$-D_\beta\left(A_{\alpha\beta}^{ij} D_\alpha u^i\right) = \delta_{jN} \cdot \mu, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{3.1}$$

Das Theorem folgt nun mit einer Reihe von Hilfssätzen aus (3.1).

Lemma 1: *Sei* G *die Green-Matrix zu* $-D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}^{ij} D_\beta\right)$ *auf* Ω (vgl. [2]). *Zu* $x_0 \in \Omega$ *findet man* $r > 0$ *und* $c > 0$ *mit*

$$G(x, y)\, v \cdot v \geqq c\, |v|^2 \cdot |x - y|^{2-n} \tag{3.2}$$

für alle $v \in \mathbf{R}^N$, $x, y \in B_r(x_0) \Subset \Omega$.

Lemma 2: *Sei* $B := B_r(x_0)$ *die in Lemma* 1 *definierte Kugel. Dann gilt:*

(i) $\limsup\limits_{\varrho \downarrow 0} \fint_{B_\varrho(y)} u^N\, dx < \infty$ *für alle* $y \in B_{r/2}(x_0)$ *und*

(ii) *jeder Punkt* $y \in B_{r/2}(x_0)$ *ist Lebesgue-Punkt von* u^N.

Man findet ein Radon-Maß λ mit supp $\lambda \Subset B$ *und folgenden Eigenschaften:*

(iii) $\int |x-y|^{2-n}\, d\lambda(x) \leqq c_y < \infty$ *und*

(iv) $u^N(y) = \int G_N{}^N(\cdot, y)\, d\lambda + R^N(y)$ *für alle* $y \in B_{r/2}(x_0)$ *mit* $R^N \in C^0\left(\overline{B_{r/2}(x_0)}\right)$.

Lemma 3 (*lokale Version des Satzes von Evans*): *Sei* $D \subset \mathbf{R}^n$ *offen und beschränkt, λ ein Radon-Maß mit* supp $\lambda \Subset D$. *Ferner sei* $\varphi\colon D \times D \to \mathbf{R}$ *stetig außerhalb der Diagonalen mit*

$$c\,|x-y|^{2-n} \leqq \varphi(x, y) \leqq C\,|x-y|^{2-n} \quad (c, C > 0)$$

und

$$P_\varphi(y) := \int \varphi(x, y)\, d\lambda(x)$$

für $y \in D$.

(i) *Für* K *kompakt in* D *ist* $P_{\varphi|K}$ *stetig und endlich genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\int_{B_\delta(y)} \varphi(x, y)\, d\lambda(x) \leqq \varepsilon \quad \textit{für alle } y \in K$$

existiert.

(ii) *Für* O *offen in* D *ist mit* $P_{\varphi|O\cap\operatorname{supp}\lambda}$ *auch* $P_{\varphi|O}$ *stetig und endlich.*

Lemma 4: *Die Lösung* u *ist stetig auf dem Gebiet* Ω *und Hölder-stetig differenzierbar außerhalb der Kontaktmenge, also* $u \in C^0(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega - I)$ *für alle* $\alpha \in (0, 1)$.

Beweis von Lemma 1: Nach [2: Th. 7] findet man Konstanten R_0, C_1 und C_2, abhängig von den Koeffizienten, von n, N und Ω mit

$$G(x, y) = E_y(x-y) + w(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} (T^l E_y)(x-y) \tag{3.3}$$

$$\text{für alle } y \in \Omega, \quad x \in B_{2R}(y); \qquad 0 < R \leqq \min\left(R_0, \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)\right),$$

wobei

$$\|w(\cdot, y)\|_{L^\infty(B_{2R}(y))} \leqq C_2 R^{1+\delta-n},$$

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} (T^l E_y)(x-y)\right| \leqq C_1 \sum_{l=1}^{\infty} (C_1 R^\delta)^l\, |x-y|^{2-n}$$

gilt. (T ist ein gewisser Potentialoperator, E_y die Fundamentalmatrix zum Operator mit konstanten Koeffizienten $A_{\alpha\beta}^{ij}(y)$). Die Beziehungen (3.3), (1.2) ergeben mit o.g. Abschätzungen

$$G(x, y)\, v \cdot v \geqq \left(\left\{\mu - C_1{}^2 \frac{R^\delta}{1 - C_1 R^\delta}\right\} |x-y|^{2-n} - C_2 R^{1+\delta-n}\right) |v|^2$$

für alle $v \in \mathbf{R}^N$. Wählt man R so klein, daß $\{\ldots\} \geqq \mu/2$ ist und verlangt bei gegebenem $x_0 \in \Omega$ die Ungleichung $R \leqq \min\left(R_0, \frac{1}{8} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\right)$, so folgt (3.2) mit $r := \frac{1}{2} \times \left(\frac{\mu}{4C_2}\right)^{1/n-2} R^{(n-1+\delta)/(n-2)}$ ∎

Beweis von Lemma 2: Sei $\eta \in C^\infty_{\text{kpt}}(B, [0, 1])$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_{(3/4)r}(x_0)$, $|\nabla\eta| \leqq c/r$.

Wir setzen $\tilde{u} := \eta u$, $\lambda := \eta\mu$ und erhalten gemäß (3.1) für $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{kpt}}(\Omega)^N$

$$\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \tilde{u}^i D_\beta \varphi^j \, dx = \int_\Omega \varphi^N d\lambda + \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} u^i D_\alpha \eta D_\beta \varphi^j \, dx$$
$$- \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha u^i D_\beta \eta \varphi^j \, dx. \tag{3.4}$$

Für $y \in B_{r/2}(x_0)$, $0 < \varrho < r/4$ testet man (3.4) mit $G_N{}^\varrho(\cdot, y)$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\fint_{B_\varrho(y)} u^N \, dy = \int G_N{}^{\varrho N}(\cdot, y) \, d\lambda + h_\varrho{}^N(y), \\ &h_\varrho{}^N(y) := \int_{\mathrm{supp}(\nabla\eta)} A^{ij}_{\alpha\beta}\big(u^i D_\alpha \eta D_\beta G_N{}^{\varrho j}(\cdot, y) - D_\alpha u^i D_\beta \eta G_N{}^{\varrho j}(\cdot, y)\big) \, dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Mit den Eigenschaften der Green-Matrix sieht man leicht

$$\begin{aligned} &h_\varrho{}^N(y) \xrightarrow[\varrho \downarrow 0]{} : R^N(y), \\ &R^k(y) := \int_{\mathrm{supp}(\nabla\eta)} A^{ij}_{\alpha\beta}(u^i D_\alpha \eta D_\beta G_k{}^j(\cdot, y) - D_\alpha u^i D_\beta \eta G_k{}^j(\cdot, y) \, dx \end{aligned} \tag{3.6}$$

und $R \in C^0\big(\overline{B_{r/2}(x_0)}\big)^N$, so daß (3.5) ergibt

$$u^N(y) = \int G_N{}^N(\cdot, y) \, d\lambda + R^N(y) \quad \text{für } L^n - \text{f. a. } y \in B_{r/2}(x_0). \tag{3.7}$$

Ist nämlich $y \in B_{r/2}(x_0)$ mit $\limsup\limits_{\varrho\downarrow 0} \fint_{B_\varrho(y)} u^N \, dx < \infty$, so folgt aus Lemma 1 und dem Lemma von Fatou mit (3.6)

$$\int |x - y|^{2-n} \, d\lambda(x) \leqq c \int G_N{}^N(\cdot, y) \, d\lambda(x) < \infty,$$

und da man umgekehrt $G_N{}^{\varrho N}(x, y) \leqq c\,|x - y|^{2-n}$ auf B weiß, ergibt der Satz über majorisierte Konvergenz, daß y Lebesgue-Punkt von u^N ist und die Darstellung (3.7) gilt.

Wir zeigen jetzt indirekt

$$\limsup_{\varrho\downarrow 0} \fint_{B_\varrho(y)} u^N \, dx < \infty \quad \text{für alle } y \in B_{r/2}(x_0). \tag{3.8}$$

Sei

$$\varrho_\nu \downarrow 0 \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu\to\infty} \fint_{B_{\varrho_\nu}(y)} u^N \, dx = \infty.$$

Gemäß (3.4) kann man λ zu einem Element T von $H^{-1,2}(\Omega) := \big(\mathring{H}^{1,2}(\Omega)\big)^*$ fortsetzen. Es sei $v \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega)$ die Lösung von $-\Delta v = T$ auf Ω. Man setze

$$V_\lambda(y) := c_n \int_\Omega |x - y|^{2-n} \, d\lambda(x),$$

wo der positive dimensionsabhängige Faktor c_n so eingerichtet wird, daß $-\Delta V_\lambda = \lambda$ auf $\mathbf{R}^n$ im Distributionssinn gilt. Dann ist $\Delta(V_\lambda - v) = 0$ auf Ω und das Weylsche Lemma ergibt $V_\lambda \in H^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Da $-\Delta V_\lambda \geqq 0$ im Distributionssinn ist, haben wir

$$\fint_{B_\varrho(y)} V_\lambda \leqq c_n \inf_{B_{\varrho/2}(y)} V_\lambda \tag{3.9}$$

nach der lokalen Version der Harnack-Ungleichung in [5: Th. 8.18]. Das ergibt

$$\begin{aligned}\inf_{B_{\varrho_\nu/2}(y)} u^N &\underset{(3.7)}{\geqq} \inf_{B_{\varrho_\nu/2}(y)} \int G(x,\cdot)\,d\lambda(x) - \|R_N\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))}\\ &\underset{(\text{Lemma 1})}{\geqq} c\cdot \inf_{B_{\varrho_\nu/2}(y)} V_\lambda - \|R_N\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))}\\ &\underset{(3.9)}{\geqq} c \fint_{B_{\varrho_\nu}(y)} V_\lambda - \|R_N\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))}\\ &\underset{(3.7)}{\geqq} c\left(\fint_{B_{\varrho_\nu}(y)} u^N\,dx - \|R_N\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))}\right),\end{aligned}$$

also nach Annahme $\inf_{B_{\varrho_\nu/2}(y)} u^N \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$. Für $\varrho \ll 1$ ist dann $u^N \geqq \sup_{B_\varrho(y)} \theta + 1$ auf $B_\varrho(y)$, d. h., u löst auf dieser Kugel das homogene elliptische System, ist insbesondere beschränkt bei y. Das ist ein Widerspruch! Daher gilt (3.8), woraus man wie oben schließt, daß jeder Punkt $y \in B_{r/2}(x_0)$ Lebegue-Punkt von u^N ist. Die Aussagen (iii), (iv) des Lemmas sind nun auch klar ∎

Den Beweis von Lemma 3 findet man im Abschnitt 5 „Appendix".

Beweis von Lemma 4: Wir benutzen die Notationen aus Lemma 2 und setzen

$$I := \{x \in \Omega : u^N(x) = \theta(x)\},$$

was Sinn hat, da u^N jetzt punktweise erklärt ist. Die in jedem Punkt $y \in B_{r/2}(x_0)$ gültige Darstellung (3.7) impliziert relative Abgeschlossenheit von I in Ω, zu $z \in \Omega - I$ findet man deshalb eine Kugel $\overline{B_R(z)} \subset \Omega - I$ und wegen der Unterhalbstetigkeit von u^N folgt $\inf_{B_R(z)} (u^N - \theta) > 0$. Offenbar ist dann $u \in C^{1,\delta}(B_R(z))^N$ (vgl. [4]), und man sieht $\operatorname{supp} \mu \subset I$. Nach Voraussetzung an θ ist $y \to \int G_N{}^N(\cdot, y)\,d\lambda + R^N(y)$ stetig auf $B_{r/2}(x_0) \cap \operatorname{supp} \lambda$, Lemma 3 ergibt Stetigkeit von u^N auf $B_{r/2}(x_0)$.

Sei $P: B_{r/2}(x_0) \ni y \to \int G(\cdot, y)\,d\lambda$. Wir betrachten eine Folge $y_\nu \to y$ in $B_{r/2}(x_0)$. Sei $K \Subset B_{r/2}(x_0)$ mit $y_\nu, y \in K$ und $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Da $P_N{}^N$ stetig ist auf K, findet man nach (i) von Lemma 3 ein $\delta > 0$ mit

$$\int_{B_\delta(z)} G_N{}^N(\cdot, z)\,d\lambda \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in K.$$

Es folgt für $A \subset B_r(x_0)$

$$\begin{aligned}\int_A |G(\cdot, y_\nu)|\,d\lambda &\leqq \int_{A - B_\delta(y_\nu)} |G(\cdot, y_\nu)|\,d\lambda + c \int_{B_\delta(y_\nu)} G_N{}^N(\cdot, y_\nu)\,d\lambda\\ &\leqq c\delta^{2-n}\lambda(A) + c\varepsilon,\end{aligned}$$

also gleichgradrige Integrierbarkeit von $G(\cdot, y_\nu)$ und somit $P(y_\nu) \to P(y)$. Gemäß $u(y) = \int G_N(\cdot, y)\,d\lambda + R(y)$ in jedem Punkt $y \in B_{r/2}(x_0)$ sind nun alle Aussagen bewiesen ∎

Der Beweis von Theorem 1 ist damit beendet.

4. Höhere Regularität

Wir betrachten in diesem Abschnnitt zerfallende Systeme vom Typ

$$\int_\Omega a_{\alpha\beta}B^{ij}D_\alpha u^i D_\beta(v^j - u^j)\,dx \geqq 0 \tag{5.1}$$

in der Klasse

$$\mathbf{K} := \{v \in H^{1,2}(\Omega)^N \mid v = \psi \text{ auf } \partial\Omega,\ v^N \geqq \theta\}, \tag{5.2}$$

wobei wir annehmen:

(i) $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $B^{ij} = B^{ji} \in C^1(\Omega)$, $a_{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha\xi_\beta \geqq \lambda\,|\xi|^2$, (5.3)

$B^{ij}(x)\,\eta^i\eta^j \geqq \lambda\,|\eta|^2$ für alle $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbf{R}^N$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ mit $\lambda > 0$;

(ii) die Hindernisfunktion θ ist von der Klasse $C^3(\Omega)$. Dann gilt die folgende Verschärfung von Theorem 1.

Theorem 2: *Unter o. g. Voraussetzungen erfülle $u \in \mathbf{K}$ die Variationsungleichung* (5.1). *Dann gilt*

$$u \in H^{2,p}_{\mathrm{loc}} \cap H^{1,4}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^N \quad \textit{für alle } p \textit{ mit } 1 \leqq p < \infty,$$

insbesondere ist u Hölder-stetig differenzierbar auf Ω zu jedem Exponent $\alpha \in (0, 1)$.

Der Beweis orientiert sich im wesentlichen an der in [15: Satz 4] gegebenen Vorlage; allerdings benutzt TOMI die Hölder-Stetigkeit von u, die wir bislang noch nicht bewiesen haben. Nach Satz 1 ist u aber zumindest stetig, und das genügt, um $\nabla u \in L^4_{\mathrm{loc}}$ zu schließen. Mit dieser Information läßt sich dann Satz 4 aus [15] übertragen.

Wir zeigen zunächst

Lemma 5: *Die Lösung u gehört zur Klasse $H^{2,2}_{\mathrm{loc}} \cap H^{1,4}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^N$.*

Beweis: Nach (5.1) ist $\tilde u := u - e^N\theta$ Lösung von

$$\int_\Omega a_{\alpha\beta}B^{ij}D_\alpha\tilde u^i D_\beta(v^j - \tilde u^j)\,dx \geqq -\int_\Omega a_{\alpha\beta}B^{Nj}D_\alpha\theta D_\beta(v^j - \tilde u^j)\,dx \tag{5.7}$$

für alle $v \in H^{1,2}(\Omega)$, $v = \tilde u$ am Rand $v^N \geqq 0$. Für $h \neq 0$, $e \in \mathbf{R}^n$, $|e| = 1$ sei $\Delta_h\varphi(x) := \frac{1}{h}\big(\varphi(x + he) - \varphi(x)\big)$. Wir setzen $v := \tilde u + \varepsilon \cdot \Delta_{-h}(\eta^2\,\Delta_h\tilde u)$ mit $\eta \in C^\infty_{\mathrm{kpt}}(\Omega)$. Für $\varepsilon \ll 1$ ist v in (5.7) zugelassen, eine einfache Rechnung ergibt $\big(A^{ij}_{\alpha\beta} := a_{\alpha\beta}B^{ij}\big)$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\int a_{\alpha\beta}B^{ij}\eta^2 D_\alpha(\Delta_h\tilde u^i)\,D_\beta(\Delta_h\tilde u^j)\,dx\\
&\leqq C\Big\{\int |D\,\Delta_h\tilde u|\cdot|D\eta|\cdot\eta\,|\Delta_h\tilde u|\,dx\\
&\quad + \int |\Delta_h A|\cdot|D\tilde u|\,(|D\,\Delta_h\tilde u|\,\eta^2 + |D\eta|\cdot\eta\,|\Delta_h\tilde u|)\,dx\\
&\quad + \int |\Delta_h(A\cdot D\theta)|\cdot(\eta^2\,|D\,\Delta_h\tilde u| + |D\eta|\cdot\eta\,|\Delta_h\tilde u|)\,dx\Big\}.
\end{aligned} \tag{*}$$

Ist $y_0 \in \Omega$, $B_{2R}(y_0) \Subset \Omega$ und $\eta \in C^\infty_{\mathrm{kpt}}\big(B_{2R}(y_0), [0, 1]\big)$, $\eta \equiv 1$ auf $B_R(y_0)$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\int a_{\alpha\beta}(y_0)\,B^{ij}(y_0)\,\eta^2 D_\alpha(\Delta_h\tilde u^i)\,D_\beta(\Delta_h\tilde u^j)\,dx\\
&\geqq \lambda/2\int \eta^2\,|D\,\Delta_h\tilde u|^2\,dx - C\int |\nabla\eta|^2\cdot|\Delta_h\tilde u|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (*) schätzt man nach oben ab durch

$$C_1 \cdot \varepsilon \int \eta^2 |D \Delta_h \tilde{u}|^2 \, dx + C_2(R) \cdot \varepsilon^{-1} \int\limits_{B_{2R}(y_0)} (|\Delta_h \tilde{u}|^2 + |D\tilde{u}|^2) \, dx$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$, wo C_1 unabhängig ist von R und ε. Es folgt:

$$\left(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon \cdot C_1 - C_1 \cdot \underset{B_{2R}(y_0)}{\operatorname{osc}} A\right) \int \eta^2 |D\Delta_h \tilde{u}|^2 \, dx \leqq \frac{1}{\varepsilon} C_2 \int\limits_{B_{2R}(y_0)} (|\Delta_h \tilde{u}|^2 + |D\tilde{u}|^2) \, dx.$$

Das ergibt sofort die Behauptung $u \in H^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^N$.

Zum Beweis dieser Aussage wurde die Stetigkeit von u nicht benötigt, diese braucht man für $u \in H^{1,4}_{\mathrm{loc}}$: Sei

$$v := (1 - \eta^2 |\Delta_h \tilde{u}|^2 \cdot \varepsilon) \, \tilde{u} + \varepsilon \eta^2 |\Delta_h u|^2 \fint\limits_{B_{2R}(y_0)} \tilde{u} \, dx.$$

Stetigkeit von $\tilde{u}$ ergibt Beschränktheit von $\eta^2 |\Delta_h \tilde{u}|^2$, so daß v für $\varepsilon \ll 1$ in (5.7) zugelassen ist. Man erhält

$$\int \eta^2 |\Delta_h \tilde{u}|^2 |D\tilde{u}|^2 \, dx \leqq C \cdot \int\limits_{B_{2R}(y_0)} \left(|D\tilde{u}|^2 + |\Delta_h \tilde{u}|^2 \left|\tilde{u} - \fint\limits_{B_{2R}(y_0)} \tilde{u}\right|^2 + |D \Delta_h \tilde{u}|\right)^2 dx$$

mit C abhängig von den Koeffizienten, von R und θ, und mit $h \to 0$ ist der Beweis beendet ∎

Beweis von Theorem 2: Sei $x_0 \notin [u^N = \theta]$; dann löst u auf einer Kugel um x_0 das homogene elliptische System, und die Behauptungen sind klar. Sei also $u^N(x_0) = \theta(x_0)$. Nach [15: Lemma 6 und Satz 4] gilt dann auf $B := B_r(x_0)$ geeignet

$$\int\limits_B a_{\alpha\beta} \tilde{B}^{ij} D_\alpha w^i D_\beta (v^j - w^j) \, dx \geqq \int\limits_B f(x, \nabla w) \cdot (v - w) \, dx \tag{5.4}$$

für alle $v \in C^0(\overline{B})^N \cap H^{1,2}(B)^N$, mit $v = w$ am Rand, $v^N \geqq 0$, wobei w durch Transformation mit einem C^2-Diffeomorphismus aus u hervorgeht und $w^N \geqq 0$ erfüllt. Die Koeffizientenfunktionen $\tilde{B}^{ij}$ sind $C^1(B)$, elliptisch mit

$$\tilde{B}^{iN} = 0 \quad \text{für } i < N. \tag{5.5}$$

Schließlich ist

$$f: B \times \mathbf{R}^{nN} \to \mathbf{R}^N, \qquad (x, p) \to f(x, p)$$

stetig in x und p, bei festem x nach p differenzierbar und erfüllt mit $a, b > 0$

$$|f(x, p)| \leqq a \cdot |p|^2 + b. \tag{5.6}$$

Aus (5.4) erhalten wir für $\varphi \in C^0(\overline{B}) \cap H^{1,2}(B)$ mit $\varphi \geqq 0$, $\varphi = w^N$ am Rand nach (5.5) die Ungleichung

$$\begin{aligned} B(w^N, \varphi - w^N) &:= \int a_{\alpha\beta} \tilde{B}^{NN} D_\alpha w^N D_\beta (\varphi - w^N) \, dx \\ &\geqq \int f^N(x, Dw) \, (\varphi - w^N) \, dx. \end{aligned}$$

Nun ist nach (5.6) und Lemma 5 der Absolutbetrag des Maßes

$$\Phi: C^0_{\mathrm{kpt}}(B) \ni \varrho \to \int f^N(x, Dw) \, \varrho \, dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathring{H}^{1,2}(B)$, nach [15: Satz 2] folgt die Existenz von $\bar{f}^N: B \to \mathbf{R}$ mit $|\bar{f}^N| \leqq |f^N| \leqq a \, |\nabla w|^2 + b$ und

$$B(w^N, \varrho) = \int \bar{f}^N \cdot \varrho \, dx \quad \text{für alle } \varrho \in C^\infty_{\mathrm{kpt}}(B).$$

Setzt man $\tilde{f} = (f^1, \ldots, f^{N-1}, \tilde{f}^N)$, so folgt aus (5.4) und der vorstehenden Überlegung

$$\int_B a_{\alpha\beta} \tilde{B}^{ij} D_\alpha w^i D_\beta \varphi^j \, dx = \int_B \tilde{f} \cdot \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_{\text{kpt}}(B)^N. \tag{5.8}$$

Nach [4: Theorem 1.5/p. 184] ist $w \in C^{1,\alpha}(B - B_0)$ für alle α, $0 < \alpha < 1$, wo $x \in B - B_0$ genau dann ist, wenn

$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \varrho^{2-n} \int_{B_\varrho(x)} |\nabla w|^2 \, dx = 0 \tag{5.9}$$

gilt. Testet man (5.7) mit

$$v := (1 - \eta^2)\, \tilde{u} + \eta^2 \fint_{B_{2R}(y_0)} \tilde{u} \, dx,$$

$$\eta \in C^\infty_{\text{kpt}}(B_{2R}, [0, 1]), \; \eta = 1 \text{ auf } B_R(y_0), \; |\nabla \eta| \leqq c/R,$$

so folgt

$$\int_{B_R(y_0)} |\nabla \tilde{u}|^2 \, dx \leqq C \Big(R^{n-2} \cdot \operatorname*{osc}_{B_{2R}(y_0)} \tilde{u} + \int_{B_{2R}(y_0)} |\nabla \theta|^2 \, dx \Big),$$

also ist (5.9) für $\tilde{u}$ und damit für w richtig, d. h. $w \in C^{1,\alpha}(B)$, $0 < \alpha < 1$. Insbesondere ist $\tilde{f}$ aus (5.8) lokal beschränkt, die L^p-Theorie [13] ergibt $w \in H^{2,p}_{\text{loc}}(B)$. Damit ist Theorem 2 bewiesen ∎

5. Appendix

Lemma 3 ist bekannt unter dem Namen Satz von Evans (-Vasilesco) (vgl. [6: Satz 6.20] — dort wird jedoch nur die globale Version bewiesen, und zwar für den Fall, daß φ die Fundamentallösung zum Laplace-Operator ist). Der folgende Beweis orientiert sich an der Vorlage [14].

Beweis von Lemma 3: Für $a > 0$ betrachte man die stetige Funktion

$$P_a \colon D \ni y \to \int \varphi_a(x, y) \, d\lambda(x), \quad \varphi_a(x, y) := \min\big(a, \varphi(x, y)\big).$$

Es sei $P \colon D \ni y \to \int \varphi(x, y) \, d\lambda(x)$.

(i) „$\Leftarrow$": Zu $\varepsilon > 0$ berechne man δ_0 gemäß Voraussetzung. Dann gilt für $\delta \leqq \delta_0$

$$P(y) - \varepsilon \leqq \int_{R^n - B_\delta(y)} \varphi(x, y) \, d\lambda(x) \leqq \int \varphi_a(x, y) \, d\lambda(x), \qquad a := C \cdot \delta^{2-n}.$$

Also ist $P(y) < \infty$ und $0 \leqq P(y) - P_a(y) \leqq \varepsilon$ für alle $y \in K$, also $P_a \xrightarrow[a \to \infty]{} P$ gleichmäßig auf K.

„$\Rightarrow$": Wegen $P_a \uparrow P$ und der Stetigkeit von P_a, P auf K ergibt der Satz von Dini gleichmäßige Konvergenz $P_a \to P$ auf K. Folglich gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein a_0 mit

(a) $0 \leqq P - P_{a_0} \leqq \varepsilon$ auf K.

Mit $\delta' := (a_0/c)^{\frac{1}{2-n}}$ ist $\varphi(x, y) \geqq c \cdot \delta'^{2-n} = a_0$ auf $B_{\delta'}(y)$. Daraus folgt

(b) $0 \leqq \int_{B_{\delta'}(y)} \big(\varphi(x, y) - a_0\big) \, d\lambda(x) \leqq \int \big(\varphi(x, y) - \varphi_{a_0}(x, y)\big) \, d\lambda(x) \leqq \varepsilon,$

und (b) gilt auch für alle $\delta \leqq \delta'$. Es ist

$$\varphi(x, y) = \left(\varphi(x, y) - a_0\right) \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, y) - a_0}$$

mit

$$\varphi(x, y) \leqq C\,|x - y|^{2-n},$$

$$\varphi(x, y) - a_0 \geqq c\,|x - y|^{2-n} - a_0 \geqq \frac{c}{2}\,|x - y|^{2-n},$$

falls $|x - y| \leqq \left(\frac{2a_0}{c}\right)^{\frac{1}{2-n}} =: \delta''$ ist. Nach (b) folgt für alle $\delta \leqq \delta''$

$$\int_{B_\delta(y)} \varphi(x, y)\, d\lambda(x) \leqq \frac{2C}{c}\,\varepsilon \quad \text{für alle} \quad y \in K.$$

(ii) Sei $P_{\varphi|O\cap\operatorname{supp}\lambda}$ endlich und stetig, K ein beliebiges Kompaktum in O. Zu K wähle man eine zweite kompakte Menge $K' \subset O$ mit $K \subset \operatorname{Int}(K')$. Da $K' \cap \operatorname{supp}\lambda$ kompakt ist, so findet man zu $\varepsilon > 0$ nach (i) ein $\delta > 0$ mit

$$\text{(c)} \qquad \int_{B_{2\delta}(y)} \varphi(x, y)\, d\lambda(x) \leqq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad y \in K' \cap \operatorname{supp}\lambda.$$

Sei $y \in K$ mit $\operatorname{dist}(y, \operatorname{supp}\lambda) \leqq \delta$. Dazu gibt es ein $z \in \operatorname{supp}\lambda \cap K'$ mit $|z - y| = \operatorname{dist}(y, \operatorname{supp}\lambda)$ und (c) ergibt

$$\int_{B_\delta(y)} \varphi(x, y)\, d\lambda(x) \leqq \int_{B_{2\delta}(z)} \varphi(x, y)\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{B_{2\delta}(z)} \varphi(x, z)\, \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, z)}\, d\lambda(x) \leqq Cc^{-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \varepsilon.$$

Nach (i) folgt Stetigkeit von P auf K. Indem man O durch Kompakte ausschöpft, ergibt sich die Behauptung ∎

LITERATUR

[1] Frehse, J.: On systems of second order variational inequalities. Israel J. Math. **15** (1973), 421–429.

[2] Fuchs, M.: The Green-Matrix for Strongly Elliptic Systems of Second Order with Continuous Coefficients. Z. Anal. Anw. **6** (1987)

[3] Fuchs, M.: The Green-matrix for elliptic systems which satisfy the Legendre-Hadamard condition. Manus. math. **46** (1984), 97–115.

[4] Giaquinta, M.: Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Princeton: University Press 1983.

[5] Gilberg, D., und N. S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1977.

[6] Helms, L. L.: Einführung in die Potentialtheorie. Berlin: Walter de Gruyter 1973.

[7] Hildebrandt, S., und H. Kaul: Two-dimensional variational problems with obstructions, and Plateau's problem for H-surfaces in a Riemannian manifold. Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 187–223.

[8] Hildebrandt, S., und K.-O. Widman: Variational inequalities for vector-valued functions. J. Reine u. Angew. Math. **309** (1979), 181–220.

[9] Hildebrandt, S., und K. O. Widman: Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order. Math. Z. **142** (1975), 67–86.

[10] Hildebrandt, S., and K.-O. Widman: On the Hölder-continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV) 4 (1977), 145—178.
[11] John, F.: Plane wave and spherical means. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1955.
[12] Kinderlehrer, D., und G. Stampacchia: Variational inequalities and applications. New York: Academic Press 1980.
[13] Morrey, C. B. jr.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1966.
[14] Steffen, K.: Vorlesung über Variationsungleichungen (unpubl.). Universität Düsseldorf, 1980—1981.
[15] Tomi, F.: Variationsprobleme vom Dirichlet-Typ mit einer Ungleichung als Nebenbedingung. Math. Z. 128 (1972), 43—74.

Manuskripteingang: 10. 05. 1984

VERFASSER:

Dr. Martin Fuchs
Mathematisches Institut der Universität
D-4000 Düsseldorf, Universitätsstr. 1